La cohomologie dans une algèbre

Antoine Balan

October 27, 2020

Abstract

We define a cohomology with values in an algebra fiber bundle.

1 Fibré en algèbre

On définit un fibré en algèbre (A, ∇) comme étant un fibré vectoriel sur une variété M muni d'une structure d'algèbre et d'une connexion ∇ telle que :

$$\nabla(a.a') = \nabla(a).a' + a.\nabla(a')$$
$$R_\nabla = 0$$

La connexion ∇ est une dérivation et elle est de courbure nulle.

2 La cohomologie en algèbre

On définit une différentielle sur l'algèbre extérieure à valeurs dans (A, ∇) :

$$da(X) = \nabla_X(a)$$
$$d(\alpha)(X, Y) = \nabla_X(\alpha(Y)) - \nabla_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$
$$d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{deg(\alpha)}\alpha \wedge d(\beta)$$

La différentielle d vérifie, du fait que ∇ est de courbure nulle :

$$d \circ d = 0$$

La cohomologie $H^*(M, A)$ est alors donnée par la différentielle d :

$$H^*(M, A) = Ker(d)/Im(d)$$

3 Fibré sur l'algèbre A

Etant donné un fibré en algèbre (A, ∇), on définit un fibré sur cette algèbre $(E, \tilde{\nabla})$ comme un fibré muni d'une action de A et d'une connexion $\tilde{\nabla}$ telle que :

$$\tilde{\nabla}(a.s) = \nabla(a).s + a.\tilde{\nabla}(s)$$

La courbure de $\tilde{\nabla}$ vérifie alors :

$$R_{\tilde{\nabla}}(a.s) = a.R_{\tilde{\nabla}}(s)$$

On peut définir des classes caractéristiques à valeurs dans $H^*(M, A)$ en prenant la trace :

$$c_k = tr(R_{\tilde{\nabla}}^k)$$