Generalizing the Pythagorean and Euclidean Theorems

(German Powerpoint Slides of the GDM Online Conference 2020 with a short English Summary)

Die GDM hat Ihren Namen nicht verdient

(Powerpoint-Folien zur GDM-Online-Tagung 2020)

Martin Erik Horn

Hochschule für Technik und Wirtschaft – HTW Berlin,
University of Applied Sciences for Engineering and Economics Berlin

Background of the GDM Online Conference

Due to the coronavirus pandemic the annual meeting of the Society of Mathematics Education (GDM – Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) at Julius Maximilian University of Wuerzburg from March 9th to March 15th, 2020 has been cancelled.

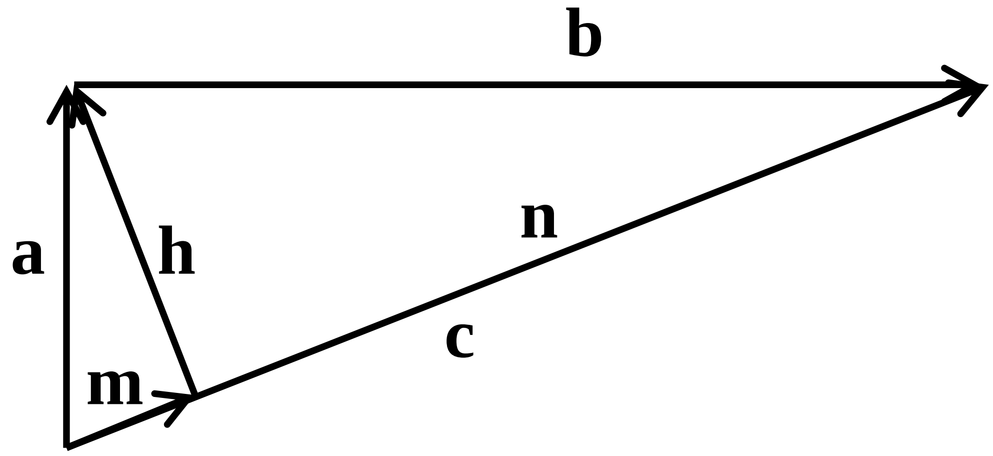
Therefore the GDM will organize an online conference from September 28th to October 2nd, 2020 instead.

More information about this conference and the actual coro-navirus situation at University of Wuerzburg can be found at:

https://2020.gdm-tagung.de

Short English Summary

A right-angled triangle has leg vectors **a**, **b**, hypotenuse vector **c**, hypotenuse segment vectors **m**, **n**, and the altitude vector **h**:



Short English Summary

If all these triangle vectors are written as linear combinations of the base units σ_x, σ_y, and σ_z of Geometric Algebra of three-dimensional space (also called Pauli Algebra), …

legs: $\mathbf{a} = a_1\,\sigma_x + a_2\,\sigma_y + a_3\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = b_1\,\sigma_x + b_2\,\sigma_y + b_3\,\sigma_z$

hypotenuse: $\mathbf{c} = c_1\,\sigma_x + c_2\,\sigma_y + c_3\,\sigma_z$

hypotenuse segments: $\mathbf{m} = m_1\,\sigma_x + m_2\,\sigma_y + m_3\,\sigma_z$

$\mathbf{n} = n_1\,\sigma_x + n_2\,\sigma_y + n_3\,\sigma_z$

altitude: $\mathbf{h} = h_1\,\sigma_x + h_2\,\sigma_y + h_3\,\sigma_z$

Short English Summary

If all these triangle vectors are written as linear combinations of the base units σ_x, σ_y, and σ_z of Geometric Algebra of three-dimensional space (also called Pauli Algebra), the following well-known relations will be satisfied:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Pythagorean Theorem: $$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$$

Euclidean Theorems: $$\mathbf{m}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2$$

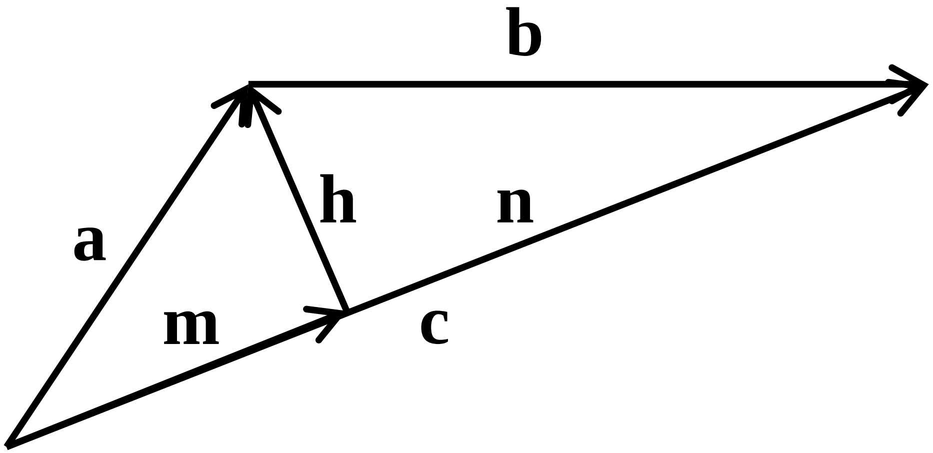
$$\mathbf{n}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2$$

$$\mathbf{m}\,\mathbf{n} = \mathbf{h}^2$$

Geometric Area: $$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c}$$

Short English Summary

A general triangle has side vectors $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, segment vectors $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, and the altitude vector $\mathbf{h}$:



Short English Summary

If all these triangle vectors are written as linear combinations of the base units σ_x, σ_y, and σ_z of Geometric Algebra of three-dimensional space (also called Pauli Algebra), …

triangle sides:

$$\mathbf{a} = a_1\,\sigma_x + a_2\,\sigma_y + a_3\,\sigma_z$$
$$\mathbf{b} = b_1\,\sigma_x + b_2\,\sigma_y + b_3\,\sigma_z$$
$$\mathbf{c} = c_1\,\sigma_x + c_2\,\sigma_y + c_3\,\sigma_z$$

segments of c:

$$\mathbf{m} = m_1\,\sigma_x + m_2\,\sigma_y + m_3\,\sigma_z$$
$$\mathbf{n} = n_1\,\sigma_x + n_2\,\sigma_y + n_3\,\sigma_z$$

altitude of c:

$$\mathbf{h} = h_1\,\sigma_x + h_2\,\sigma_y + h_3\,\sigma_z$$

Short English Summary

If all these triangle vectors are written as linear combinations of the base units σ_x, σ_y, and σ_z of Geometric Algebra of three-dimensional space (also called Pauli Algebra), the following relations will be satisfied:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Generalized Pythagorean Theorem: $$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Generalized Euclidean Theorems: $$\mathbf{m}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{n}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{m}\,\mathbf{n} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Geometric Product: $$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Short English Summary

right triangles		general triangles	
$c^2 = a^2 + b^2$		$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a \bullet b$	
$m\,c = a^2$	$n\,c = b^2$	$m\,c = a^2 + a \bullet b$	$n\,c = b^2 + a \bullet b$
$m\,n = h^2$	$a\,b = h\,c$	$m\,n = h^2 + a \bullet b$	$a\,b = h\,c + a \bullet b$

Overview of right-angled and generalized triangle theorems of Pythagoras and Euclid (Satzgruppe des Pythagoras)

GDM Conference Proceedings

There will be a short German four page paper about this online conference contribution as part of the GDM Proceedings (called BzMU 2020 in the following). It can be cited after publication as:

Martin Erik Horn: Äquivalenzumformungen in der Geometrie am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras. In: Beiträge zum Mathematikunterricht – BzMU 2020. WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster.

DPG Conference Proceedings

And it is planned to submit a longer English version of this paper with the title:

Martin Erik Horn: Equivalence Operations in Geometry Illuatrated by the Pythagorean and Euclidean Theorems.

to the physics education online journal PhyDid B as supplementary material to the following paper:

Martin Erik Horn: Die komplexe Konjugation aus physikalischer Sicht. Beiträge zur Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik der DPG in Bonn 2020. In: PhyDid B, Beitrag DD 16.5.

DPG Conference Proceedings

Hopefully all this will be published after a successful fight against the coronavirus pandemic. These papers will then be found at the internet pages of PhyDid B at:

www.phydid.de

Start of
German Powerpoint
Slides

German Abstract

Äquivalenzumformungen von Gleichungen, deren Variablen zahlenartig (also durch Skalare) belegt sind, stellen einen Grundpfeiler der modernen Algebra dar. Im Vortrag wird am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras gezeigt, wie Äquivalenzumformungen einen ebenso festen Pfeiler der Geometrie bilden können.

