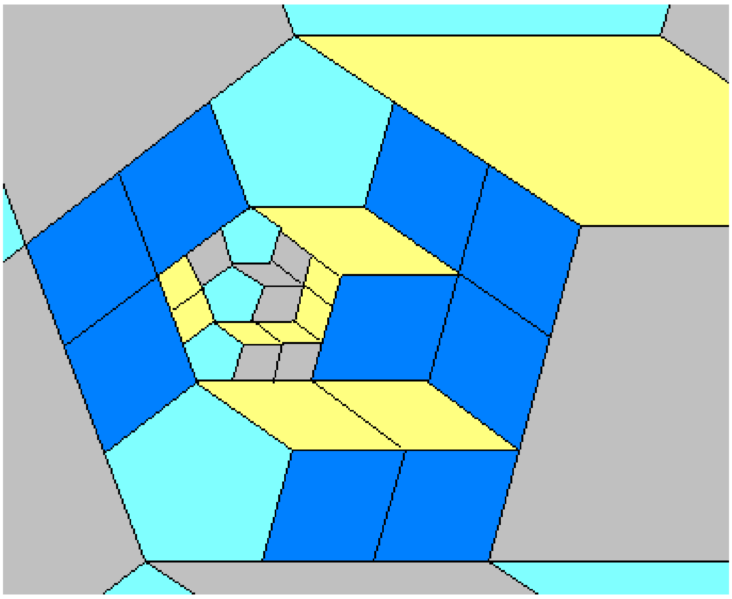
The theory of quasi-crystalline mosaic in the correct polygons
(Теория квазикристаллической мозаики на правильных многоугольниках).

Franz Hermann
franz.h-n@yandex.ru

It is known that a regular polygon with an even number of sides can be paved with a rhombic mosaic with the rhombus side equal to the polygon side. This paper provides a generalization for constructing a rhombic mosaic for the case of any ***n***-gon. in addition, we consider cases of constructing a rhombic-fractal mosaic of regular polygons. In addition, the hypothesis "about a combined mosaic" is formulated»
(Известно, что правильный многоугольник с чётным числом сторон можно замостить ромбической мозаикой со стороной ромба равной стороне многоугольника. Данная работа даёт обобщение для построения ромбической мозаики на случай любого ***n***-угольника, кроме того рассматриваются случаи построения ромбическо-фрактальной мозаики правильных многоугольников. Кроме того сформулирована гипотеза «о комбинированной мозаике»).



Франц Герман

Теория квазикристаллической мозаики на правильных многоугольниках

Насколько мне известно, новых типов мозаик больше никто не открывал,...

Мартин Гарднер

Темой нашего исследования будут правильные многоугольники.

Известно, что любой правильный $\boldsymbol{n}$ - угольник с чётным числом сторон, т. е. квадрат, шестиугольник и т. д., можно замостить (т. е. выложить на его площади мозаику) $\boldsymbol{Z_ч}$ ромбами (см., например, книгу У. Болл, Г. С. М. Коксетер «Математические эссе и развлечения»), где

$$\boldsymbol{Z_ч} = \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})^2-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}}. \qquad (1)$$

Например:

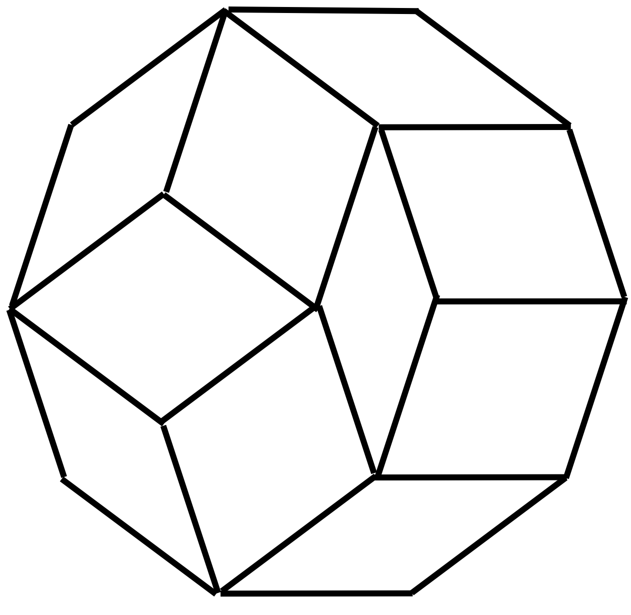


Рис. 1

Здесь $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{10}$ и $\boldsymbol{Z_ч} = \frac{(\boldsymbol{10}-\boldsymbol{1})^2-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} = \boldsymbol{10}$ т. е. **10** ромбов умещаются на площади правильного **10**-угольника.

Заметим, что формула (1) даёт число ромбов в независимости от их видов. А мы видим, что на площади **10** - угольника разместились ромбы двух видов.

Познакомившись с этим результатом, пытливый читатель может воскликнуть: "здесь какая-то несправедливость. Почему такая мозаика возможна только для чётных многоугольников? А как же быть с нечётными?" Такие или примерно такие же вопросы возникли и у автора, когда он увидел впервые формулу (1).

Именно это и послужило толчком более внимательно посмотреть на правильные многоугольники с нечётным числом сторон. Исследованием этих многоугольников мы теперь и займёмся.

Начнём с самого простейшего $\boldsymbol{n}$ - угольника, т. е. для $\boldsymbol{n}$=**3** (Рис. 2).

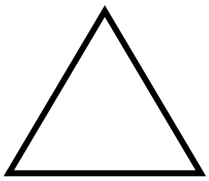


Рис. 2

По существу, это ни что иное как половинка ромба с углами 60° и 120° (Рис. 3).

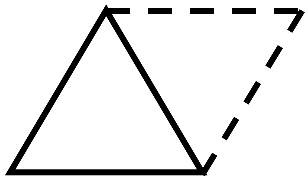


Рис. 3

Сразу возникает гипотеза: а может быть нечётные многоугольники можно замостить ромбами с точностью до половинки ромба? Рассмотрим правильный пятиугольник.

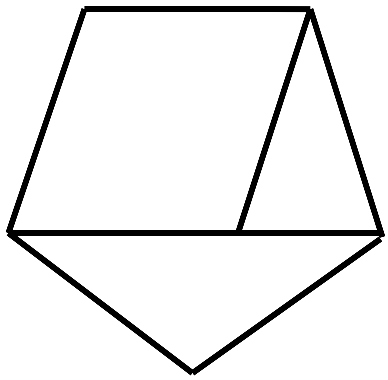


Рис. 4

Как видим, его можно замостить одним целым ромбом и двумя половинками.

Правильный семиугольник имеет мозаику из трёх ромбов и трёх половинок ромбов (Рис. 5).

Заметим, что пятиугольник имеет ромбы и половинки ромбов, принадлежащие к двум тиам ромбов. Семиугольник имеет уже три различных типа ромбов.

Попробуем найти формулу для общего числа ромбов и половинок ромбов для нечётных многоугольников. Мы помним, что формула (1) даёт общее число ромбов в независимости от типов ромбов.

