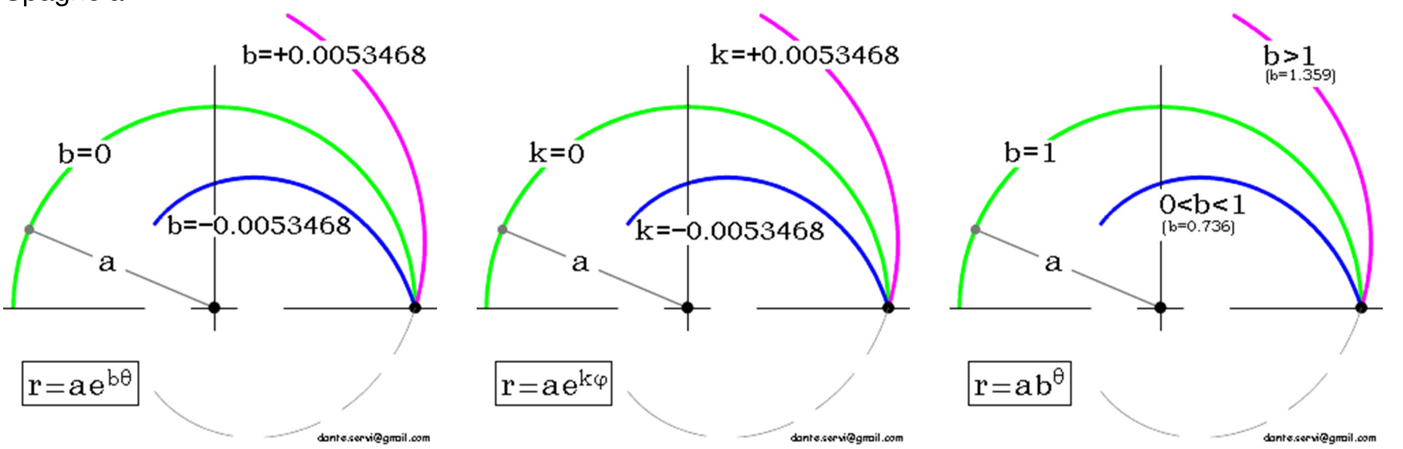
Title: L’inverso della sezione aurea e la sorella speculare della spirale aurea. The reverse of the golden ratio and the mirror sister of the golden spiral.
Author name: Dante Servi
Abstract: Le spirali logaritmiche (r=ae^bθ), partendo da un punto di distanza (a) dalla loro origine si possono sviluppare allontanandosi (se b > 0) oppure avvicinandosi (se b < 0) ad essa, questo provo a dire che vale anche per la spirale aurea. The logarithmic spirals (r=ae^bθ), starting from a point of distance (a) from their origin, can develop by moving away (if b > 0) or approaching (if b < 0) to it, this I try to say that also applies to the golden spiral.
(Rev. v3)
Io non sono un matematico e la mia ricerca è stata di tipo grafico, un anno fa non conoscevo le spirali logaritmiche, poi per caso ho sviluppato un mio metodo per realizzare spirali poligonali e con questo metodo ho realizzato tra le altre una spirale poligonale logaritmica.

Ho già descritto in un mio articolo pubblicato su vixra.org questa poligonale affermando tra l’altro che si differenzia dalla spirale logaritmica unicamente per come viene utilizzato (θ).
Nella spirale logaritmica (θ) è un valore angolare con crescita continua, nella mia spirale poligonale logaritmica (θ) diventa il passo angolare costante rispetto all’origine, di due vertici consecutivi della poligonale.
Faccio notare che l’originalità del mio metodo ritengo stia nello schema di base, per la sua descrizione rimando ai miei precedenti articoli sempre su vixra.org ed alle attività che ho pubblicato su GeoGebra.org.
Una caratteristica che ho notato è che la poligonale, e quindi anche la spirale logaritmica, si può sviluppare sia allontanandosi che specularmente avvicinandosi alla sua origine.
Ho precisato specularmente dando per assunto lo stesso verso di rotazione per l’incremento di (θ).

La fonte di riferimento migliore che ho avuto a disposizione relativa alla spirale logaritmica è stata Wikipedia.
Ultimamente mi sono però accorto che non viene sempre (nelle varie lingue) chiarita la funzione di (a) e di (b) nelle equazioni, per la versione italiana ed in modo limitato per la versione inglese ho deciso di aggiungere un mio contributo in merito.
Il mio contributo, per la versione italiana, precisa che (a) è la distanza dall’origine da cui inizia a svilupparsi la spirale, mentre (b) determina non solo l’inclinazione ma anche se la spirale si sviluppa allontanandosi od avvicinandosi alla sua origine.
Come avevo già scritto per la poligonale ho precisato che i due sviluppi da e verso l’origine sono anche speculari tra di loro, questa affermazione l’ho integrata con la prima delle seguenti immagini.
Queste sono tre immagini che ho caricato su Wikimedia Commons, sono diverse per essere compatibili con le versioni delle equazioni su Wikipedia per la spirale logaritmica: Italiana, Inglese, Tedesca, Francese e Spagnola.