Dazu wird die Beschränkung auf zahlenartige Größen aufgehoben und eine Belegung von Variablen durch Vektoren, durch (orientierte) Flächenstücke oder durch andere geometrische Größen zugelassen. Die so entstehende Geometrische Algebra wird vorgestellt und diskutiert.

Ursprünglich geplant für Di, 10. März 2020, 16:00 h - 16:35 h, VG 0.05, jetzt: **Online-Tagung 28. September 2020 – 2. Oktober 2020**

Äquivalenzumformungen in der Geometrie

am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras

Martin Erik Horn

Hochschule für Technik und Wirtschaft – HTW Berlin,
University of Applied Sciences for Engineering and Economics Berlin

BzMU 2020

Entgegen dem meist progressiven Selbstbild vieler Mathematikerinnen und Mathematiker handelt es sich bei der Mathematik auf lange Sicht um eine äußerst konservative, das Alte suchende und bewahrende, Neues zurückweisende, strikt rückwärtsgewandte und zutiefst erstarrte Wissenschaft. Es hat den Anschein, dass die Geschichte der Mathematik die allermeiste Zeit von Stagnation geprägt ist.

BzMU 2020

So steht am Anfang der Babylonischen Mathematik ein revolutionärer Aufbruch zu Zeiten Hammurabis. Die dort gestaltete Mathematik wurde Derbyshire und Conway zufolge über die folgenden Jahrtausende ohne signifikante inhaltliche Weiterentwicklung an nachfolgende Generationen weitergegeben. Das gleiche gilt für Ägypten: „Wir haben keinen Grund annehmen zu können, dass die ägyptische Mathematik zwischen dem 16. Jahrhundert und dem 4. Jahrhundert vor unserer Zeit irgendeinen erwähnenswerten Fortschritt gemacht hat.“

John Derbyshire: Unknown Quantity. A Real and Imaginary History of Algebra. Joseph Henry Press, Washington, DC 2006.

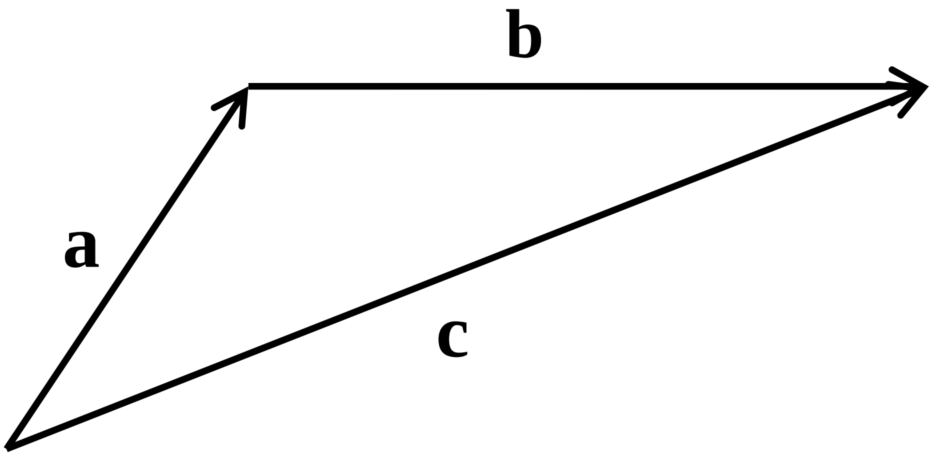
So steht am Anfang der … schen Mathematik ein revolutionärer Aufbruch zu Zei… Hammurabis. Die dort gestaltete Mathematik wurde Derbyshire und Conway zufolge über die folgenden Jahrtausende ohne signifikante inhaltliche Weiterentwicklung an nachfolgende Generationen weitergegeben. Das gleiche gilt für Ägypten: „Wir haben keinen Grund annehmen zu können, dass die ägyptische Mathematik zwischen dem 16. Jahrhundert und dem 4. Jahrhundert vor unserer Zeit irgendeinen erwähnenswerten Fortschritt gemacht hat.“

BzMU 2020

In ähnlicher Weise konservativ einschränkend gehen wir mit den revolutionären Einsichten der Gruppe um Diophantus, dem „Vater der Algebra“, um, die um die Zeitenwende Variablenschreibweise, sowie Term- und Äquivalenzumformungen hervorbrachten. Seit nunmehr zweitausend Jahren stehen Äquivalenzumformungen fest im mathematischen Zentrum der Algebra. Ohne Äquivalenzumformungen können wir uns algebraische Darstellungen nicht mehr vorstellen.

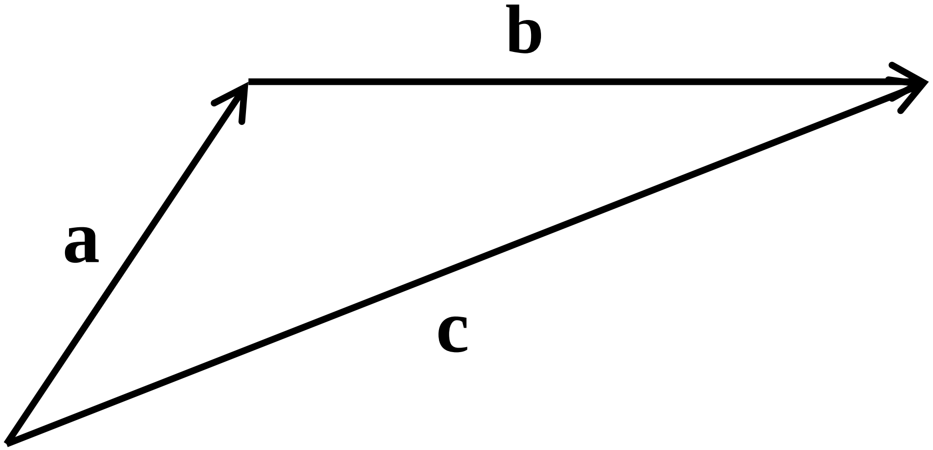
BzMU 2020

Gleichzeitig weigern wir uns, diese herausragende Stellung von Äquivalenzumformungen auch in der Geometrie zu durchdenken. Es ist geradezu verstörend, wie fixiert wir einfachste Umformungen geometrischer Sachverhalte ablehnend zurückweisen.



$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\Rightarrow \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$



$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Vorschnelle Vereinfachung

»Premature optimization is the root of all evil.«

Donald E. Knuth

*Vorschnelle **Vereinfachung***

→ Verzicht auf das Rechnung mit Vektoren
→ Beschränkung auf Skalare $a^2 + b^2 = c^2$

»Premature optimization is the root of all evil.«

Donald E. Knuth

BzMU 2020

Wenn **a + b = c** gilt, dann hat auch $\mathbf{(a + b)^2 = c^2}$ zu gelten, immer und uneingeschränkt.

Leistet ein mathematisches System dies nicht, so ist es nutzlos und zwingend zu verwerfen.

BzMU 2020

Wenn **a + b = c** gilt, dann hat auch $\mathbf{(a + b)^2 = c^2}$ zu gelten, immer und uneingeschränkt.

Leistet ein mathematisches System dies nicht, so ist es nutzlos und zwingend zu verwerfen.

Bitte keine vorschnelle Vereinfachung!

BzMU 2020

Wenn $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ gilt, dann hat auch $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$ zu gelten, immer und uneingeschränkt.

Leistet ein mathematisches System dies nicht, so ist es nutzlos und zwingend zu verwerfen.

Dies sind keine Skalare (normal gedruckt):

$$(a + b)^2 \neq c^2$$

Hier stehen Vektoren (**fett gedruckt**):

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

BzMU 2020

Werden nun die beiden Katheten **a** und **b**, deren Summe der Hypotenuse **c** eines rechtwinkligen Dreiecks entspricht, quadriert, so erhalten wir genau dann den Satz des Pythagoras $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$, wenn die beiden senkrecht zueinander stehenden Katheten $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}$ anti-kommutativ vertauschen – eine algebraische Beziehung, die für senkrecht zueinander stehende Vektoren seit Grassmann (siehe Ausdehnungslehre 1844) bekannt ist, und die immer wieder von Mathematikerinnen und Mathematikern beim Versuch, Altes und Überholtes zu bewahren, übergangen wird.

