Теорема о Покрытии (The Cover Theorem)

Илья Шайкевич (Eliahu Shaikevich)

Sept. 2020

Abstract

There is such a historical number of deals N0 of both parities and such a way of placing them on the market that for any N> N0 the inequality M + (i) ≥M− (i) + V− (i) (9) we will call it the "Shaykevich Inequality" or the Covering Theorem (CoverTheorem)

1 Основные Понятия

1.1

Четность сделок. Все сделки на рынке разделяются на четные и нечетные.
Будем называть сделки buy - четными сделками. Будем называть сделки sell - нечетными сделками.
Будем называть N - историческим количеством сделок, как четных так и нечетных, поставленных на рынок, от первой сделки (любой четности) до N.

1.2 $M_+ - Measure$

Говорим о конструкции M_+ - положительная мера, которая в теории рынков функционально зависит от способа расстановки сделок на рынке. В самом простом случае M_+ является линейной функцией от аргумента связанного с историческим количеством расставленных на рынке сделок.

$$M_+ = k \cdot N = k \cdot (N_b + N_s) \tag{1}$$

Где N - это суммарное историческое количество расставленных на рынке сделок обоих четностей. Конечно же можно рассматривать любые в каком-то смысле разрешенные функции от N. Этот “какой-то” смысл будет прояснен в будущих работах.

1.3

Говорим о конструкции M_- - отрицательная мера, которая в теории рынков имеет структуру сумм. Чтобы построить данную конструкцию будем использовать суммы такого типа:

$$i + (i-1) + .. + 1 \tag{2}$$

где i - это порядковый номер сделки с учетом четности сделки. Как видно - это арифметическая прогрессия. Назовем:

$$M_{-}(i) = k_1 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} j = k_1 \cdot \frac{1+(i-1)}{2} \cdot (i-1) = \frac{k_1}{2} \cdot (i^2 - i) \tag{3}$$

В этой конструкции - i нумерует сделки только одного вида четности, а именно той четности, которой на рынке находится больше на текущее состояние.

1.4 $V_{-} - Value$

Говорим о конструкции v_{-} - отрицательная мера стоимости единичной сделки, обозначающая фиксированную ценность сделки при ее постановке на рынок. Является константой в смысле независимости от текущей цены на рынке, после постановки.

$$v_{-}(i) = C(i) \cdot P_{fix}(i) \tag{4}$$

Где $P_{fix}(i)$ - цена сделки на рынке в момент ее открытия.

$$C(i) = L \cdot U(i) \tag{5}$$

- константа связанная с количеством покупаемого актива $U(i)$ в условных единицах (unit) и с учетом брокерского левериджа L
Просуммируем по всем сделкам без учета четности сделок

$$V_{-}(i) = \sum_{j=1}^{i} v_{-}(j) = \sum_{j=1}^{i} C(j) \cdot P_{fix}(j) \tag{6}$$

Необходимо заметить,что сумма (6) зависит от текущей цены на рынке в отличие от (4) , поскольку $P_{fix}(j)$ для каждой сделки своя и зависит от цены в которую ставят сделку.

1.5 $W - Width$

Назовем шириной (полушириной) торгового канала функцию:

$$W(N) = k_{norm} \cdot \sqrt{N} + P_{fix}(1) \tag{7}$$

Где 1 это первая сделка любой четности. k_{norm} - нормирующий коэффициент, зависящий от торгуемой пары. Назовем функцию (7) и ее клоны - функцией развития рынка. Интересно будет доказать в последующих работах инвриантность функции развития рынка относительно выбора первоначальной точки входа в рынок - пока мы полагаем эту инвариантность аксиоматически.
Заметим одно важное свойство первой производной этой функции

$$W'(N) = k_{norm} \cdot \frac{1}{2\sqrt{N}} \tag{8}$$

- с ростом N - первая производная стремится к 0.