Nell’ultima immagine il valore di (b\=1) indicato è approssimativo non ritenendo di dedicarle ulteriore tempo, non ho messo (~) per timore che fosse scambiato per (-).
Ne approfitto per dire che nel pubblicarle ho fatto qualche pasticcio con le descrizioni, quella corretta relativa alla prima immagine è la seguente:

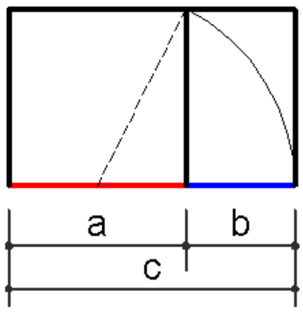
Nell'immagine tre tratti di spirali logaritmiche che si sviluppano partendo dallo stesso punto di distanza (a) dall'origine. Valore di b=0 per quello di colore verde, gli altri due hanno lo stesso valore assoluto di (b) con la differenza che per quello magenta è positivo mentre per quello blu è negativo. Il tratto tratteggiato, che prolunga verso l'origine il tratto magenta, è una copia specchiata del tratto blu.

Come si può notare nella prima immagine, il valore di (b) anche se arrotondato a 7 cifre decimali è quello della spirale aurea, da qui il motivo di questo articolo.
Le descrizioni della spirale aurea che ho trovato parlano sempre di una spirale di crescita, e viene indicato per (b) il valore positivo derivato dalla sezione aurea.
Confrontandomi anche con quanto ho trovato scritto su Wikipedia ritengo di aver verificato che non c'è contraddizione tra il valore di (b) negativo e la sezione aurea.
Per ottenere b = -0.0053468 occorre utilizzare non il valore della sezione aurea ma il suo inverso:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.61803399$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{\Phi}\right)\frac{1}{90} = -0.0053468$$

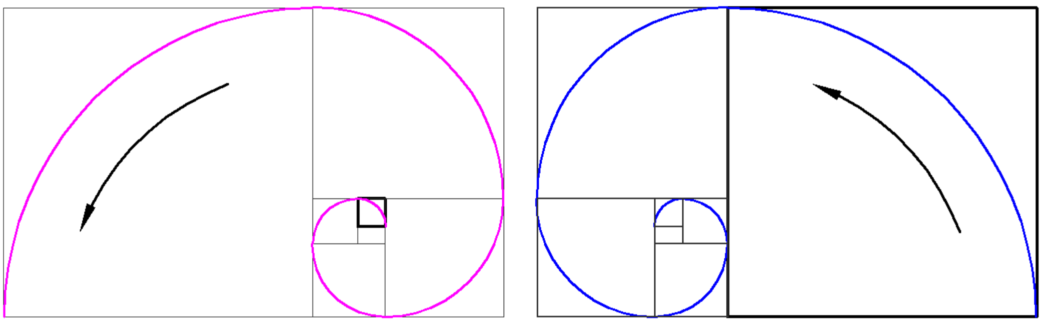
(1/90 vale per (θ) espresso in gradi.
I valori di (a) ed (r) ossia distanza dall'origine del punto di inizio e del punto finale del tratto di spirale aurea possono essere reciprocamente uguali, vedi ultima immagine di questa pagina.
Graficamente ritengo di aver verificato come la stessa costruzione che porta ad incrementare il quadrato di partenza grazie al rettangolo aureo può essere utilizzata per decrementare correttamente lo stesso quadrato di partenza sempre utilizzando il rettangolo aureo.



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\Phi}$$

Partendo da un quadrato di lato (a) posso ottenere un quadrato di lato (a+b=c) ma anche un quadrato di lato (b), questa è la base per la sequenza specularmente inversa che porta ad ottenere la spirale che mi sono permesso di definire la <u>sorella speculare della spirale aurea</u>, nel rispetto dello stesso senso di sviluppo.

Nella seguente immagine riporto il mio confronto grafico delle due approssimazioni basate sui quadrati crescenti e decrescenti, ottenuti tramite i due modi appena descritti di utilizzare il rettangolo aureo.



Ho provato a disegnare la spirale aurea che si sviluppa verso la sua origine con il metodo classico basato sul rettangolo aureo e devo dire che mi sono divertito nel disegnare quadrati sempre più piccoli inseguendo l'origine.
Fatto questo mi sono però chiesto se fosse possibile trovare un metodo analogo magari più semplice e che avesse come riferimento di partenza l'origine della spirale aurea.

Dopo diversi tentativi sono riuscito a definire un metodo abbastanza soddisfacente, devo dire che l'ho ulteriormente razionalizzato confrontandolo con il metodo classico e con quanto trovato su Wikipedia alla voce "Rettangolo aureo".