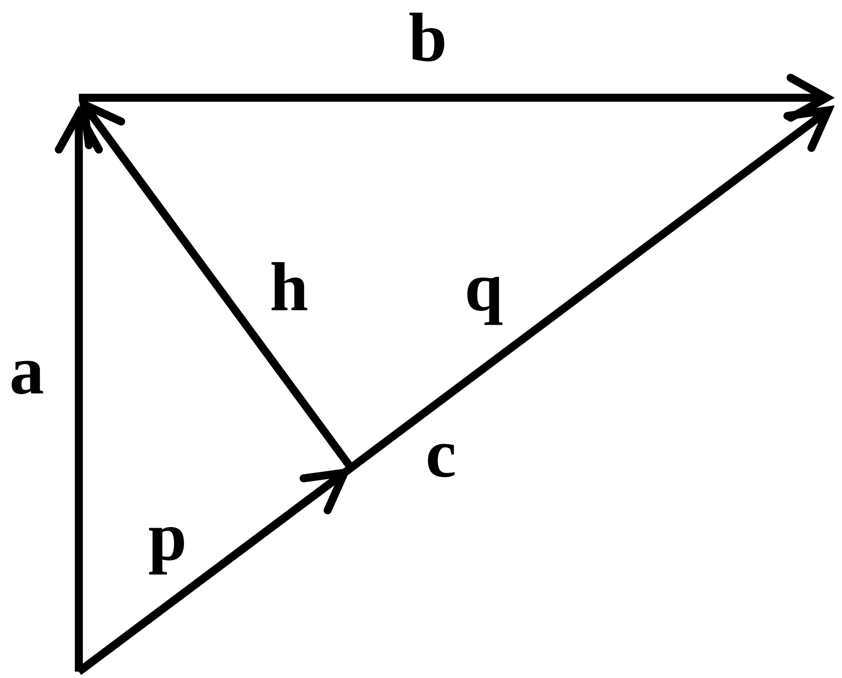
BzMU 2020

Seit nun 175 Jahren wehren sich die traditionelle Schul- und Hochschulmathematik mit Händen und Füßen (und die Mathematikdidaktik mit noch allerhand mehr), die Vektorrechnung auf eine konsistente, Grassmann berücksichtigende Grundlage zu stellen. Gian-Carlo Rota (1997) kommentiert diese geradezu groteske Rückständigkeit mit den Worten: „Die Vernachlässigung der äußeren Algebra ist die mathematische Tragödie dieses Jahrhunderts. (…) In der Zwischenzeit müssen wir uns mit Mathematikern herumschlagen, die bezüglich der äußeren Algebra blind sind.“

Gian-Carlo Rota: Indiscrete Thoughts. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin 1997, Reprint Springer/Birkhäuser 2008.

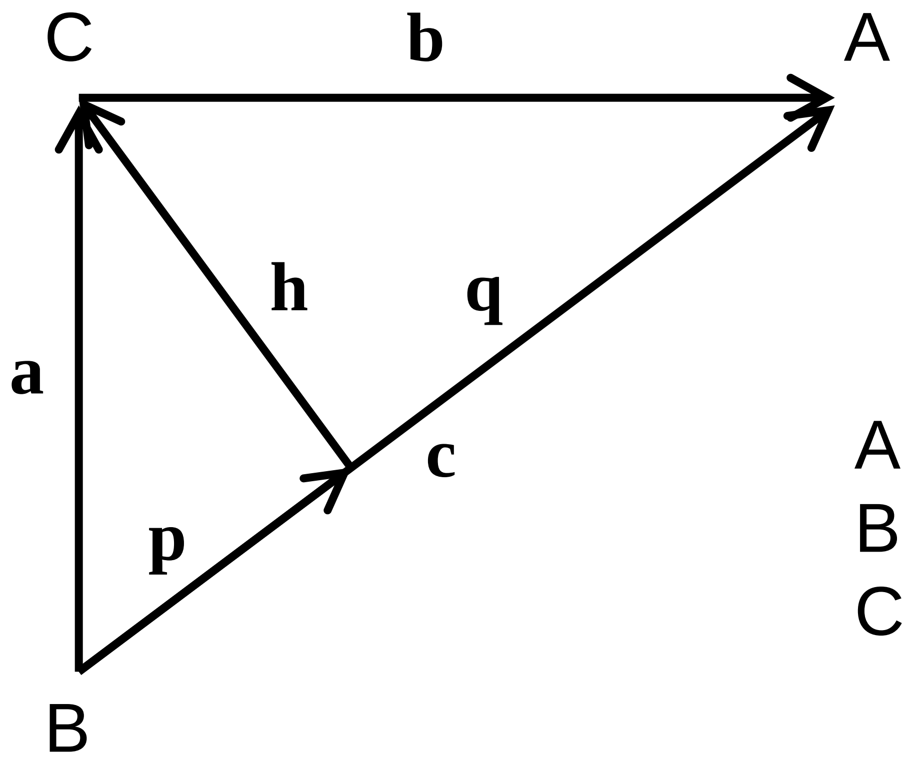
Seit nun 175 Jahren we[illegible]ie traditionelle Schul- und Hochschulmathematik mit [illegible]en und Füßen (und die Mathematikdidaktik mit noch an[illegible]and mehr), die Vektorrechnung auf eine konsistente, Grassmann berücksichtigende Grundlage zu stellen. Gian-Carlo Rota (1997) kommentiert diese geradezu groteske Rückständigkeit mit den Worten: „Die Vernachlässigung der äußeren Algebra ist die mathematische Tragödie dieses Jahrhunderts. (…) In der Zwischenzeit müssen wir uns mit Mathematikern herumschlagen, die bezüglich der äußeren Algebra blind sind.“

Beispielrechung



Rechtwinkliges Dreieck

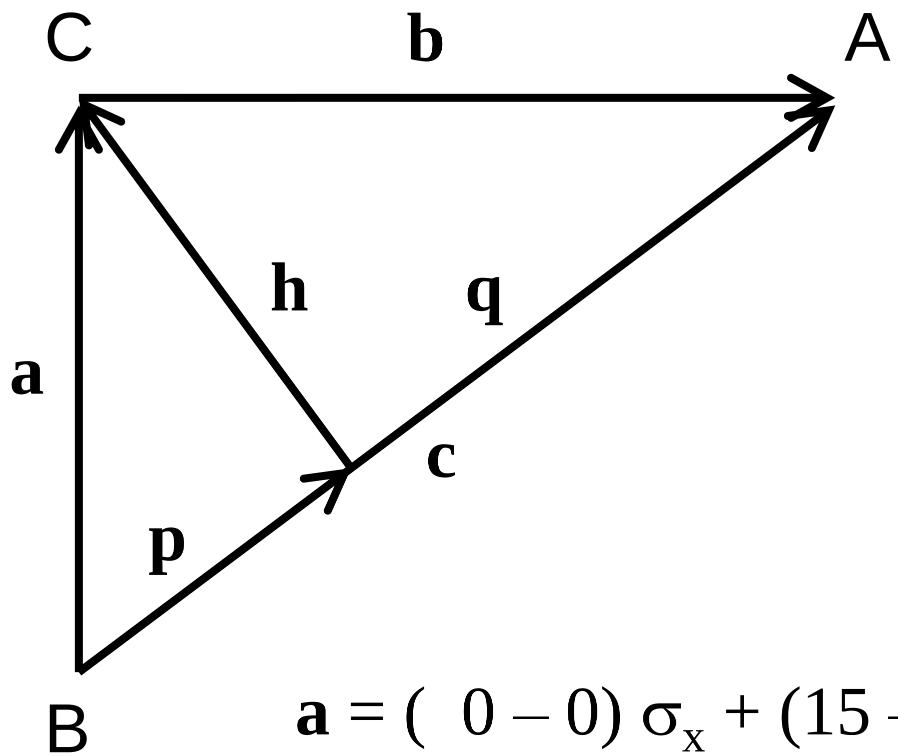
Beispielrechung



A (20; 15)
B (0; 0)
C (0; 15)

Rechtwinkliges Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C.