Именно для такого класса функций, у которых первая производная стремится к нулю при $N \to \infty$ и будет сформулирована теорема о покрытии (Cover Theorem)

2 Формулировка Теоремы о Покрытии

Существует такое историческое количество сделок N_0 обоих четностей и такой способ их расстановки на рынке, что для любого $N > N_0$ всегда выполняется неравенство

$$M_+(i) \geq M_-(i) + V_-(i) \tag{9}$$

назовем его "неравенством Шайкевича"или теоремой о покрытии (Cover Theorem)

Докажем сначала теорему в предположении что $V_-(i) = 0$. Почему это можно сделать будет пояснено в отдельной главе. Конечно же мы не можем пренебрегать $V_-(i)$, но чтобы понять сам механизм теоремы, мы это сделаем и впоследствие вновь вернем в рассмотрение этот член неравенства.

Примем как аксиому, что коэффициент k из формулы (1) и коэффициент k_1 из формулы (3) равны друг другу $k = k_1$

Докажем неравенство:

$$M_+(i) \geq M_-(i) \tag{10}$$

Итак при развитии рынка по формуле (7) значение функции $W(N)$ для некоторого N_0 будет равно:

$$W(N_0) = k_{norm} \cdot \sqrt{N_0} + P_{fix}(1) \tag{11}$$

При этом положительная мера M_+ к моменту постановки сделки N_0 будет равна

$$M_+(N_0) = k \cdot N_0 \tag{12}$$

Нормируем функцию $W(N_0)$ из формулы (11)

$$w(N_0) = \frac{1}{k_{norm}} \cdot \ [W(N_0) - P_{fix}(1)] = \sqrt{N_0} \tag{13}$$

И соответственно

$$w^2(N_0) = N_0 \tag{14}$$

Пусть сделка N_1, такая что $N_1 > N_0$ и обязательно той же самой четности что и N_0 ложится на функцию $w(N)$ через единичный шаг. Так что можно записать:

$$w(N_1) = w(N_0) + 1 \tag{15}$$

Или

$$w^2(N_1) = [w(N_0) + 1]^2 = w^2(N_0) + 2 \cdot w(N_0) + 1 \tag{16}$$

Далее преобразуем

$$w^2(N_1) - w^2(N_0) = 2 \cdot w(N_0) + 1 \tag{17}$$

Заменяем по формуле (14)

$$N_1 - N_0 = 2 \cdot w(N_0) + 1 \tag{18}$$

Умножаем на коэффициент k обе части уравнения

$$k \cdot N_1 - k \cdot N_0 = 2 \cdot k \cdot w(N_0) + k \tag{19}$$

Заменяя на определение положительной меры из формулы (12) получаем изменение положительной меры при развитии рынка

$$M_+(N_1) - M_+(N_0) = 2 \cdot k \cdot w(N_0) + k \tag{20}$$

Или

$$\Delta M_+(N_0) = 2 \cdot k \cdot w(N_0) + k \tag{21}$$

Теперь давайте посчитаем как будет меняться отрицательная мера M_- при развитии рынка по формуле (11)

Пусть к моменту постановки сделки N_0 количество незакрытых сделок той же четности что и N_0 равно $n = [1...n]$. Тогда используя определение отрицательной меры из формулы (3) получаем

$$M_-(N_0) = k_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} j = k_1 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{k_1}{2} \cdot (n^2 + n) \tag{22}$$

Поскольку сделка N_0 была $n+1$ сделкой той же четности, что и сделка n.

Отрицательная мера при поставновке сделки N_1 будет равна

$$M_-(N_1) = k_1 \cdot \sum_{j=1}^{n+1} j = k_1 \cdot \frac{1+(n+1)}{2} \cdot (n+1) = \frac{k_1}{2} \cdot ((n+1)^2 + (n+1)) \tag{23}$$

Поскольку сделка N_1 была $n+2$ сделкой той же четности, что и сделка n. Тогда

$$\Delta M_-(N_0) = M_-(N_1) - M_-(N_0) = \frac{k_1}{2} \cdot (2n+2) = k_1 \cdot (n+1) \tag{24}$$

Сравним изменение положительной и отрицательной мер из формулы (10) и подставляя формулы (21) и (24)

$$2 \cdot k \cdot w(N_0) + k \geq k_1 \cdot (n+1) \tag{25}$$

Или как уже говорилось поскольку аксиоматически $k = k_1$ то получаем:

$$2 \cdot w(N_0) \geq n \tag{26}$$

Как уже говорилось n это количество незакрытых сделок той же четности что и N_0 Все эти сделки ставились на рынок аналогично сделке N_0 , то есть в соответствие с функцией $w(N)$