Questo metodo in sintesi è basato su due evidenze, i centri dei quarti di circonferenza che realizzano la spirale aurea si trovano sui vertici di una spirale poligonale aurea avente passo angolare (θ) pari a 90°.

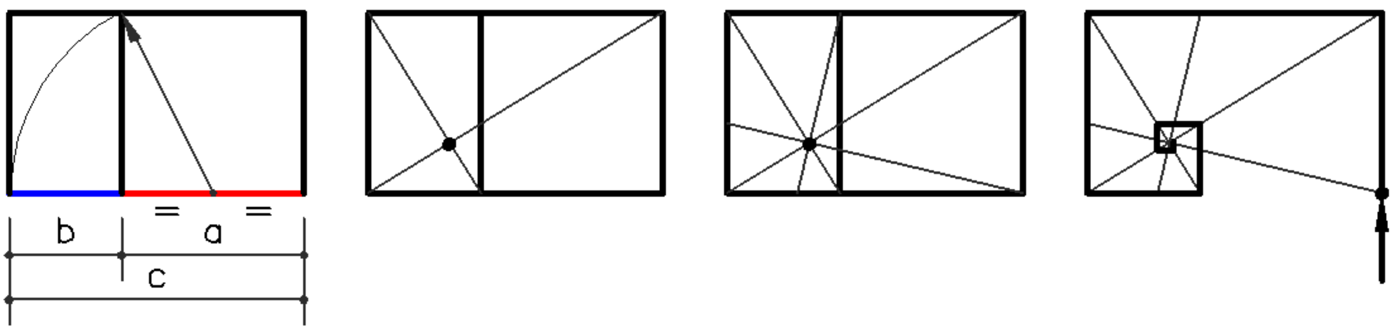
Il termine "passo angolare" me lo sono inventato io quando con il mio metodo per realizzare delle spirali poligonali ho scoperto che potevo realizzare una poligonale che all'epoca descrivevo avente tutti i suoi vertici in comune con la spirale logaritmica.

Tornando alla poligonale che individua tutti i centri, la seconda evidenza è che la stessa è anche il contorno della spirale aurea, voglio dire che la spirale aurea è inscritta in questa poligonale.

Detto questo inizio con il realizzare un triangolo aureo con il solito metodo, in realtà volendo creare una spirale aurea che si sviluppa verso l'origine secondo il senso antiorario, il rettangolo lo realizzo speculare a quello classico.

Traccio quindi una diagonale per ognuno dei due rettangoli, in questo modo individuo l'origine della spirale aurea, noto anche che le diagonali sono tra di loro perpendicolari.
Traccio altri due segmenti che partendo ognuno da un vertice di uno dei due rettangoli e passando per l'origine termina sul lato opposto, anche questi due segmenti risultano perpendicolari tra di loro ed inclinati di 45° rispetto alle diagonali.

A questo punto si può iniziare a tracciare la spirale poligonale aurea, a me piace partire dal vertice in basso a destra del rettangolo maggiore ma visto che abbiamo già tracciato i due rettangoli si può anche partire dal vertice sempre in basso a destra ma del rettangolo minore.

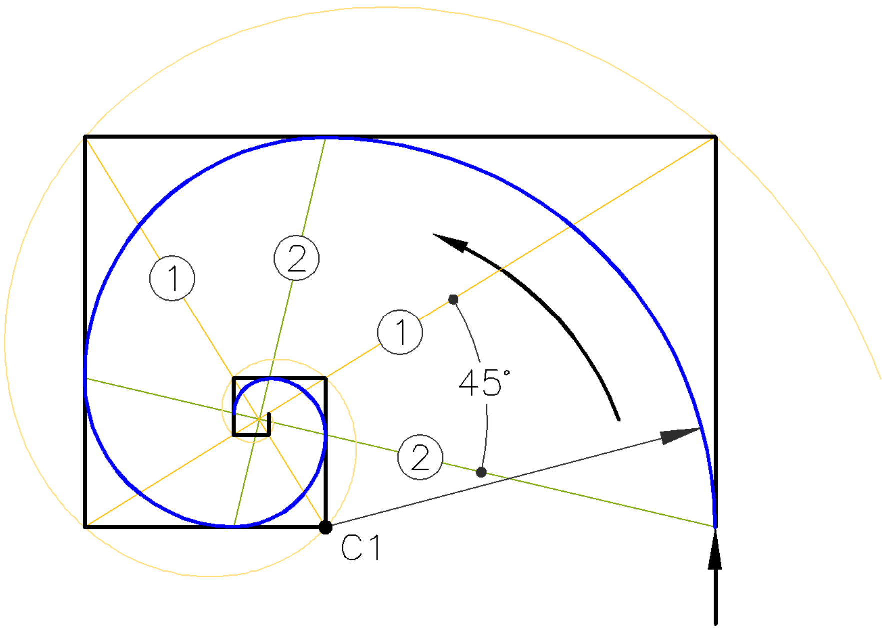


Ora mi riferisco alla figura seguente, le diagonali (1) delimitano i lati della poligonale mentre i segmenti (2) delimiteranno i quarti di circonferenza.
Qualunque dei due punti indicati si scelga per far partire la poligonale il primo lato è verticale e termina nel punto in cui incrocia la diagonale (1).