⇒ Schreibweise der Geometrischen Algebra

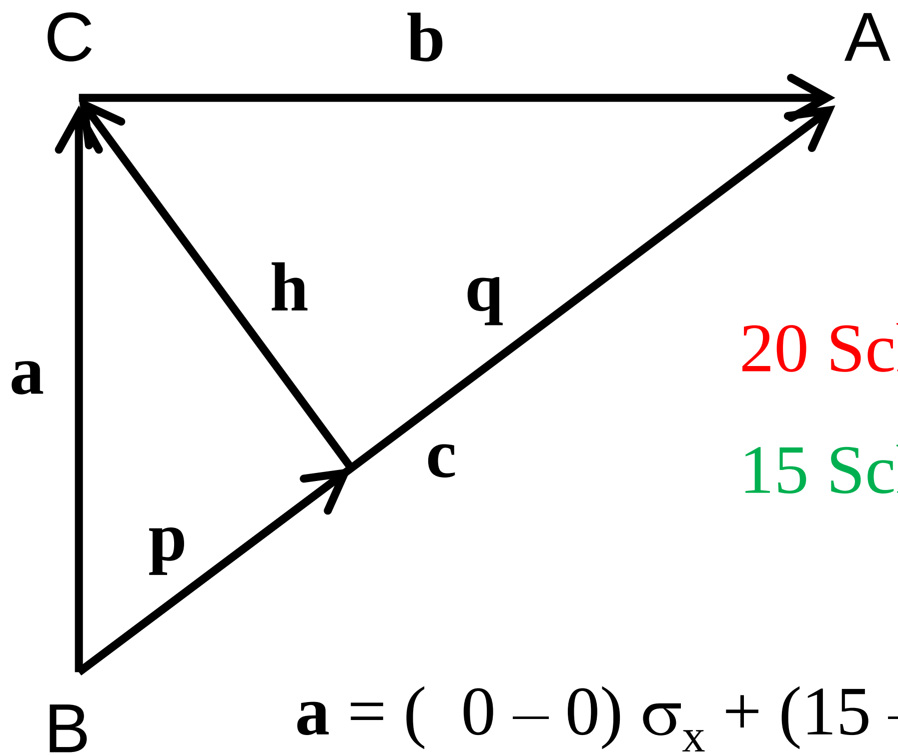


$\mathbf{a} = (\ \ 0 - 0)\ \sigma_x + (15 - \ \ 0)\ \sigma_y = 15\ \sigma_y$

$\mathbf{b} = (20 - 0)\ \sigma_x + (15 - 15)\ \sigma_y = 20\ \sigma_x$

$\mathbf{c} = (20 - 0)\ \sigma_x + (15 - \ \ 0)\ \sigma_y = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

$\Rightarrow$ Schreibweise der Geometrischen Algebra



20 Schritte in x-Richtung

15 Schritte in y-Richtung

$$\mathbf{a} = (\ \ 0 - 0)\,\sigma_x + (15 - \ \ 0)\,\sigma_y = 15\,\sigma_y$$
$$\mathbf{b} = (20 - 0)\,\sigma_x + (15 - 15)\,\sigma_y = 20\,\sigma_x$$
$$\mathbf{c} = (20 - 0)\,\sigma_x + (15 - \ \ 0)\,\sigma_y = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y$$

Geometrische Algebra

$\mathbf{a} = 15\ \sigma_y$ 15 Schritte in y-Richtung

$\mathbf{b} = 20\ \sigma_x$ 20 Schritte in x-Richtung

$\mathbf{c} = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

Diese Schritte werden in der Physik auch als Pauli-Matrizen bezeichnet.
In der Mathematik nennt man sie Basisvektoren.

$\Rightarrow$ Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren des dreidimensionalen, Euklidischen Raums.

Geometrische Algebra

$\mathbf{a} = 15\ \sigma_y$ 15 Schritte in y-Richtung

$\mathbf{b} = 20\ \sigma_x$ 20 Schritte in x-Richtung

$\mathbf{c} = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

Basisvektoren sind Einheitsvektoren. Sie quadrieren somit zu Eins:

$\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = 1$ im zweidimensionalen Raum

$\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = \sigma_z{}^2 = 1$ im dreidimensionalen Raum

Geometrische Algebra

$\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = \sigma_z{}^2 = 1$ (Normierung)

Auch der Vektor $\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)$ ist ein Einheits-

vektor. Er muss ebenfalls zu Eins quadrieren:

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_x{}^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x + \sigma_y{}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x + 1) = 1 + \frac{1}{2}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) = \mathbf{1}$$

Geometrische Algebra

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$ (Normierung)

$$1 + \frac{1}{2}\underbrace{(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)}_{\text{muss somit Null sein:}} = 1$$

muss somit Null sein: $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0$

bzw: $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x$

$\Rightarrow$ Die Orthogonalität der beiden Basisvektoren σ_x und σ_y wird algebraisch durch deren Anti-Kommutativität ausgedrückt.

Geometrische Algebra: Zusammenfassung

Normierung: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$

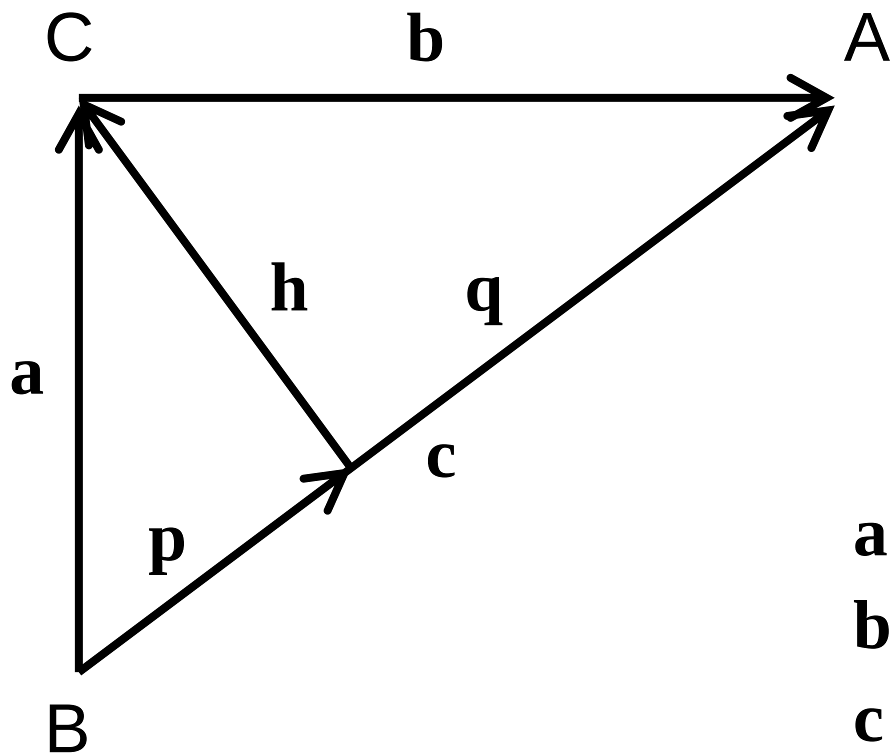
Vertauschungsrelationen/Anti-Kommutativität:

$\sigma_x\sigma_y = -\,\sigma_y\sigma_x$ im zweidimensionalen Raum

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\sigma_y &= -\,\sigma_y\sigma_x\\ \sigma_y\sigma_z &= -\,\sigma_z\sigma_y\\ \sigma_z\sigma_x &= -\,\sigma_x\sigma_z\end{aligned}\right\}\quad \text{im dreidimensionalen Raum}$$

$\Rightarrow$ Diese Grundbeziehungen der Geometrischen Algebra wurden bereits durch Grassmann (1844) in seiner Ausdehnungslehre beschrieben.
Dennoch werden sie heute Pauli-Algebra genannt.

Zurück zum Beispiel:



$\mathbf{a} = 15\ \sigma_y$

$\mathbf{b} = 20\ \sigma_x$

$\mathbf{c} = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

Zurück zum Beispiel:

$$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = (15\,\sigma_y)^2 = 225\,\overset{\overset{1}{\downarrow}}{\sigma_y{}^2} = 225$$

$$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad\qquad\qquad \mathbf{b}^2 = (20\,\sigma_x)^2 = 400\,\sigma_x{}^2 = 400$$

$$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y$$

Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= (15\,\sigma_y + 20\,\sigma_x)^2 = \mathbf{c}^2 \\
&= (15\,\sigma_y + 20\,\sigma_x)\,(15\,\sigma_y + 20\,\sigma_x) \\
&= 225\,\sigma_y{}^2 + 300\,\sigma_x\sigma_y + 300\,\sigma_y\sigma_x + 400\,\sigma_x{}^2 \\
&= 225 \qquad + 300\,\sigma_x\sigma_y - 300\,\sigma_x\sigma_y + 400 \\
&= 225 + 400 \qquad\qquad = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \\
&= 625 \qquad\qquad\qquad\; = \mathbf{c}^2
\end{aligned}$$

Weiter mit BzMU 2020 $\rightarrow$ Höhensatz

Während senkrecht zueinander stehende Vektoren antikommutativ vertauschen, sind parallel liegende Vektoren bezüglich der Multiplikation kommutativ. Für die Hypotenusen-Teilvektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$, die parallel zueinander und parallel zu $\mathbf{c}$ liegen (siehe Abbildung der vorletzten Folie), gilt deshalb