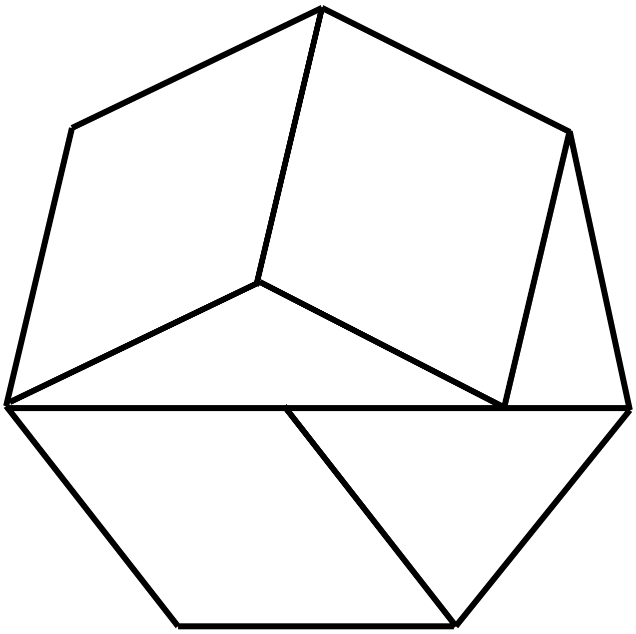


Рис. 5

Введём обозначения.

Будем обозначать через r_i сумму ромбов типа i. Понятно, что для разных многоугольников r_i будут различны, т. е. например r_i для правильного треугольника не равна r_i для правильного пятиугольника и т. д. Общее число ромбов нечётного многоугольника обозначим через. Z_H, тогда, на основе прямых построений, будем иметь:

$$Z_H(3) = r_1 = \frac{1}{2};$$

$$Z_H(5) = r_1 + r_2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2;$$

$$Z_H(7) = r_1 + r_2 + r_3 = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2};$$

$$Z_H(9) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8;$$

и т. д..

Т. е. напрашивается общая формула:

$$Z_H = \frac{(n-1)^2}{8} \qquad (2)$$

Докажем, что это действительно так.

Пусть дан правильный n-угольник, где n - нечётное. Будем последовательно вписывать ромбы, как это показано на Рис. 6. Пусть рассматриваемая часть n-угольника состоит из K сторон.

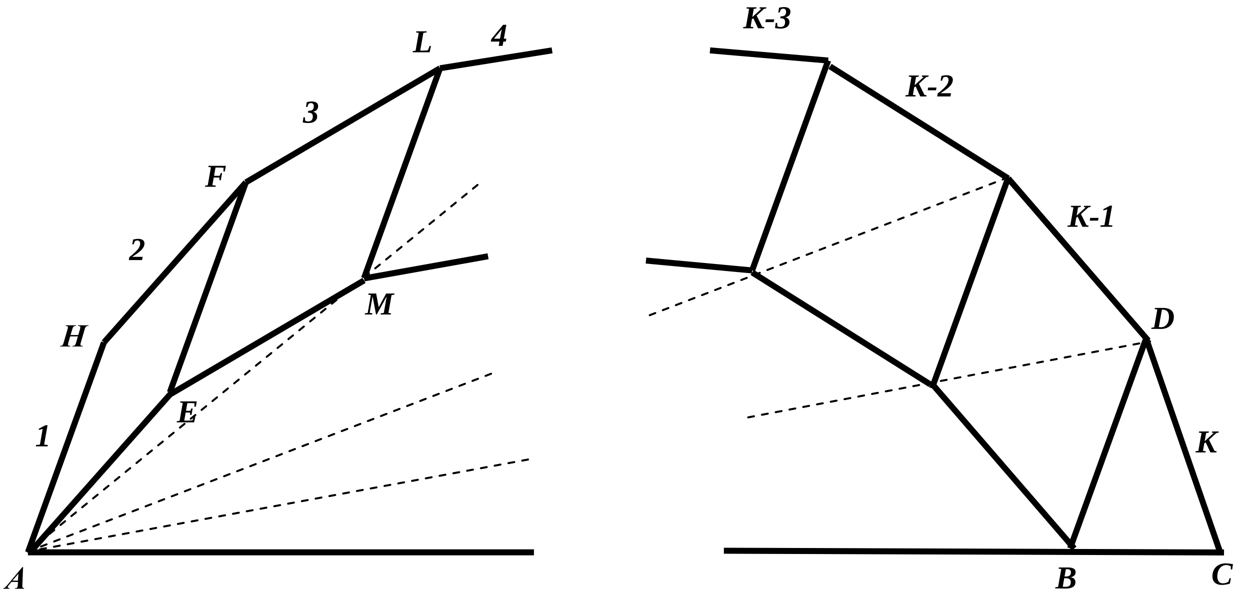


Рис.6

Рассмотрим первый вписанный ромб ***AHFE***. Угол $\angle AHF = \alpha_1 = \pi - \frac{2\pi}{n}$, т. к. мы рассматриваем правильный ***n***-угольник. Тогда смежный с ним угол этого ромба будет равен $\beta_1 = \frac{2\pi}{n}$. Соответственно будем обозначать для каждой стороны i ($i \ge 1$) нашего правильного ***n***-угольника, прилегающие к ней смежные углы ромбов через α_{i-1} и β_{i-1}.

Определим углы ромба ***EFLM***.

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_1 = \pi - \frac{4\pi}{n}; \qquad \beta_2 = \frac{4\pi}{n}.$$

Углы следующего ромба:

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \beta_2 = \pi - \frac{6\pi}{n}; \qquad \beta_3 = \frac{6\pi}{n},$$ и т. д. Очевидно, что

$$\alpha_{K-2} = \pi - \frac{2(K-2)\pi}{n}; \qquad \beta_{K-2} = \frac{2(K-2)\pi}{n}.$$

Соединим точку ***C*** с точкой ***B***, получим равнобедренный треугольник ***DBC***.

Угол $\angle DBC = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(\alpha_1 - \beta_{K-2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \pi + \frac{2\pi}{n} + \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}(K-1).$

Вписанный угол, в описанную окружность нашего ***n***-угольника, стягивающий (***К***-**1**) сторону, как раз равен $\frac{\pi}{n}(K-1)$. Следовательно, угол $\angle DCB$ и есть такой угол. А из этого следует, что точки ***A, B*** и ***C*** лежат на одной прямой.

Следовательно, вписывая таим образом ромбы, мы получим (***К***-**1**) их различных видов. Причём, (***К***-**2**) целых ромба и одну половинку.

Всегда ли вписанные таким образом ромбы действительно будут различны?

Рассмотрим случай, когда

$$\beta_i = \alpha_{i+1}.$$

Отсюда имеем:

$$\beta_i = \frac{2i\pi}{n}.$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_1 - \beta_i = \pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n}$$

По предположению $\beta_i = \alpha_{i+1}$, следовательно

$$\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n} = \frac{2i\pi}{n}.$$

Откуда находим, что $n = 2(2i+1)$. Но n нечётно. Получаем противоречие.

Случая же, когда $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ вообще существовать не может ни при каких n. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателям.

Т. о. ситуация равных по виду ромбов может возникнуть только в случае, когда наш многоугольник имеет чётное число сторон. А т. к. мы рассматриваем нечётные многоугольники, то получаемые таким построением ромбы будут различны по видам.

Кстати, оставляем на самостоятельное рассмотрение читателям и более общие случаи $\alpha_i = \alpha_{i+m}$ и $\beta_i = \alpha_{i+m}$.

Теперь нам необходимо определить максимальное число сторон K, при котором возможно такое построение ромбов.