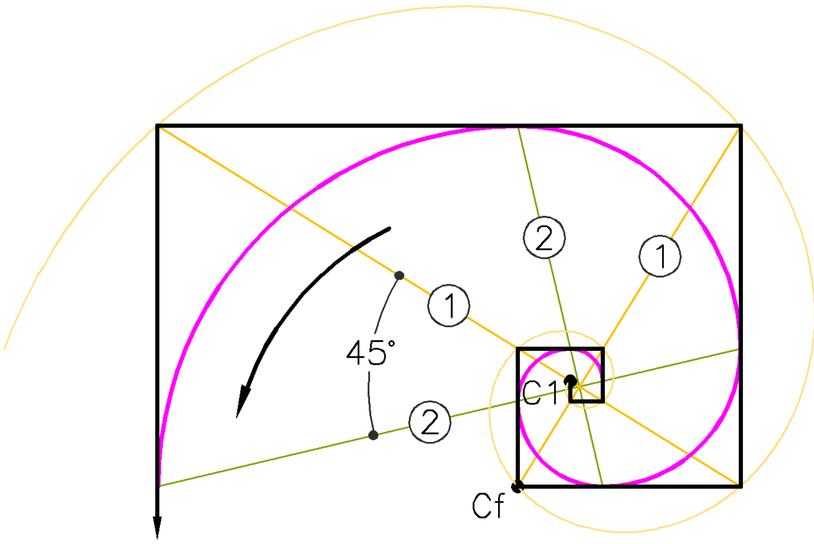
Una volta partita la poligonale in direzione dell'origine è un semplice susseguirsi di tratti verticali e orizzontali fino a quando si vuole o si riesce.

Ora si può realizzare la spirale aurea, con centro in (C1) si può tracciare il primo dei quarti di circonferenza a cui seguiranno tutti gli altri che avranno come centro il vertice successivo della poligonale in direzione dell'origine.

Nella figura seguente ho anche aggiunto una spirale poligonale aurea con passo angolare (θ) pari a 1°, con l'applicazione che mi sono realizzato è possibile utilizzare passi angolari molto più piccoli ma mi pare che già cosi sia sufficientemente precisa da poter essere assunta come spirale aurea.
L'ho aggiunta per mostrare una cosa ovvia, la poligonale e la spirale condividono un punto ogni 90°.
Evidentemente le tre spirali hanno origine in comune.

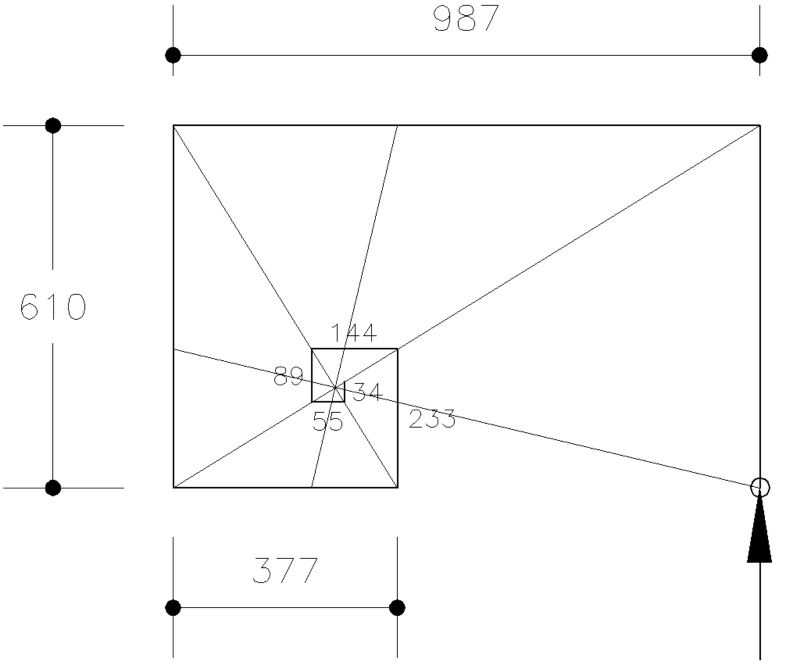


Volendo realizzare lo sviluppo in allontanamento dall'origine la seguente figura speculare alla precedente e con qualche modifica mostra come fare, le modifiche riguardano solo la posizione del centro del primo e dell'ultimo quarto di circonferenza e l'indicazione del verso di sviluppo.