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}\,\mathbf{p}$$

Weiter mit BzMU 2020 $\rightarrow$ Höhensatz

Zusammen mit den Pythagoreischen Beziehungen für die kleineren Teildreiecke

$$(\mathbf{p} + \mathbf{h})^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{h}^2 = \mathbf{a}^2 \quad \text{und} \quad (\mathbf{q} - \mathbf{h})^2 = \mathbf{q}^2 + \mathbf{h}^2 = \mathbf{b}^2$$

kann der Höhensatz in der üblichen Form durch Quadratur der aus **p** und **q** zusammengesetzten Hypotenuse $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2$ aufgefunden werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2 &= \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathbf{p} + \mathbf{q}^2 \\ &= \mathbf{a}^2 - \mathbf{h}^2 + 2\,\mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{b}^2 - \mathbf{h}^2 \\ &= \mathbf{c}^2 - 2\,\mathbf{h}^2 + 2\,\mathbf{p}\,\mathbf{q} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{h}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} \end{aligned}$$

(nach Streichung von $\mathbf{c}^2$)

Weiter mit BzMU 2020 $\rightarrow$ Kathetensätze

Da die Kathetensätze letztendlich nur geringfügig modifizierte Höhensätze darstellen, können diese anschließend durch Addition von $\mathbf{p}^2$ bzw. $\mathbf{q}^2$

durch $\quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\,(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{p}\,\mathbf{c}$

sowie $\quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})\,\mathbf{q} = \mathbf{c}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}\,\mathbf{c}$

aus dem Höhensatz generiert werden.

Weiter mit BzMU 2020 $\rightarrow$ Flächensatz

Die hier betrachteten Quadrate von Vektoren bzw. Produkte parallel liegender Vektoren bilden Skalare. Diese unterscheiden sich konzeptionell grundlegend von Produkten senkrecht stehender Vektoren, die flächenartige Größen ergeben.

Die Satzgruppe des Pythagoras sollte deshalb um die als Flächensatz zu deutende Beziehung

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c}$$

ergänzt werden, die durch einen Flächenvergleich motiviert ist.

Einschub:
Geometrische Interpretation der Basisgrößen der 3d Geometrischen Algebra (Pauli-Algebra)

σ_x, σ_y und σ_z sind Basisvektoren.

Sie repräsentieren orientierte Längenstücke der Länge 1.

$\sigma_x\sigma_y$, $\sigma_y\sigma_z$ und $\sigma_z\sigma_x$ sind Basis-Bivektoren.

Sie repräsentieren orientierte Flächenelemente mit einem Flächeninhalt von 1.

$\sigma_x\sigma_y\sigma_z$ ist ein Basis-Trivektor.

Er repräsentiert ein orientiertes Volumenelement mit einem Rauminhalt von 1.

Weiter mit BzMU 2020 → Weitere Umformungen

Anders als in konventionell geprägten Ansätzen, in denen immer nur Streckenlängen und damit Skalare a, b, c, p, q, h diskutiert und durch mathematische Beziehungen zueinander in Relation gesetzt werden, wird hier mit vektoriellen Größen und damit mit orientierten Linienelementen bzw. orientierten Längenstücken **a**, **b**, **c**, **p**, **q**, **h** (deutlich fett gedruckt) gerechnet.

Weiter mit BzMU 2020 → Weitere Umformungen

Alle diese Gleichungen lassen sich durch Äquivalenzumformungen umgestalten, wobei selbstverständlich auch durch Vektoren dividiert werden kann (Hestenes 2003, Gl. 23). Dazu ist lediglich notwendig, inverse Vektoren wie beispielsweise

$$\mathbf{c}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \mathbf{c}/\mathbf{c}^2$$

seitenkorrekt anzumultiplizieren. Die Kathetensätze, der Höhensatz oder der Flächensatz können auf diese Art und Weise (siehe folgende Beispiele) umgeformt und nach gesuchten vektoriellen Größen aufgelöst werden.

Weiter mit BzMU 2020 → Weitere Umformungen

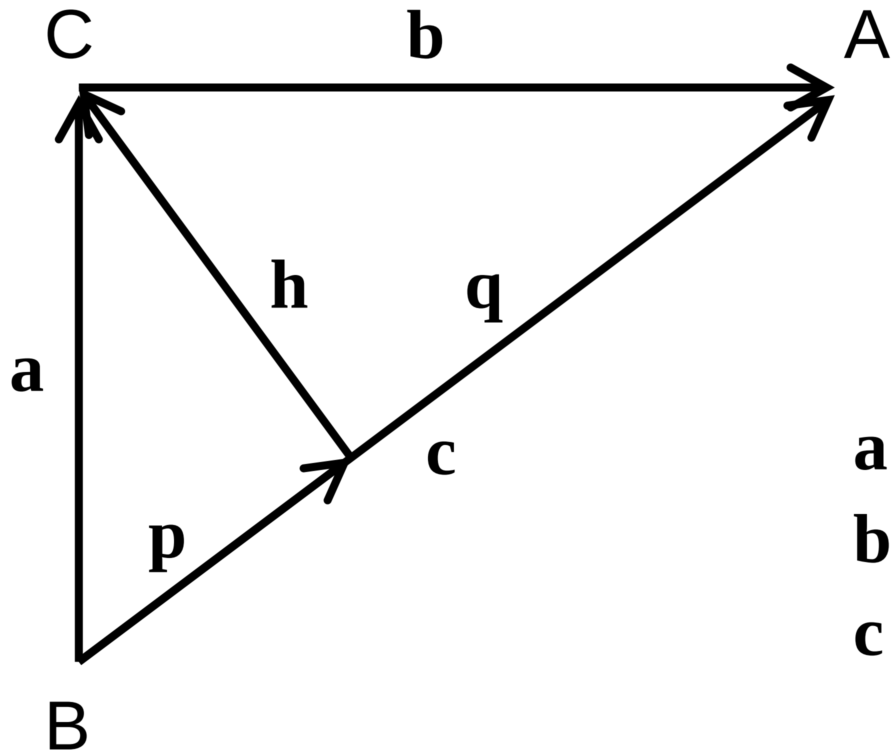
Alle diese Gleichungen lassen sich durch Äquivalenzumformungen umgestalten, wobei selbstverständlich auch durch Vektoren dividiert werden kann (Hestenes 2003, Gl. 23). Dazu ist lediglich notwendig inverse Vektoren wie beispielsweise

$$\mathbf{c}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} = \mathbf{c}/$$

David Hestenes: Oersted Medal Lecture 2002 – Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2 (2003), S. 104 – 121.

ze, der
se Art
t und
den.

Beispielaufgabe:
Wie lautet der Vektor der Teilhypothenuse $\mathbf{p}$?



$\mathbf{a} = 15\ \sigma_y$

$\mathbf{b} = 20\ \sigma_x$

$\mathbf{c} = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

Wie lautet der Vektor der Teilhypothenuse $\mathbf{p}$?

$$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = 225$$

$$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad \qquad \mathbf{b}^2 = 400$$

$$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Kathetensatz:

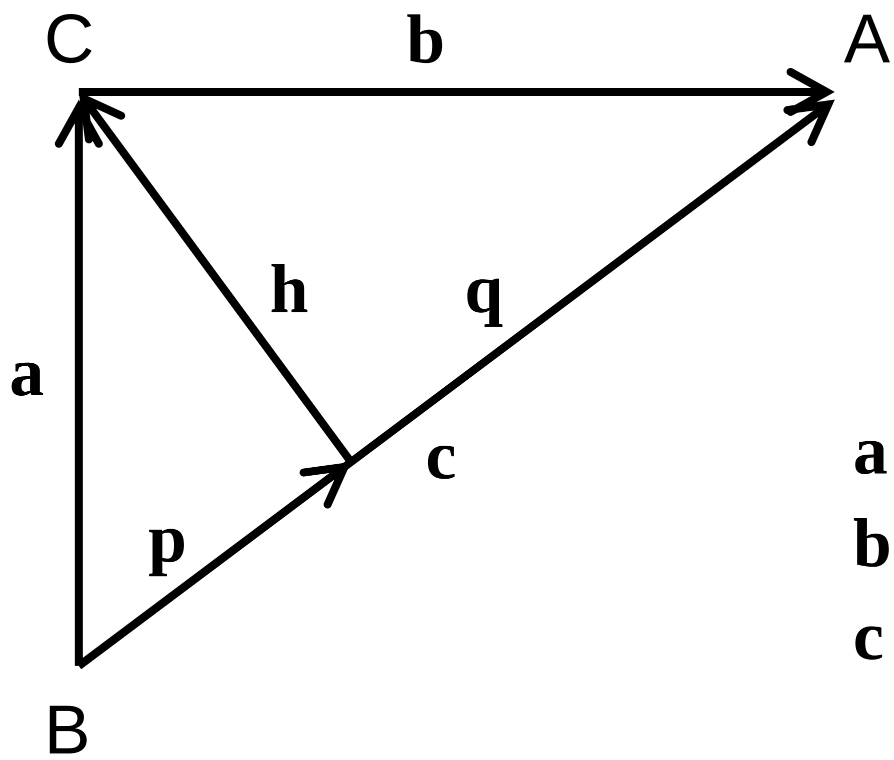
$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p} = \mathbf{a}^2\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}^2\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

$$= \frac{225}{625}\,(20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y)$$

$$= 7{,}2\,\sigma_x + 5{,}4\,\sigma_y$$

Längenprobe: $$p = \frac{a^2}{c} = \frac{15^2}{25} = 9 = \sqrt{7{,}2^2 + 5{,}4^2}$$

Beispielaufgabe:
Wie lautet der Vektor der Teilhypothenuse $\mathbf{q}$?