Рассмотрим фрагмент Рис. 6, дополнив его ещё одной стороной $K+1$ (Рис. 7).

Нас будет интересовать случай, когда отрезки DB и CT не будут параллельны, причём расположены они будут таким образом, что $\alpha_1 + \alpha_{K-1} < \pi$.

Из этого условия получаем

$$\alpha_{K-1} + \alpha_1 = \left(\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi n - 4\pi(K-2)}{n} < \pi.$$

Откуда: $K > \frac{n}{2}$.

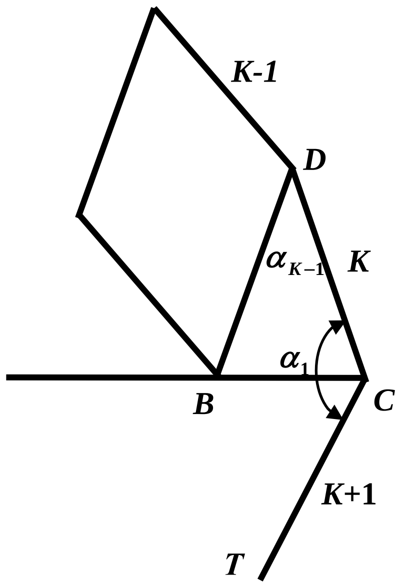


Рис. 7

$\boldsymbol{K}$ – это целое число. Поэтому наименьшее целое число, большее $\frac{n}{2}$ будет число $\frac{n+1}{2}$. Т. е. $K=\frac{n+1}{2}$.

Проведя в $\boldsymbol{n}$-угольнике максимально возможную диагональ, мы поделим его на две части, состоящие из $\frac{n+1}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$ сторон многоугольника и общей диагонали.

Строя ромбы на сторонах, как это было описано выше, мы получим $i=\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2}$ различных видов ромбов на большей части и $\boldsymbol{n}$-угольника и $i=\frac{n-1}{2}-1=\frac{n-3}{2}$ на его меньшей части. Причём очевидно, что ромбы на малой части и $\boldsymbol{n}$-угольника не расширяют множество видов, полученных построением на большей части $\boldsymbol{n}$-угольника. (Вид ромба определяет угол α_K).

Рассмотрим ломаную линию ***AEK*** ... ***B***. Понятно, что она состоит из $\frac{n+1}{2}-2$ отрезков, равных между собой и параллельных сторонам нашего многоугольника **2, 3, 4**, ... , ***К*-1** соответственно (Рис.6). Следовательно, на этой ломаной, как на части многоугольника, можно построить $\left(\frac{n+1}{2}-2\right)-1$ ромбов различного вида.

Покажем получаемую цепь ромбов по видам. Для удобства и наглядности сведём все данные о видах ромбов в Таблицу 1.

***Таблица* 1**

	r_1	r_2	r_3	r_4	…	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n+1}{2}$	1	1	1	1	…	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2}-2$	1	1	1	1	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	1	1	$\frac{1}{2}$		…			
2	$\frac{1}{2}$				…			

Данная таблица представляет виды вписанных ромбов в большую часть $\boldsymbol{n}$-угольника, т.е. ограниченную $\frac{n+1}{2}$ сторонами.

Аналогичную таблицу представим и для второй части $\boldsymbol{n}$-угольника, т. е. - с числом сторон $\frac{n-1}{2}$.

***Таблица* 2**

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	…	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n-1}{2}$	1	1	1	1	1	…	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	1	1	1	1	1	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
5	1	1	1	$\frac{1}{2}$		…			
3	1	$\frac{1}{2}$				…			

Таблица 1 и Таблица 2 описывают мозаику $\boldsymbol{n}$-угольников, для которых $K=\frac{n+1}{2}$ - чётное, т. е. это многоугольники с числом сторон **3, 7, 11, 15,** ...

Из этих таблиц видим, что в каждом виде имеется какое-то число целых ромбов и одна половинка.

Определим сколько ромбов в каждом виде.

Рассмотрим столбец $\boldsymbol{K}$ (первый столбец) Таблицы 1. Он представляет собой арифметическую прогрессию:

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ \frac{n+1}{2}.$$

Очевидно, что такая последовательность имеет $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n+1}{4}$ членов. Каждому члену, кроме первого, сопоставлен целый ромб (столбец r_1 Таблицы 1). Поэтому всего ромбов вида r_1 из Таблицы 1 получаем:

$$r_1=\frac{n+1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{4}.$$

Не трудно получить и число ромбов по остальным видам.

$$r_2=r_1-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n-3}{4},$$

$$r_3=r_2-\frac{1}{2}=\frac{n-3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n-5}{4}.$$

и т. д.

$$r_i=r_{i-1}-\frac{1}{2}=\frac{n-(2i-1)}{4}$$

Рассмотрим Таблицу 2. Первый столбец этой таблицы представляет собой опять же арифметическую прогрессию:

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}.$$

Число членов такой прогрессии равно $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)=\frac{n-3}{4}$ Каждом члену прогрессии сопоставлен один ромб (см. столбец r_1 Таблицы 2). Поэтому ромбов вида r_1 в Таблице 2 имеется:

$$r_1=\frac{n-3}{4}.$$

Также, как и в первом случае, находим число ромбов по остальным видам.

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4}$$

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{n-7}{4}$$

и т. д.

$$r_i = r_{i-1} - \frac{1}{2} = \frac{n-(2i+1)}{4}$$

Сложив выражения r_i для первой и второй таблицы, получаем общую формулу для вычисления числа ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n-(2i-1)}{4} + \frac{n-(2i+1)}{4} = \frac{n-2i}{2}. \qquad (3)$$

Теперь мы можем определить общее число ромбов в мозаике нашего n-угольника. Ранее мы говорили, что такой n-угольник имеет $\frac{n-1}{2}$ видов различных ромбов. Подставляя значения $i = \left\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right\}$ в формулу (3), получаем такую последовательность:

$$\frac{n-2}{2};\quad \frac{n-4}{2};\quad \frac{n-6}{2};\quad \ldots\quad \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что это арифметическая прогрессия, т. к. разность членов a_{i+1} и a_i здесь постоянна. Напомним формулу для вычисления суммы арифметической прогрессии имеющей K членов:

$$S = \frac{a_1 + a_K}{2} K.$$

В нашем случае $a_1 = \frac{n-2}{2}$, $a_K = \frac{1}{2}$, $K = \frac{n-1}{2}$. Получаем:

$$\frac{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{(n-1)^2}{8}.$$

Как видим, мы получили формулу (2). Что и требовалось доказать.

Но это только часть доказательства. Как уже говорилось, всё это справедливо для $\boldsymbol{n}$-угольников с числом сторон **3, 7, 11,...**.

Построим аналогичные таблицы (Таблица 3, Таблица 4) для $\boldsymbol{n}$-угольников, у которых $\boldsymbol{K}=\frac{\boldsymbol{n}+1}{2}$ - нечётное. Это многоугольники с числом сторон **5, 9, 13**,..