Volendo usare per il rapporto tra i lati dei due rettangoli di partenza la serie di Fibonacci, sapendo che più cresce la serie più il rapporto si avvicina alla sezione aurea non serve esagerare, io ho costruito i due rettangoli con le misure indicate nella seguente immagine.

Credo che il risultato si possa considerare equivalente, andando a misurare i lati sempre più piccoli della spirale poligonale con passo angolare (θ) pari a 90°, si trovano valori che arrotondati al numero intero sono quelli decrescenti della serie di Fibonacci.



I precedenti articoli su vixra.org si trovano al seguente indirizzo: https://vixra.org/author/dante_servi

Le attività che ho pubblicate su GeoGebra.org si trovano teoricamente tutte al seguente indirizzo:

https://www.geogebra.org/search/danteservi

Questi sono i link credo di tutte quelle che ho pubblicato:

https://www.geogebra.org/m/vxe6ax2c
https://www.geogebra.org/m/sdrrxfzv
https://www.geogebra.org/m/cybj8ey6
https://www.geogebra.org/m/bdjhkhnj
https://www.geogebra.org/m/cvjwjdt6
https://www.geogebra.org/m/kmhccfhk
https://www.geogebra.org/m/jtnrkt3p
https://www.geogebra.org/m/m7ahjbrp
https://www.geogebra.org/m/d5gykbce
https://www.geogebra.org/m/fn24ybx7
https://www.geogebra.org/m/fqked4u3
https://www.geogebra.org/m/hddmz9zy
https://www.geogebra.org/m/h8gcpv4h
https://www.geogebra.org/m/hbmpgc6t

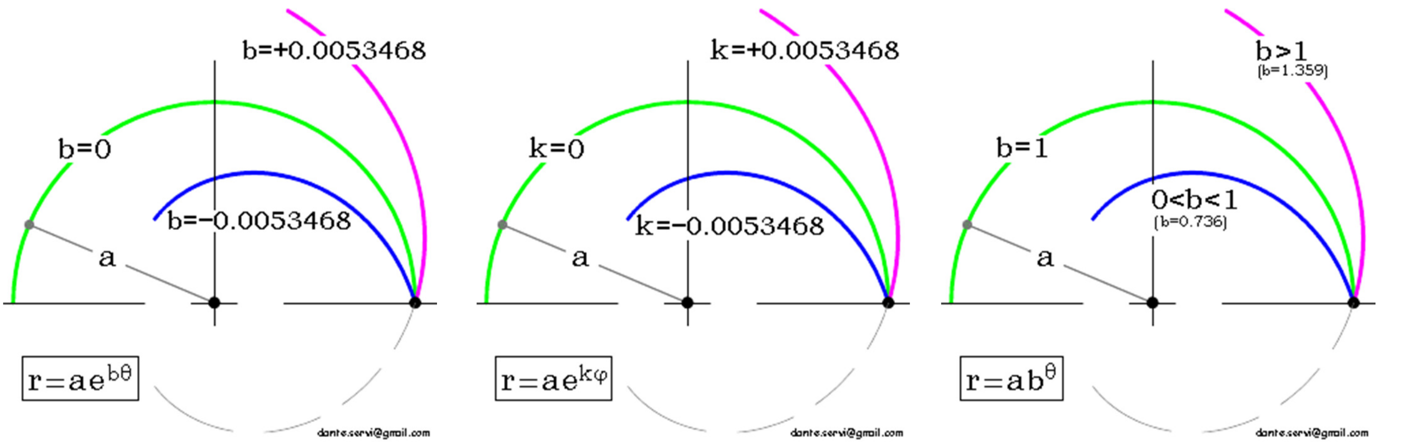
Dante Servi
Bressana Bottarone (PV)
dante.servi@gmail.com

(Follows English)

I am not a mathematician and my research was of a graphic type, a year ago I did not know logarithmic spirals, then by chance I developed my own method to make polygonal spirals and with this method I created a logarithmic polygonal spiral among others.

I have already described this polygonal in an article published on vixra.org stating, among other things, that it differs from the logarithmic spiral only in how it is used (θ).
In the logarithmic spiral (θ) it is an angular value with continuous growth, in my polygonal logarithmic spiral (θ) it becomes the constant angular step with respect to the origin, of two consecutive vertices of the polygonal.
I note that the originality of my method I believe is in the basic scheme, for its description I refer to my previous articles always on vixra.org and to the activities that I published on GeoGebra.org.
A characteristic that I have noticed is that the polygonal, and therefore also the logarithmic spiral, can develop both moving away and specular approaching its origin.
I specified specular assuming the same direction of rotation for the increase of (θ).