$\mathbf{a} = 15\ \sigma_y$

$\mathbf{b} = 20\ \sigma_x$

$\mathbf{c} = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

Wie lautet der Vektor der Teilhypothenuse $\mathbf{q}$?

$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = 225$

$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad \mathbf{b}^2 = 400$

$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad \mathbf{c}^2 = 625$

Kathetensatz:

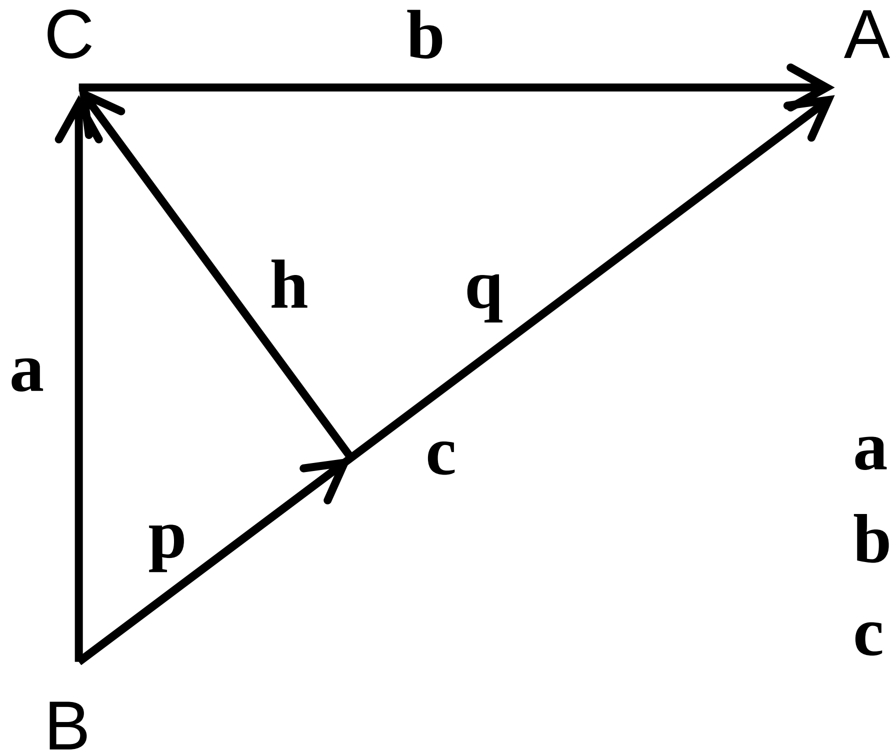
$$\mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{b}^2\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{b}^2\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

$$= \frac{400}{625}(20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y)$$

$$= 12{,}8\,\sigma_x + 9{,}6\,\sigma_y$$

Längenprobe: $\quad q = \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{20^2}{25} = 16 = \sqrt{12{,}8^2 + 9{,}6^2}$

Beispielaufgabe:
Wie lautet der Höhenvektor **h**?



$\mathbf{a} = 15\ \sigma_y$

$\mathbf{b} = 20\ \sigma_x$

$\mathbf{c} = 20\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$

Wie lautet der Höhenvektor $\mathbf{h}$?

$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = 225$

$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad\qquad\quad \mathbf{b}^2 = 400$

$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad \mathbf{c}^2 = 625$

Höhensatz:

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{h} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (15\,\sigma_y)\,(20\,\sigma_x) = -\,300\,\sigma_x\sigma_y$$

Das durch die Katheten **a** und **b** aufgespannte Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von 300 Flächeneinheiten.

Wie lautet der Höhenvektor **h**?

$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = 225$

$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad\qquad \mathbf{b}^2 = 400$

$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad \mathbf{c}^2 = 625$

Höhensatz:

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (15\,\sigma_y)\,(20\,\sigma_x) = -\,300\,\sigma_x\sigma_y$$

Das durch die Katheten **a** und **b** aufgespannte rechtwinklige Dreieck besitzt einen Flächeninhalt von ½ · 300 = 150 Flächeneinheiten.

Wie lautet der Höhenvektor $\mathbf{h}$?

$$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = 225$$

$$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad \mathbf{b}^2 = 400$$

$$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Höhensatz:

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{h} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (15\,\sigma_y)\,(20\,\sigma_x) = -\,300\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} &= -\,300\,\sigma_x\sigma_y\,(20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y) \\
&= -\,6000\,\sigma_x\sigma_y\sigma_x - 4500\,\sigma_x\sigma_y\sigma_y \\
&= -\,4500\,\sigma_x + 6000\,\sigma_y
\end{aligned}$$

Wie lautet der Höhenvektor $\mathbf{h}$?

$$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = 225$$

$$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad\qquad \mathbf{b}^2 = 400$$

$$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad\qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Höhensatz:

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{h} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

$$= \frac{1}{625}\,(-\,4500\,\sigma_x + 6000\,\sigma_y)$$

$$= -\,7{,}2\,\sigma_x + 9{,}6\,\sigma_y$$

Probe: $\mathbf{h} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = 15\,\sigma_y - (7{,}2\,\sigma_x + 5{,}4\,\sigma_y)$

$$= -\,7{,}2\,\sigma_x + 9{,}6\,\sigma_y$$

Wie lautet der Höhenvektor $\mathbf{h}$?

$$\mathbf{a} = 15\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = 225$$
$$\mathbf{b} = 20\,\sigma_x \qquad\qquad \mathbf{b}^2 = 400$$
$$\mathbf{c} = 20\,\sigma_x + 15\,\sigma_y \qquad\qquad \mathbf{c}^2 = 625$$

Höhensatz:

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{h} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$
$$= \frac{1}{625}\,(-\,4500\,\sigma_x + 6000\,\sigma_y)$$
$$= -\,7{,}2\,\sigma_x + 9{,}6\,\sigma_y$$

weitere

Probe: $\mathbf{h} = \mathbf{q} - \mathbf{b} = 12{,}8\,\sigma_x + 9{,}6\,\sigma_y - 20\,\sigma_x$

$$= -\,7{,}2\,\sigma_x + 9{,}6\,\sigma_y$$

Weiter mit BzMU 2020
→ Die verallgemeinerte Satzgruppe des Phythagoras

Bei beliebigen Dreiecken, deren Seiten keine rechten Winkel einschließen, können die durch Quadratur ermittelten Beziehungen mit Hilfe des inneren Produkts…

David Hestenes: Oersted Medal Lecture 2002 – Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2 (2003), S. 107:

My next task is to elucidate the geometrical meaning of vector multiplication. From the geometric product $\mathbf{ab}$, we can define two new products, a symmetric *inner product*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \tag{5}$$

and an antisymmetric *outer product*

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba}) = -\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}. \tag{6}$$

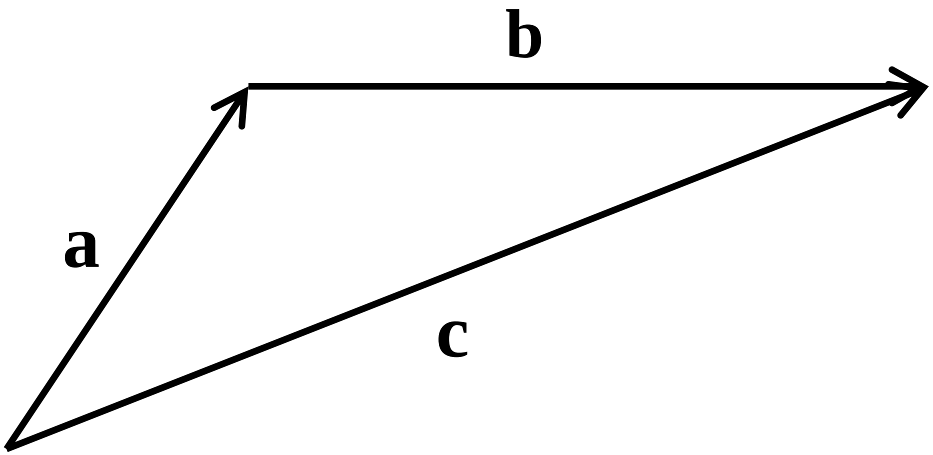
Therefore, the geometric product has the *canonical decomposition*

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}. \tag{7}$$

From the contraction rule (4), it is easy to prove that $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ is scalar-valued, so it can be identified with the standard Euclidean inner product.