Таблица 3

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	…	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n+1}{2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2}-2$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
5	**1**	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$		…			
3	**1**	$\frac{1}{2}$				…			

Таблица 4

	r_1	r_2	r_3	r_4	…	$r_{\frac{n-3}{2}-2}$	$r_{\frac{n-3}{2}-1}$	$r_{\frac{n-3}{2}}$
$K=\frac{n-1}{2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	…	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	**1**	**1**	**1**	**1**	…	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$		…			
3	$\frac{1}{2}$				…			

Как и в предыдущем случае, находим формулу для вычисления $\boldsymbol{r}_i$. Рассмотрим последовательность чисел первого столбца Таблицы 3.

$$3,\ 5,\ 7,\ ...,\ \frac{n+1}{2}-2,\ \frac{n+1}{2}.$$

Число членов в этой последовательности равно: $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=\frac{n-1}{4}$. Каждому члену последовательности сопоставлен один ромб столбца r_i. Таким образом, получаем:

$$r_1=\frac{n-1}{4}.$$

Как и в предыдущих случаях, число ромбов в каждом последующем виде на пол ромба меньше чем в предыдущем. Т. е. имеем:

$$r_2=r_1-\frac{1}{2}=\frac{n-3}{4};$$

$$r_3=r_2-\frac{1}{2}=\frac{n-5}{4};$$

$$r_4=r_3-\frac{1}{2}=\frac{n-7}{4}$$

и т. д.

$$r_i=r_{i-1}-\frac{1}{2}=\frac{n-(2i-1)}{4}.$$

Рассмотрим последовательность чисел столбца 1 Таблицы 4.

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}.$$

Очевидно, что число членов этой последовательности равно $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Следовательно для r_1 Таблицы 4 получаем:

$$r_1=\frac{n-3}{4};$$

$$r_2=\frac{n-5}{4};$$

$$r_3=\frac{n-7}{4};$$

и т. д.;

$$r_i = \frac{n - (2i + 1)}{4}.$$

Как и в предыдущем случае, получаем общую формулу для суммы ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n - 2i}{2}.$$

Т. к. максимальное число видов ромбов и в этом случае равно $\frac{n-1}{2}$, то формула (2) будет верна и для n-угольников с числом сторон **5, 9, 13, 17, ...**. Т. е. формула (2) справедлива для любого n-угольника с нечётным числом сторон.

Из формул (1) и (2) можно вывести общую формулу для числа ромбов в мозаике правильного n-угольника.

$$Z = \frac{2n(n-2) + 1 - (-1)^n}{16} \qquad (4)$$

Примеры:

$n = 9$, $\quad Z = \frac{2 \cdot 9 \cdot (9-2) + 1 - (-1)^9}{16} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 7 + 2}{16} = 8.$

$$r_1 = \frac{9-2}{2} = 3\frac{1}{2};$$

$$r_2 = \frac{9-4}{2} = 2\frac{1}{2};$$

$$r_3 = \frac{9-6}{2} = 1\frac{1}{2};$$

$$r_4 = \frac{1}{2};$$

$Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. (Рис.8)

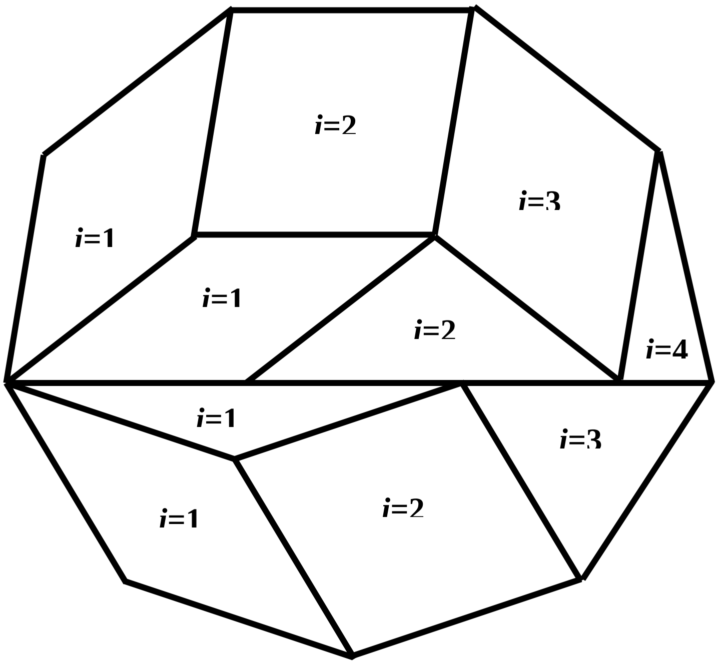


Рис. 8

$$\boldsymbol{n=11;}\ Z=12\frac{1}{2};\quad r_1=\frac{11-2}{2}=4\frac{1}{2};\quad r_2=\frac{11-4}{2}=3\frac{1}{2};\quad r_3=\frac{11-6}{2}=2\frac{1}{2};$$

$$r_4=\frac{11-8}{2}=1\frac{1}{2};\quad r_5=\frac{1}{2};\qquad Z=r_1+r_2+r_3+r_4+r_5.$$ (Рис.9)

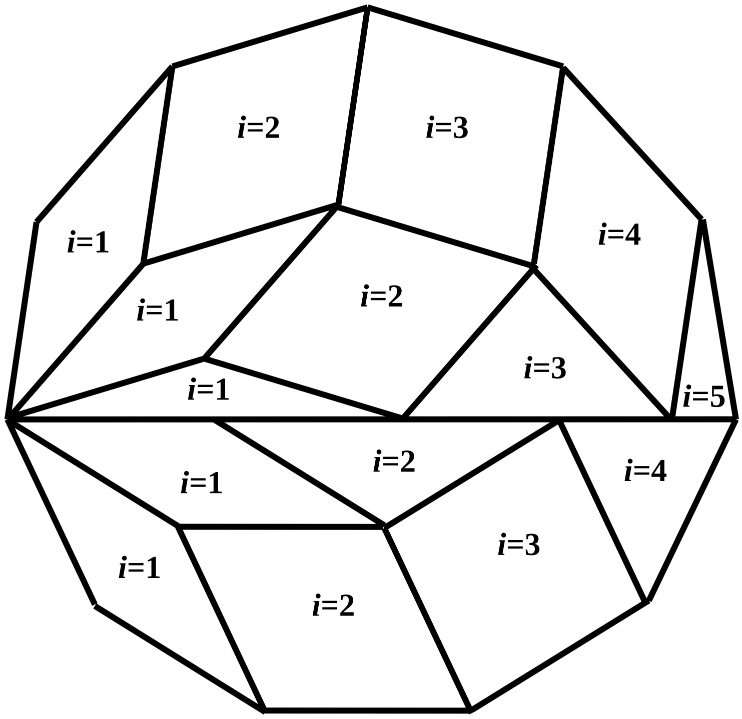


Рис. 9

Оказывается, что кроме показанной для $\boldsymbol{n}$-угольников существует и другая ромбическая мозаика. Исследованием этой новой мозаики мы сейчас и займёмся.

Разделим каждую сторону $\boldsymbol{n}$-угольника на $\boldsymbol{K}$ равных отрезка. Теперь, если из данного $\boldsymbol{n}$-угольника со стороной $\boldsymbol{a}$, определённым образом вырезать $\boldsymbol{K}$ правильных $\boldsymbol{n}$-угольников, то оставшуюся площадь можно замостить $\boldsymbol{N}$ ромбами со стороной $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}$.