The best source of reference I had available relating to the logarithmic spiral was Wikipedia.
Lately, however, I realized that the function of (a) and (b) in the equations is not always clarified (in the various languages), for the Italian version and in a limited way for the English version I decided to add my contribution in this regard.
My contribution, for the Italian version, specifies that (a) is the distance from the origin from which the spiral begins to develop, while (b) determines not only the inclination but also if the spiral develops by moving away or approaching its origin.
As I had already written for the polygonal, I specified that the two developments from and to the origin are also mirror-like, I have integrated this statement with the first of the following images.
These are three images that I uploaded to Wikimedia Commons, they are different to be compatible with the versions of the equations on Wikipedia for the logarithmic spiral: Italian, English, German, French and Spanish.



In the last image, the value of (b\=1) indicated is approximate, as I do not think I would devote more time to it, I did not put (~) for fear that it would be mistaken for (-).
I take this opportunity to say that in publishing them I made some mess with the descriptions, the correct one relating to the first image is the following:

In the image three sections of logarithmic spirals that develop starting from the same point of distance (a) from the origin. Value of b = 0 for the green one, the other two have the same absolute value of (b) with the difference that for the magenta one it is positive while for the blue one it is negative. The dashed section, which extends the magenta section towards the origin, is a mirrored copy of the blue section.

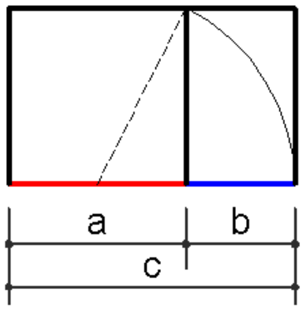
As can be seen in the first image, the value of (b), even if rounded to 7 decimal places, is that of the golden spiral, hence the reason for this article.

The descriptions of the golden spiral that I have found always speak of a spiral of growth, and the positive value derived from the golden section is indicated for (b).
Comparing myself with what I found written on Wikipedia, I believe I have verified that there is no contradiction between the negative value of (b) and the golden section.
To obtain b = -0.0053468 it is necessary to use not the value of the golden section but its inverse:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.61803399$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{\Phi}\right)\frac{1}{90} = -0.0053468$$

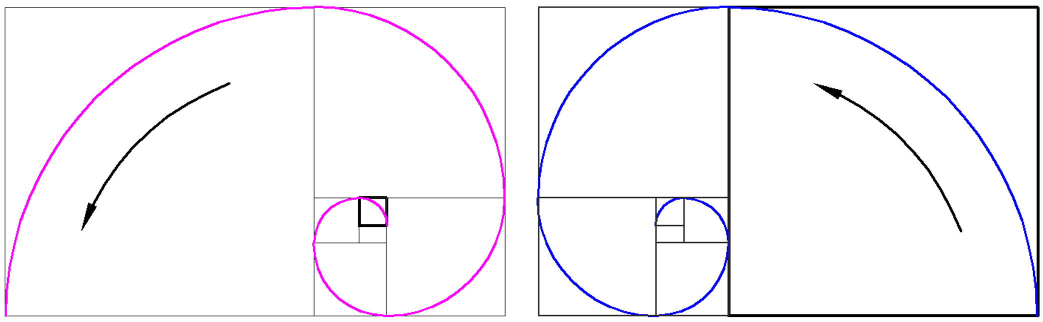
(1/90 applies to (θ) expressed in degrees.
The values of (a) and (r) that is distance from the origin of the point of start and end point of the golden spiral can be mutually equal, see the last image of this page.
Graphically I believe I have verified how the same construction that leads to increase the starting square thanks to the golden rectangle can be used to correctly decrement the same starting square always using the golden rectangle.



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\Phi}$$

Starting from a square on the side (a) I can get a square from the side (a+b=c) but also a square from the side (b), this is the basis for the specular inverse sequence that leads to obtaining the spiral that I allowed myself to define the <u>mirror sister of the golden spiral</u>, in compliance with the same sense of development.

In the following image I report my graphic comparison of the two approximations based on the increasing and decreasing squares, obtained through the two ways just described to use the golden rectangle.



I tried to draw the golden spiral that develops towards its origin with the classic method based on the golden rectangle and I must say that I had fun in drawing smaller and smaller squares chasing the origin.
Once this was done, however, I asked myself if it was possible to find a similar method, perhaps simpler and that had the origin of the golden spiral as a starting point.

After several attempts I managed to define a fairly satisfactory method, I must say that I further rationalized it by comparing it with the classic method and with what was found on Wikipedia under the heading "Golden rectangle".

In summary, this method is based on two evidences, the centers of the quarter circles that make the golden spiral are located on the vertices of a polygonal golden spiral with an angular step (θ) equal to 90°.