Можно утверждать, что количество незакрытых сделок той же четности что и N_0 в момент постановки сделки N_0 равно:

$$n(N_0) = w(N \leq N_0) \tag{27}$$

Где N заведомо меньше N_0 Или

$$n(N_0) = w(N_0) - 1 \tag{28}$$

Где 1 это та же самая единица шага, что и в формуле (15) Тогда из формулы (26) получаем фундаментальное уравнение рынка, а именно, что рынок всегда прибылен

$$w(N_0) \geq (-1) \tag{29}$$

Формула (29) это фундаментальное уравнение рынка и называется "Теоремой о покрытии"или "Cover Theorem"

Необходимо не упустить из вида важный момент, а именно то, что

$$n = \sqrt{N} \tag{30}$$

Именно благодаря зависимости (30) и выполняется Теорема о Покрытии

Давайте докажем Полную Теорему о Покрытии для любой функции развития рынка $f(N)$, такой, что $f'(N \to \infty) \to 0$

Обратим внимание, что формула (29) на самом деле доказывает следующее: изменение положительной меры всегда больше изменения отрицательной меры при развитии рынка по формуле (11) для любого $N \geq N_0$
Теперь докажем полную теорему о покрытии для произвольной функции развития рынка $f(N)$ такой что: $f'(N \to \infty) \to 0$:
Перепишем формулу (10) в уже известных терминах и сразу учитывая что $k = k_1$ и учитывая формулы (27) и (14): $n(N) = w(N) = \sqrt{N}$

Тогда если $n(N) = f(N)$ любая произвольная функция, то имеем переписанную формулу (10):

$$N \geq \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) \tag{31}$$

Давайте ради интереса возьмем для n функцию $f(N) = \sqrt{N}$ Тогда формула (31) примет вид:

$$2N \geq N + \sqrt{N} \tag{32}$$

Или

$$\sqrt{N} \geq 1 \tag{33}$$

В принципе мы могли бы ограничиться и формулой (33) для доказательства теоремы о покрытии, но мы ее доказали в еще более сильной форме , что и изменения положительной меры больше либо равно изменению отрицательной меры для любого $N \geq N_0$. Вернемся к нашей функции $f(N)$ и перепишем формулу (31)

$$N \geq \frac{1}{2} \cdot (f^2(N) + f(N)) \tag{34}$$

и мы ограничили $f(N)$ тем что $f'(N \to \infty) \to 0$. Простые преобразования и дифференцирование дадут нам результат верный после некоторого N:

$$2 \geq 2 \cdot f(N) \cdot f'(N) + f'(N) \tag{35}$$

Устремляем $N \to \infty$ и $f'(N) \to 0$
Тогда

$$2 \geq 0 \tag{36}$$

Полная теорема о покрытии доказана!
Почему мы могли продифференцировать обе части неравенства (34) и быть уверенными, что знак неравенства не поменяется - будет пояснено в отдельной главе. Сейчас лишь скажем что это связано с тем, что $f'(N)$ стремится к 0, и $f'(N) > 0$

Давайте теперь ради интереса уберем ограничение $f'(N \to \infty) \to 0$ и просто найдем тот класс функций, который выполнит неравенство (34) Решив квадратное неравенство

$$f^2(N) + f(N) - 2 \cdot N \leq 0 \tag{37}$$

Получаем класс функций развития рынка, которые удовлетворяют теореме о покрытии (34) для произвольной функции:

$$0 \leq f(N) \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot N}}{2} \tag{38}$$

Или для $N >> 0$

$$0 \leq f(N) \leq \sqrt{2 \cdot N} \tag{39}$$

Формула (39) дала интересный результат , что любая функция развития рынка, которая лежит ниже чем $\sqrt{2 \cdot N}$ выполняет теорему о покрытии (31). Можно ли утверждать, что если какая-то функция меньше функции у которой первая производная стремится к 0 сама должна иметь первую производную стремящуюся к 0 и доказательство этого мы оставим для юных любителей математики.