Выведем формулу для $\boldsymbol{N}$**.**

Если стороны $\boldsymbol{n}$-угольника разделить на $\boldsymbol{K}$ равных отрезка, а также и стороны ромбов, образующих его мозаику (которую мы рассматривали выше), то в каждом ромбе можно разместить $\boldsymbol{K}^2$ подобных ему ромбов со стороной $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}$. Т. е. будем иметь $\boldsymbol{K}^2\boldsymbol{Z}$ маленьких ромбов. Но каждый маленький вырезанный $\boldsymbol{n}$-угольник сам содержит $\boldsymbol{Z}$ ромбов со стороной $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}$. Отсюда получаем:

$$\boldsymbol{N = K^2 Z - K \cdot Z = Z \cdot K \cdot (K - 1)} \tag{5}$$

Для $\boldsymbol{n}$-угольников, с нечётным числом сторон, в этом случае, имеем такую формулу для суммы ромбов по видам:

$$\boldsymbol{q_i = K(K-1)\frac{n-2i}{2}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{i = \left\{ 1,\ 2,\ ...,\ \frac{n-1}{2} \right\}}.$$

Пример 1: $\boldsymbol{n = 5: K = 2.}$

$$\boldsymbol{N = 2(2-1)\frac{(5-1)^2}{8} = 4;}$$

$$\boldsymbol{i = \{1,\ 2\};}$$

$$\boldsymbol{q_1 = 2(2-1)\frac{5-2}{2} = 3; \qquad q_2 = 2(2-1)\frac{5-4}{2} = 1.}$$

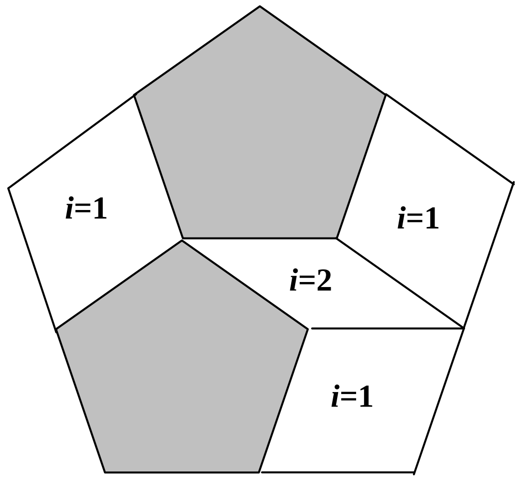


Рис. 10

Пример 2: $\boldsymbol{n = 5 : K = 3.}$

$$N = 3(3-1)\frac{(5-1)^2}{8} = 12;$$

$$i = \{1,\ 2\}$$

$$q_1 = 3(3-1)\frac{5-2}{2} = 9; \qquad q_2 = 3(3-1)\frac{5-4}{2} = 3.$$

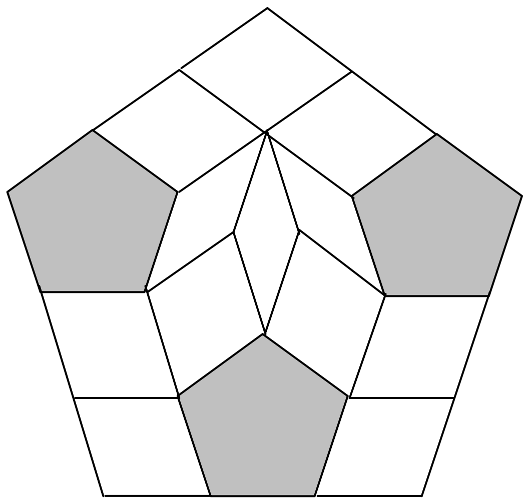


Рис. 11

Очевидно, что для $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$ и любом $\boldsymbol{K}$ отношение $\frac{\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_2} = \mathbf{3}$. Это сразу видно из формулы (6).

Будем называть мозаику, как на Рис. 10, 11, мозаикой малых ромбов.

Можно дать более общее определение мозаик малых ромбов.

Если стороны данного $\boldsymbol{n}$-угольника разделить на $\boldsymbol{K}$ равных отрезков и вырезать из него определённым образом $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, ... $\boldsymbol{n}_j$ правильных $\boldsymbol{n}$-угольников, стороны которых $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, ... $\boldsymbol{a}_j$ кратны $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}$ (т. е. длина каждой стороны $\boldsymbol{a}_j$ нацело делится на $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}$) и $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \ldots + \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}$, то оставшуюся площадь можно замостить мозаикой малых ромбов (т. е. ромбами со стороной $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}$). Здесь $\boldsymbol{a}$ – длина стороны исходного $\boldsymbol{n}$-угольника.

Вычислим число $\boldsymbol{N}$ малых ромбов, которые потребуются для этой мозаики.

Весь $\boldsymbol{n}$-угольник можно замостить $\boldsymbol{K}^2\boldsymbol{Z}$ малыми ромбами. Сторона каждого малого $\boldsymbol{n}_j$-угольника разделена на $\frac{\boldsymbol{a}_j}{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}} = \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_j}{\boldsymbol{a}}$ отрезков. Поэтому его можно замостить $\left(\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_j}{\boldsymbol{a}}\right)^2 \boldsymbol{Z}$ малыми ромбами. Отсюда получаем общую формулу:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}\sum_{\boldsymbol{X}=1}^{\boldsymbol{j}}\left(\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{a}}\right)^2 = \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{Z}\left(\mathbf{1} - \sum_{\boldsymbol{X}=1}^{\boldsymbol{j}}\left(\frac{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{a}}\right)^2\right). \qquad (7)$$

Здесь $\sum_{\boldsymbol{X}=1}^{\boldsymbol{j}}\left(\frac{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{a}}\right)^2 = \left(\frac{\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\boldsymbol{a}_j}{\boldsymbol{a}}\right)^2$.

Для $\boldsymbol{K} = \mathbf{5}$ будем иметь шесть принципиально различных типов мозаик, т. к.

$$1).\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}};$$

В этом случае из нашего $\boldsymbol{n}$-угольника вырезается пять малых $\boldsymbol{n}$-угольников со стороной $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}}$. Подобные случаи мы уже рассмотрели и показали примеры на Рис. 10 и Рис. 11 (здесь $\boldsymbol{K} = \mathbf{2}$и $\boldsymbol{K} = \mathbf{3}$соответственно).

$$2).\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{2\boldsymbol{a}}{5};$$

В этом случае надо вырезать четыре малых ***n***-угольника. Три со стороной $\frac{\boldsymbol{a}}{5}$ и один со стороной $\frac{2\boldsymbol{a}}{5}$.

$$3).\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{2\boldsymbol{a}}{5} + \frac{2\boldsymbol{a}}{5};$$

$$4).\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{3\boldsymbol{a}}{5};$$

$$5).\ \boldsymbol{a} = \frac{2\boldsymbol{a}}{5} + \frac{3\boldsymbol{a}}{5};$$

$$6).\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{5} + \frac{4\boldsymbol{a}}{5}.$$

Приведём примеры мозаик для ***n*=3** и ***К* = 5.**

$$1).\ \boldsymbol{Z} = \frac{(3-1)^2}{8} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{\boldsymbol{a}_X}{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{5}; \qquad \boldsymbol{j} = 5; \qquad \boldsymbol{i} = 1.$$

$$\boldsymbol{N} = 25\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = 10.$$

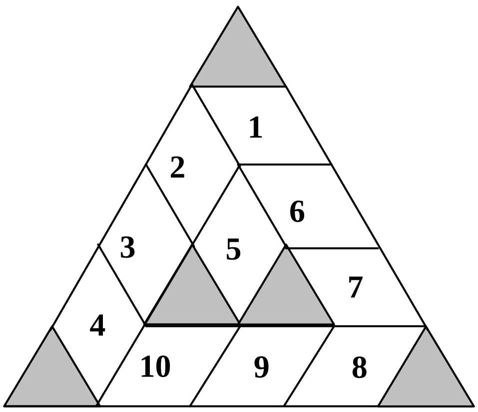


Рис. 12

Причём это не единственная мозаика при таких условиях. Пять маленьких треугольников можно поразному варьировать внутри большого треугольника.