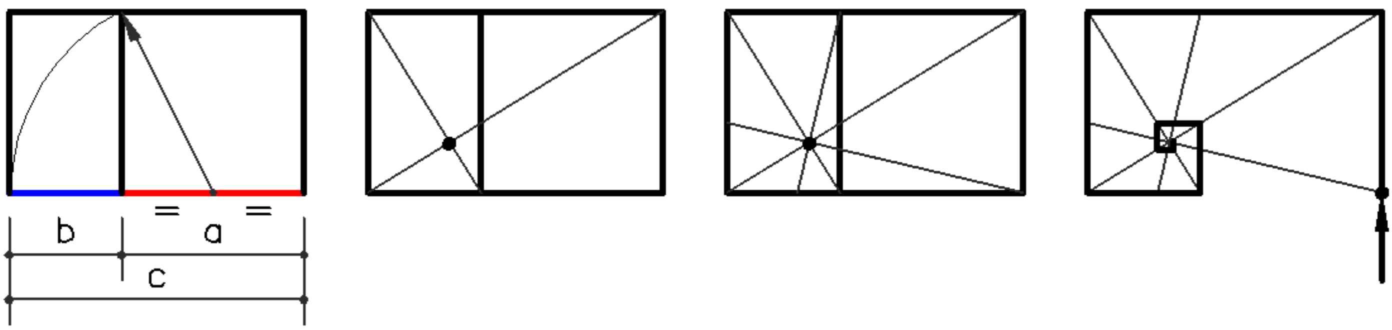
I invented the term "angular step" when, with my method of making polygonal spirals, I discovered that I could create a polygonal that at the time I described having all its vertices in common with the logarithmic spiral.

Returning to the polygonal that identifies all the centers, the second evidence is that the same is also the outline of the golden spiral, I mean that the golden spiral is inscribed in this polygonal.

Said this beginning with the creation of a golden triangle with the usual method, actually wanting to create a golden spiral that develops towards the origin according to the counterclockwise direction, the rectangle I make it mirror to the classic one.

Then I draw a diagonal for each of the two rectangles, in this way I identify the origin of the golden spiral, also known that the diagonals are perpendicular to each other.
I trace two more segments that each starting from a vertex of one of the two rectangles and passing through the origin ends on the opposite side, also these two segments are perpendicular to each other and inclined 45° with respect to the diagonals.

At this point you can start tracing the golden polygonal spiral, I like to start from the bottom right corner of the major rectangle but since we have already drawn the two rectangles you can also start from the top always bottom right but the minor rectangle.



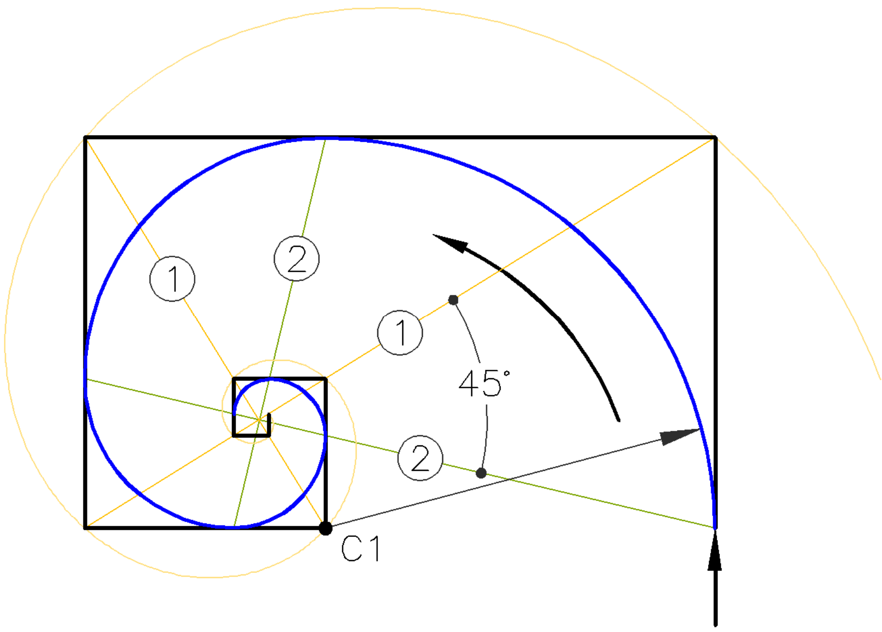
Now I refer to the following figure, the diagonals (1) delimit the sides of the polygonal while the segments (2) will delimit the quarter circumference.
Whichever of the two points indicated is chosen to start the polygonal, the first side is vertical and ends at the point where it crosses the diagonal (1).

Once the polygonal has started in the direction of the origin, it is a simple succession of vertical and horizontal sections as long as you want or succeed.