Итак мы рассмотрели "механизм"теоремы о покрытии и увидели что не только

$$M_{+}(i) - M_{-}(i) \geq 0 \tag{40}$$

но и

$$\Delta M_{+}(i) - \Delta M_{-}(i) \geq 0 \tag{41}$$

И теперь пришло время вспомнить про член $V_{-}(i)$ и доказать формулу (9) в переписанном виде

$$M_{+}(i) - M_{-}(i) \geq V_{-}(i) \tag{42}$$

для любого $N \geq N_0$

3 Член $V_{-}(i)$

Этот член означает "вложение"в рынок в чистом виде. Давайте разберем смысл этого утверждения. Допустим вы купили актив по цене 100$ и его цена выросла до 200$. Прибыль актива составила 200-100=100$ и это по смыслу то же самое что M_{+}. Таким образом вы вернули вложенные 100$ $= v_{-}(i)$ и остались с еще дополнительными 100$.

Теперь давайте рассмотрим если стоимость актива упала до 70$. Это означает что если вы вложили в рынок 100$ то потенциально можете забрать с рынка 70$. Но математически это все те же самые 100$ $= v_{-}(i)$ вложения, которые вы возвращаете с рынка за вычетом убытка 30$. Этот убыток по смыслу то же самое что M_{-}.

Таким образом мы приписали $V_{-}(i) = 0$ беря за модель 0 вложение в рынок, и считая только прибыли и убытки. И было показано что прибыль всегда превысит убыток для определенного класса функций развития рынка и после некоторого $N \geq N_0$.

И было также показано что и изменение прибыли превысит изменение убытка для указзанного класса функций развития рынка.

Тем не менее возникает законный вопрос - а вдруг вложения в рынок не будут покрыты разностью $M_+(i) - M_-(i)$ как обозначено в формуле (42).

Давайте перепишем эту формулу в развернутом виде с учетом того что на рынке находится n сделок одной четности не вышедших по прибыли после постановки на рынок N сделок обоих четностей.

$$N - \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) \geq \sum_{j=1}^{n} C(j) \cdot P_{fix}(j) \tag{43}$$

или

$$2 \cdot N - N - \sqrt{N} \geq \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot C(j) \cdot P_{fix}(j) \tag{44}$$

в правой сумме n в знаке суммирования не превышает $\sqrt{N}$, как это следует из рассуждений вокруг формулы (27), для функции развития рынка $\sim \sqrt{N}$ - формула (7)

Проведем рассуждение для правой части неравенства (44)

Исходя из формулы (5) и принимая как дополнительное условие, что сделки однородны, то есть несут одинаковое количество юнитов, мы можем сказать что $2 \cdot C(j) = 2 \cdot C$

Количество членов с сумме (44) не превысит в среднем $\sqrt{N}$ и это следует из того что $n = \sqrt{N}$. Далее поскольку $P_{fix}(j) > P_{fix}(j-1)$, то можем попробовать доказать неравенство (44) для максимальных значений цены $P_{fix}(n)$ и если оно выполнится, то оно выполнится и для суммы $\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot C \cdot P_{fix}(j)$

Переписываем неравенство (44) с учетом приведенных рассуждений:

$$N - \sqrt{N} \geq \sqrt{N} \cdot 2 \cdot C \cdot P_{fix}(n) \tag{45}$$

Или

$$\sqrt{N} \geq 2 \cdot C \cdot P_{fix}(n) + 1 \tag{46}$$

Мы видим, что правая часть неравенства (46) это какая-то константа, поэтому найдется такое N_0, что для любого $N \geq N_0$ неравенство (46) всегда будет выполнено.

Мы доказали очень сильное утверждение - любой рынок - прибылен, коль скоро он развивается в среднем по формуле $\sim \sqrt{N}$. Большинство рынков развивается именно по этой зависимости, но даже если нет , достаточно, чтобы функция развития рынка была меньше либо равна

$\sqrt{2 \cdot N}$, но даже если и нет, но выполняется условие для функции развития рынка $f'(N \to \infty) \to 0$ - то и в этом случае неравенство (43) выполнится. Но доказательство этого неравенства (43) для произвольной функции развития рынка $f(N)$ такой что $f'(N \to \infty) \to 0$ мы выделим в отдельную работу.