2). $\frac{a_1}{a}=\frac{1}{5}$; $\frac{a_2}{a}=\frac{1}{5}$; $\frac{a_3}{a}=\frac{1}{5}$; $\frac{a_4}{a}=\frac{2}{5}$; $j = 4$ $N = 9$. .

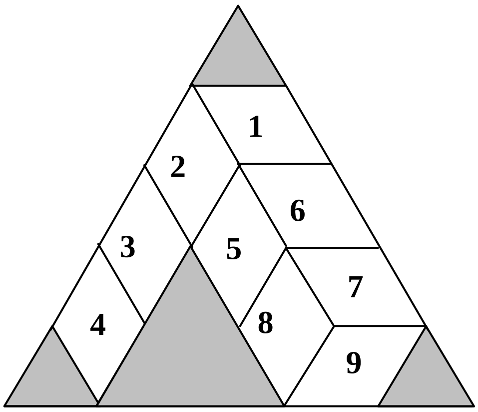


Рис. 13

3). $\frac{a_1}{a}=\frac{2}{5}$; $\frac{a_2}{a}=\frac{2}{5}$; $\frac{a_3}{a}=\frac{1}{5}$; $j = 3$; $N = 8$.

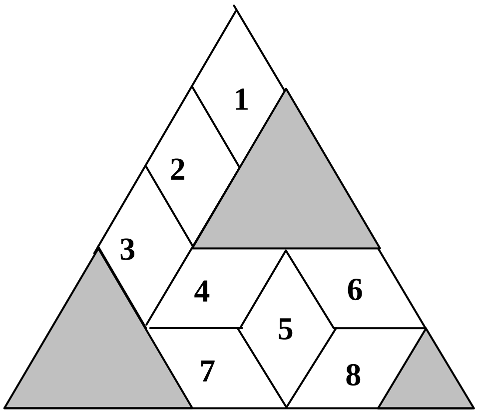


Рис. 14

4). $\frac{a_1}{a}=\frac{3}{5}$; $\frac{a_2}{a}=\frac{1}{5}$; $\frac{a_3}{a}=\frac{1}{5}$; $j = 3$; $N = 7$.

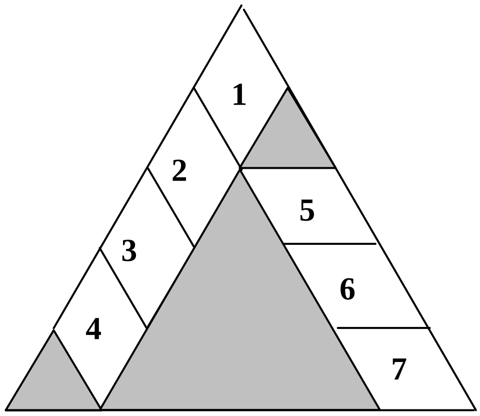


Рис. 15

5). $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{a_2}{a} = \dfrac{2}{5}$; $j = 2$; $N = 6$.

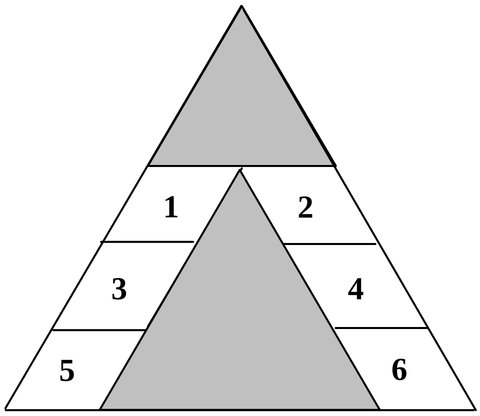


Рис. 16

6). $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{1}{5}$; $\dfrac{a_2}{a} = \dfrac{4}{5}$; $j = 2$; $N = 4$

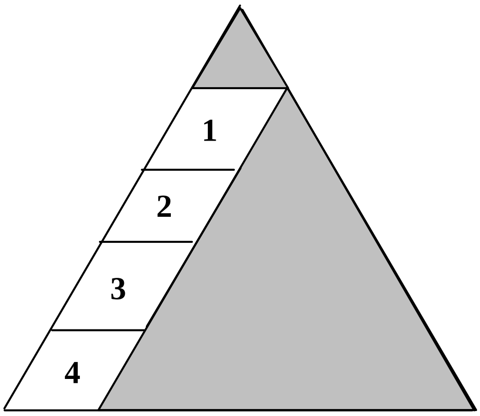


Рис. 17

А теперь приведём примеры мозаик правильного пятиугольника при таких условиях:

$$1).\ \boldsymbol{n}=5,\ \boldsymbol{K}=3,\ \frac{a_X}{a}=\frac{1}{3};\ \boldsymbol{j}=3;\ N=12,\ q_1=9,\ q_1=3.$$

Мы будем считать мозаики различными, если различны расположения малых пятиугольников внутри большого относительно друг друга с точностью до поворотов и зеркальных отражений.