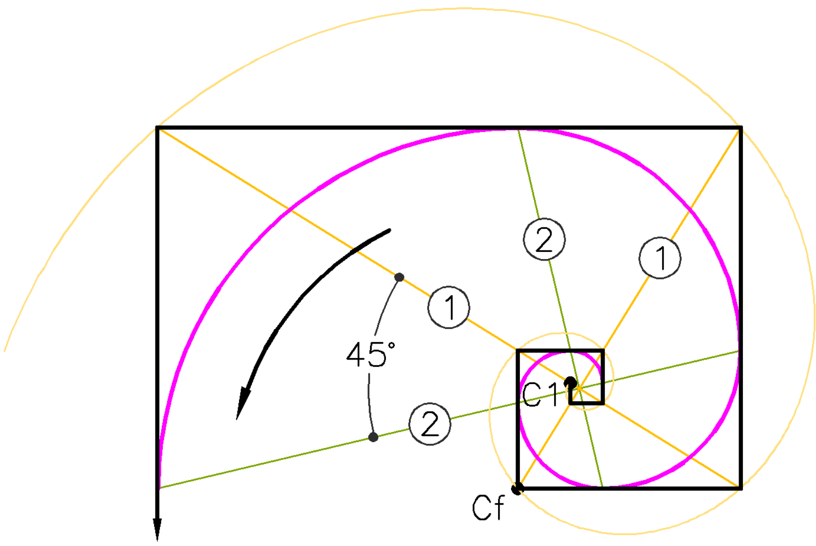
Now you can create the golden spiral, with the center in (C1) you can trace the first of the quarter circumference which will be followed by all the others whose center will be the next vertex of the polygonal in the direction of the origin.

In the following figure I have also added a golden polygonal spiral with an angular pitch (θ) equal to 1°, with the application I have created it is possible to use much smaller angular steps but it seems to me that it is already so precise enough to be taken as a golden spiral.

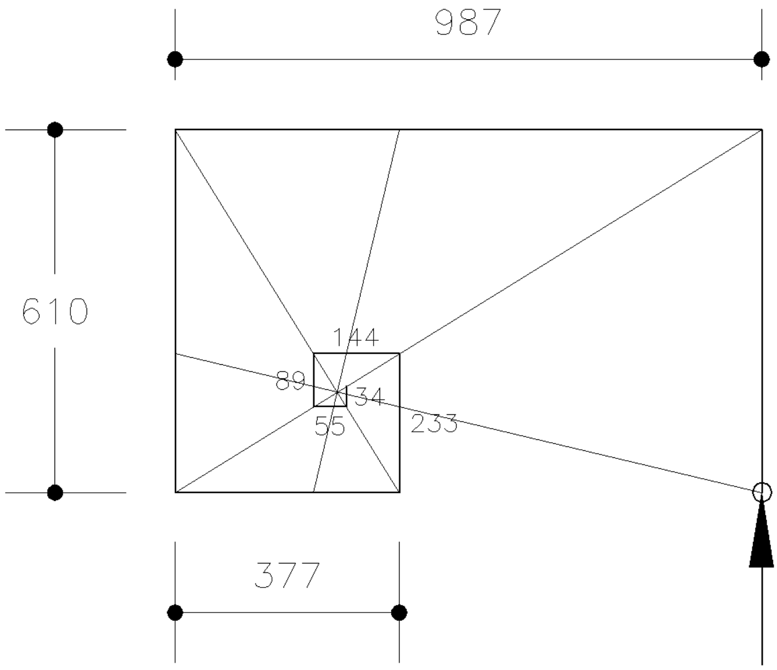
I added it to show an obvious thing, the polygonal and the spiral share a point every 90°.
Evidently the three spirals have a common origin.



Wanting to carry out the development away from the origin, the following mirror image to the previous one and with some modifications shows how to do it, the modifications concern only the position of the center of the first and last quarter of circumference and the indication of the direction of development.



Wanting to use the Fibonacci series for the relationship between the sides of the two starting rectangles, knowing that the more the series grows the more the relationship gets closer to the golden section, there is no need to exaggerate, I built the two rectangles with the measurements indicated in the following image.
I believe that the result can be considered equivalent, going to measure the ever smaller sides of the polygonal spiral with an angular pitch (θ) equal to 90°, there are values which rounded to the whole number are the decreasing ones of the Fibonacci series.



The previous articles on vixra.org are at the following address: https://vixra.org/author/dante_servi

The activities that I published on GeoGebra.org are theoretically all at the following address:

https://www.geogebra.org/search/danteservi

These are the links I believe of all those that I have published:

https://www.geogebra.org/m/vxe6ax2c
https://www.geogebra.org/m/sdrrxfzv
https://www.geogebra.org/m/cybj8ey6
https://www.geogebra.org/m/bdjhkhnj
https://www.geogebra.org/m/cvjwjdt6
https://www.geogebra.org/m/kmhccfhk
https://www.geogebra.org/m/jtnrkt3p
https://www.geogebra.org/m/m7ahjbrp
https://www.geogebra.org/m/d5gykbce
https://www.geogebra.org/m/fn24ybx7
https://www.geogebra.org/m/fqked4u3
https://www.geogebra.org/m/hddmz9zy
https://www.geogebra.org/m/h8gcpv4h
https://www.geogebra.org/m/hbmpgc6t

Dante Servi
Bressana Bottarone (PV)
dante.servi@gmail.com