Weiter mit BzMU 2020
→ Die verallgemeinerte Satzgruppe des Phythagoras

Bei beliebigen Dreiecken, deren Seiten keine rechten Winkel einschließen, können die durch Quadratur ermittelten Beziehungen mit Hilfe des inneren Produkts und damit unter Bezug auf den Kosinus des eingeschlossenen Winkels $2\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} = 2\mathbf{a}\mathbf{b}\cos\gamma$ ausgedrückt werden. Auch dies ist wieder eine logische Folge konsequenter Äquivalenzumformung geometrisch motivierter Größen, die auf die folgenden verallgemeinerten Pythagoreischen Formeln führt.



Für beliebige nicht-rechtwinklige Dreiecke gilt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Für beliebige nicht-rechtwinklige Dreiecke gilt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$$

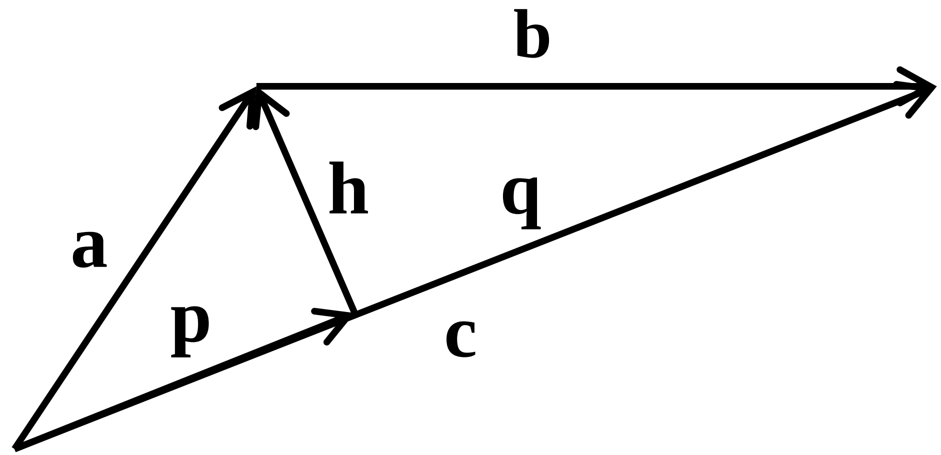
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = \mathbf{c}^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{c}^2}$$

Verallgemeinerter Satz des Pythagoras



Für beliebige nicht-rechtwinklige Dreiecke gilt:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{c}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 = \mathbf{c}^2$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})\,(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathbf{p} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

Da **p** und **q** parallel sind, ist ihr Produkt kommutativ:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}\,\mathbf{p}$$

Also folgt aus $\quad \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}\,\mathbf{p} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$

$$\mathbf{p}^2 + 2\,\mathbf{p}\,\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{c}^2$$

$\Rightarrow \qquad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$

Außerdem ist bekannt:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{q}^2$$

Da **p** und **q** parallel sind, ist ihr Produkt kommutativ:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}\,\mathbf{p}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{p}\,\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{c}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2)$$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{q}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})$$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}\,(2\,\mathbf{h}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}$$

Verallgemeinerter Höhensatz

Nächste Umformungsfolge:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{p}^2$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,(\mathbf{q} + \mathbf{p}) - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{p}\,\mathbf{c} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Verallgemeinerter Kathetensatz

Nächste Umformungsfolge:

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{p\,q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{q}^2$$

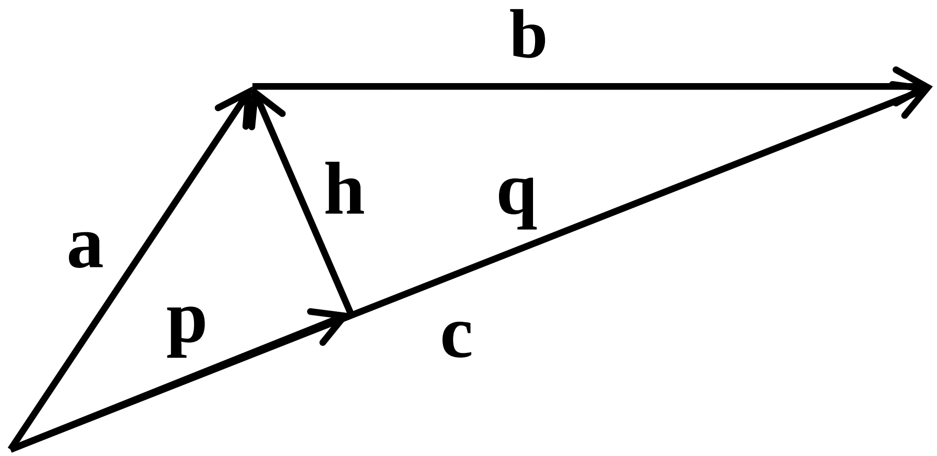
$$\mathbf{b}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})\,\mathbf{q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{c\,q} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{q\,c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}$$

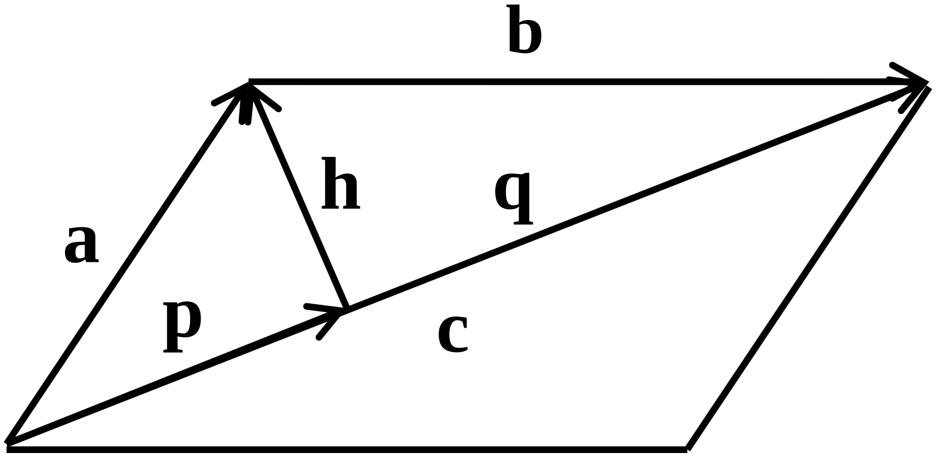
Verallgemeinerter Kathetensatz



Kanonische Zerlegung des Geometrischen Produkts:

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

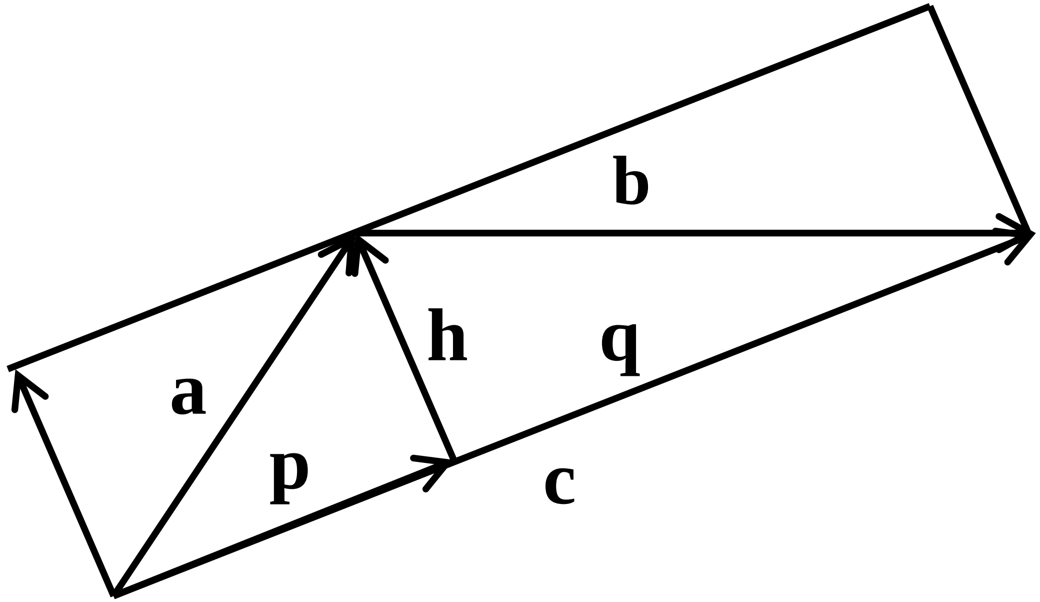
(siehe Hestenes 2003)