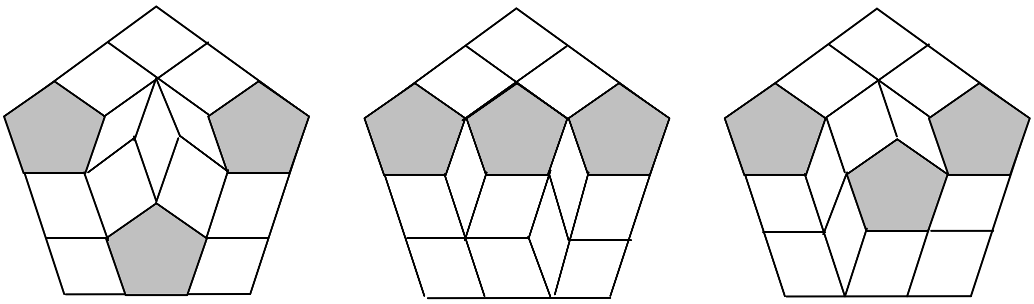


Рис.18

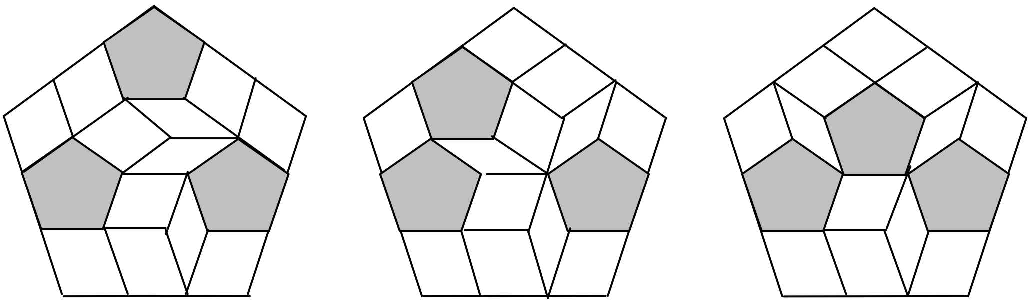


Рис 19

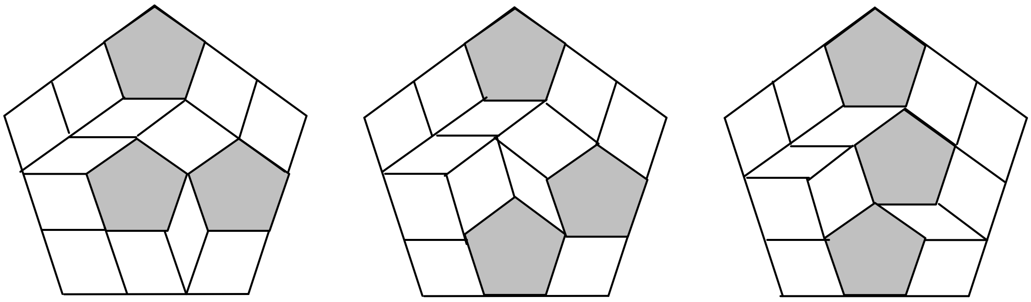


Рис. 20

2). $\boldsymbol{n}$=5, $\boldsymbol{K}$ **= 3,** $\frac{a_1}{a}=\frac{1}{3}$; $\frac{a_2}{a}=\frac{2}{3}$; $\boldsymbol{j}$ **= 2;** $N=8$, $q_1=6$, $q_1=2$.

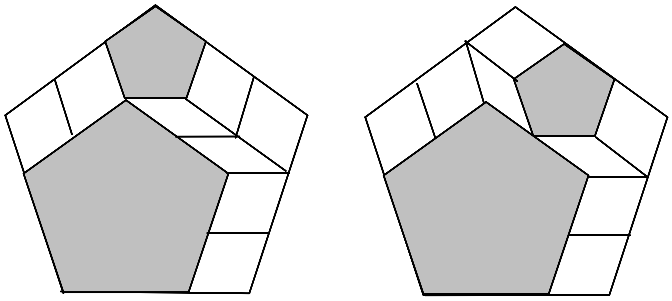


Рис. 21

Нам удалось найти 11 различных мозаик при таких условиях. Возможно, что их существует больше.

В заключение мы сформулируем несколько проблем для самостоятельных исследований заинтересованных читателей.

1). Исследовать $\boldsymbol{n}$-угольники с чётным числом сторон по видам ромбов (в нашей работе мы совсем не каксались этого вопроса).

2). Всегда ли справедливо соотношение: $\frac{r_i}{r_k}=\frac{q_i}{q_k}$?

3). Каковы критерии расположения малых $\boldsymbol{n}$-угольников внутри большого для успешной выкладки мозаик малых ромбов? Когда мы говорили о мозаике малых ромбов, мы всегда оговаривались: «вырезать определённым образом», т. е. ни при любом расположении малых $\boldsymbol{n}$-угольников удаётся выложить мозаику.

4). Сколькими различными способами при конкретных $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{K}$, $\frac{a_X}{a}$ можно замостить данный многоугольник с точностью до поворотов и зеркальных отражений? Может быть, существует формула для числа мозаик в зависимости от этих параметров?

5). ***Гипотеза*** (о комбинированной мозаике)**:** *Если из правильного* $\boldsymbol{n}$*-угольника* $(n=k\cdot m)$ *со стороной* ***a****, определённым образом вырезать* $\boldsymbol{k}$

*правильных **m**-угольников со стороной **a**, то оставшуюся площадь можно замостить целыми ромбами со стороной **a**.*

Причём, как выяснилось, для некоторых ***n***-угольников существуют качественно различные мозаики, т. е. при равных ***n, k, m*** число ромбов в мозаиках и виды ромбов могут быть различны.

Очевидно, что внутренние многоугольники в свою очередь также можно будет аналогично замостить, поэтому подобные мозаики мы будем называть *ромбически-фрактальными*.

Покажем несколько примеров.

Пример 1. ***n* = 10,** ***k*=2, *m*=5.**

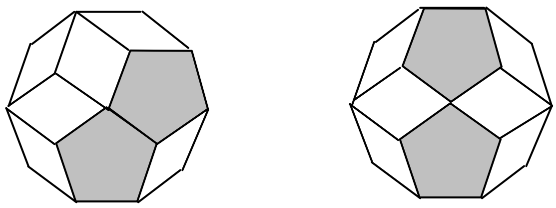
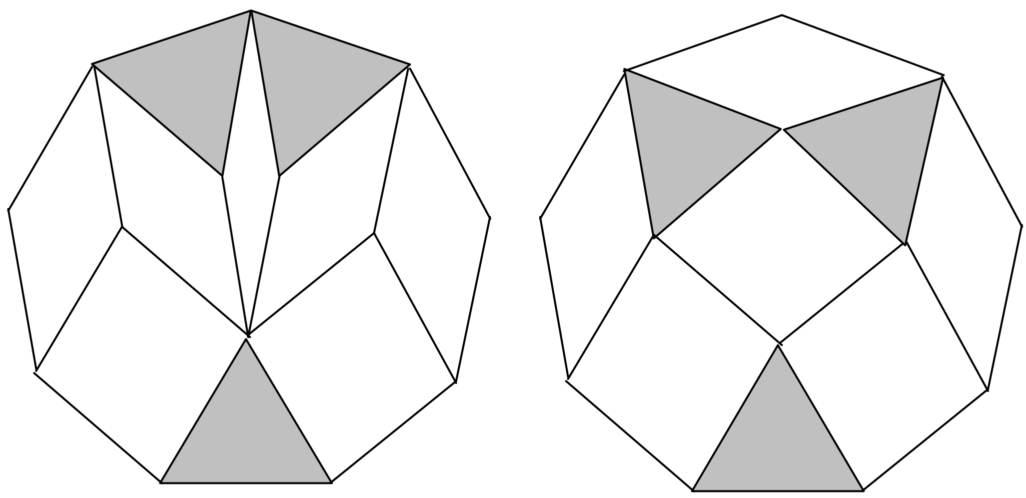


Рис. 22

Эти мозаики различны только взаимным расположением пятиугольников.

***Пример* 2**. ***n* = 9, *k*=*m*=3.**



а) б)

Рис. 23

Как видим из Рис. 23, данные мозаики имеют качественное различие. Одна мозаика состоит из 7-ми ромбов, другая – из 6-ти ромбов. Причём мозаики различны и по виду ромбов. В мозаике, показанной на Рис. 23 б) отсутствует ромб с углом в 20°.

