Les 2-morphismes

Antoine Balan

November 24, 2020

Abstract

The 2-morphisms are generalizations of morphisms between algebras. They are morphisms of algebras if we make a tensor product.

1 Les 2-morphismes

Soient A, B deux algèbres [J], on appelle 2-morphisme une paire (X, Y) de morphismes d'espaces vectoriels tels que :

$$(X+Y)(fg) = X(f)Y(g) + Y(f)X(g)$$

$$(X-Y)(fg) = X(f)X(g) - Y(f)Y(g)$$

On a $X(1) = Y(1) = 1$. La définition fait sens car :

$$X((fg)h) = X(f(gh)) =$$

$$= 1/2[X(f)X(g)Y(h)+X(f)Y(g)X(h)+Y(f)X(g)X(h)-Y(f)Y(g)Y(h)]$$

$$Y((fg)h) = Y(f(gh)) =$$

$$= 1/2[Y(f)Y(g)X(h)+Y(f)X(g)Y(h)+X(f)Y(g)Y(h)-X(f)X(g)X(h)]$$

2 Exemple de 2-morphismes

2.1 Cas des morphismes simples

Si $X = Y$, alors X est un morphisme d'algèbres. Si $A = B = \mathcal{C}^\infty(M)$, pour M une variété différentielle, et si $X = Y$ est continu, alors X est un endomorphisme de variété.

2.2 Cas des nombres complexes

Dans le cas des nombres complexes $\mathbf{C}$, on a pour $i^2 = -1$:

$$X(i) = 1$$

$$Y(i) = -1$$

C'est un exemple où $X \neq Y$.

3 Propriété

Si Z est un morphisme d'algèbre, alors $Z \circ (X, Y)$ et $(X, Y) \circ Z$ sont des 2-morphismes.

4 Les 2-automorphismes des complexes

On peut se demander quels sont les 2-automorphismes des complexes, c'est-à-dire les bijections (X, Y) telles que :

$$X(z + z') = X(z) + X(z')$$

$$Y(z + z') = Y(z) + Y(z')$$
$$(X + Y)(zz') = X(z)Y(z') + Y(z)X(z')$$
$$(X - Y)(zz') = X(z)X(z') - Y(z)Y(z')$$

5 Simplification

Un 2-morphisme entre A et B est un morphisme entre A et $K[i] \bigotimes_K B$, avec K le corps, on pose $a = (1+i)/2$ et $b = (1-i)/2$, et $Z = a \otimes X + b \otimes Y$; on a alors :

$$Z(fg) = Z(f)Z(g)$$

Et réciproquement, un tel Z donne un 2-morphisme.

References

[J] N.Jacobson, "Basic Algebra" I & II, Dover, USA, 2017.