Пример 3. $\boldsymbol{n}$ **= 15,** $\boldsymbol{k}$**=3,** $\boldsymbol{m}$**=5.**

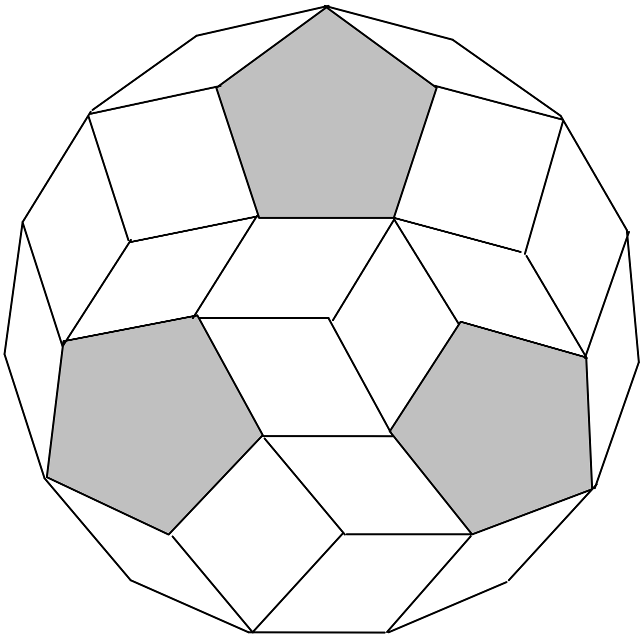


Рис. 24

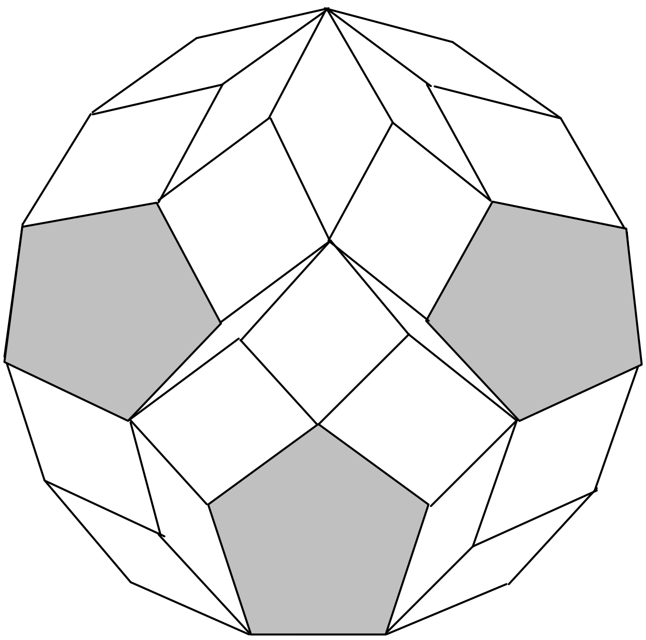


Рис. 25

На Рис. 24 и 25 показаны также качественно различные мозаики. В первом случае мозаика состоит из 18-ти ромбов и не имеет ромба с углом в 12°. Вторая же мозаика состоит из 20-ти ромбов.

Пример 4. ***n* = 15,** ***k*=5,** ***m*=3.**

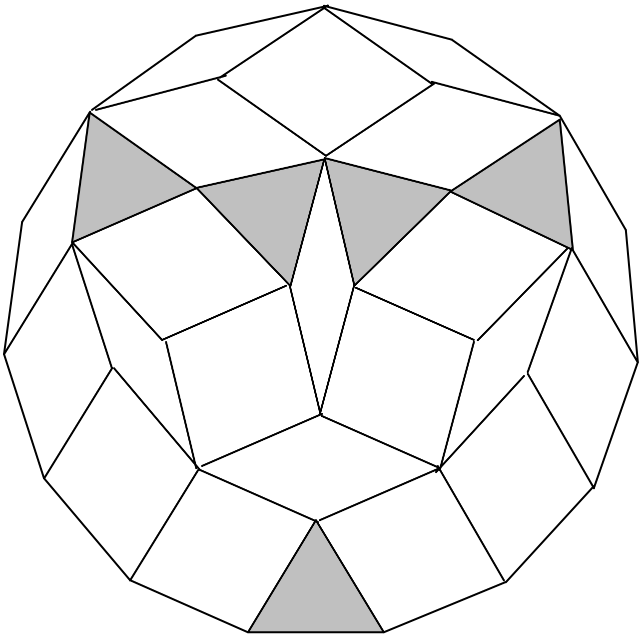


Рис. 26

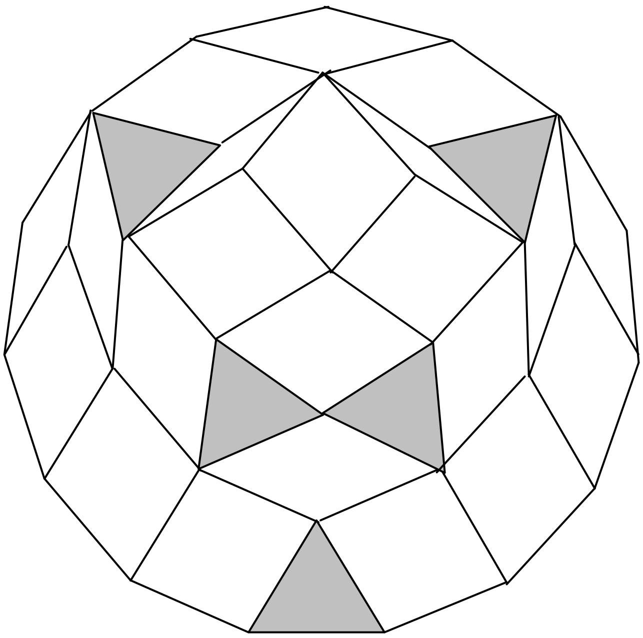


Рис. 27

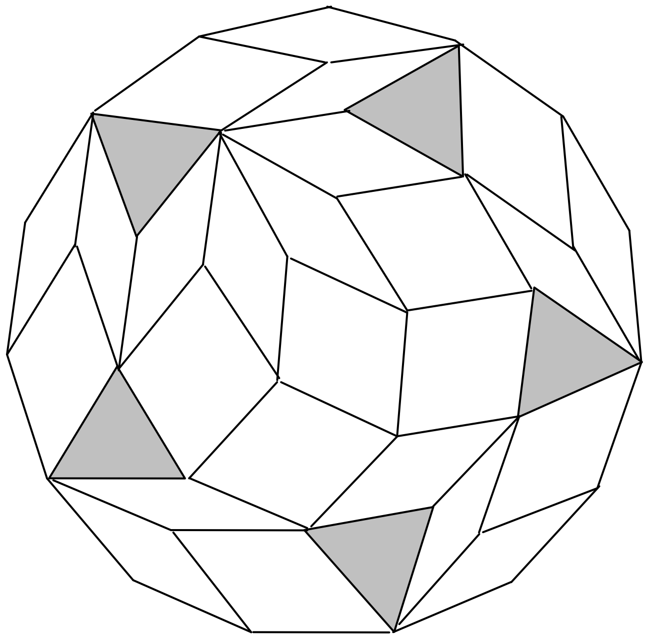


Рис. 28

На всех трёх рисунках 26, 27, 28 представлены качественно различные мозаики. Мозаика, показанная на Рис. 26 имеет 20 ромбов, но не имеет ромба с углом в 12°. Мозаика – Рис. 27 состоит из 22 ромбов и не имеет ромба с углом в 36°. А мозаика – Рис. 28 состоит из 25 ромбов, но не имеет ромба с углом 84°.

Мы думаем, что вопрос о количестве качественно различных мозаик, при конкретных ***n, k,*** и ***m*** может быть также темой отдельного исследования. А так же и вопрос: существуют ли качественно различные по видам ромбов мозаики среди многоугольников с чётным числом сторон или это привилегия только «нечётных» многоугольников?