Kanonische Zerlegung des Geometrischen Produkts:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Die Fläche des durch **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ …



Kanonische Zerlegung des Geometrischen Produkts:

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Die Fläche des durch **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ entspricht der Fläche des von **h** und **c** aufgespannten Rechtecks $\mathbf{h} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{h\,c}$.

Kanonische Zerlegung des Geometrischen Produkts:

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Flächengleichheit: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{h\,c}$

$\Rightarrow$ $$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{h\,c}$$

$$\boxed{\mathbf{a\,b} = \mathbf{h\,c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}$$

Verallgemeinerter Flächensatz

BzMU 2020 → Zusammenfassung

Rechtwinklige Dreiecke		Dreiecke beliebiger Winkel	
$c^2 = a^2 + b^2$		$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a \bullet b$	
$p\,c = a^2$	$q\,c = b^2$	$p\,c = a^2 + a \bullet b$	$q\,c = b^2 + a \bullet b$
$p\,q = h^2$	$a\,b = h\,c$	$p\,q = h^2 + a \bullet b$	$a\,b = h\,c + a \bullet b$

Übersicht über die Verallgemeinerung der Satzgruppe des Pythagoras

Hausaufgabe:

Überprüfen sie bitte die fünf verallgemeinerten Pythagoreischen Beziehungen durch simples Aus- bzw. Nachrechnen, indem Sie bei einem beliebigen Dreieck (mit gegebenen Eckpunkten)

- zuerst die Seitenvektoren **a**, **b**, **c** aufstellen,
- den verallgemeinerten Satz des Pythagoras nachrechnen,
- dann mit Hilfe der beiden verallgemeinerten Kathetensätze die beiden Teil-Vektoren **p** und **q** berechnen,
- und mit Hilfe des verallgemeinerten Flächensatzes den Höhenvektor **h** bestimmen,
- sowie zum Schluss den verallgemeinerten Höhensatz nachrechnen.

Hausaufgabe: Bitte würfeln

Das ist das Gute an Online-Tagungen: Sie sitzen zu Hause und dürfen die Hausaufgabe gleich erledigen.

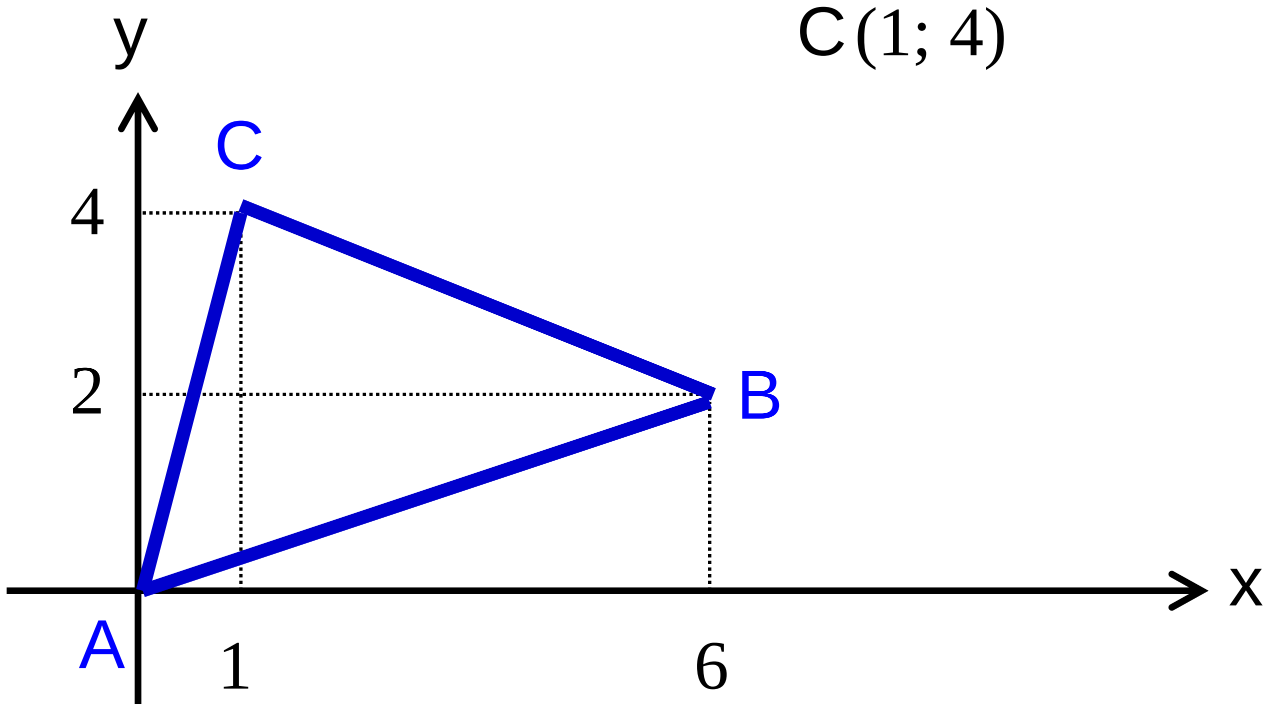
Um ein beliebiges, möglichst nicht-rechtwinkliges Dreieck zu generieren, starten Sie der Einfachheit halber mit einem Punkt A im Ursprung: $A(0; 0)$

Die Koordinaten der beiden anderen Eckpunkte Ihres Dreiecks würfeln Sie bitte aus. (Sie erhalten dann beispielsweise die Zahlen 6, 2, 1, 4.)

Mit diesem ausgewürfelten Dreieck überprüfen Sie bitte die fünf verallgemeinerten Pythagoreischen Beziehungen durch simples Aus- bzw. Nachrechnen.

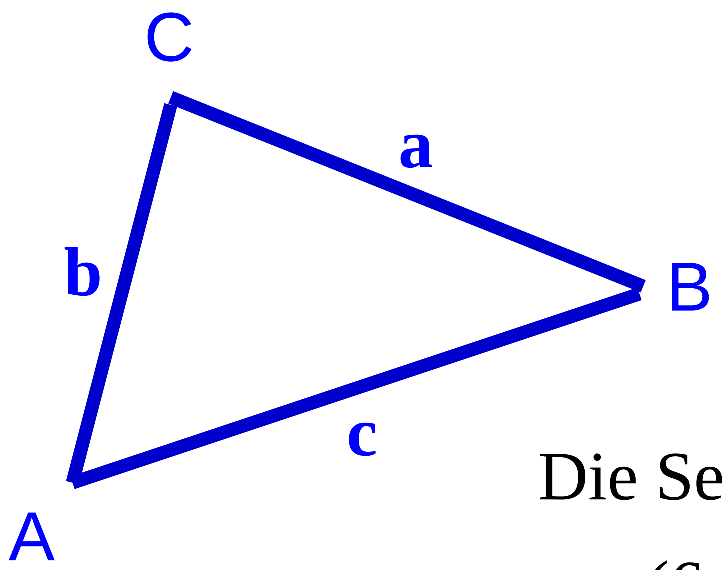
Hausaufgabe: Beispiellösung

Eckpunkte der Beispiellösung: A $(0; 0)$
B $(6; 2)$
C $(1; 4)$



Hausaufgabe: Beispiellösung

Eckpunkte der Beispiellösung: A(0; 0)
B(6; 2)
C(1; 4)



Die Seitenvektoren lauten somit:

$\mathbf{a} = (6 - 1)\,\sigma_x + (2 - 4)\,\sigma_y = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = (1 - 0)\,\sigma_x + (4 - 0)\,\sigma_y = \sigma_x + 4\,\sigma_y$

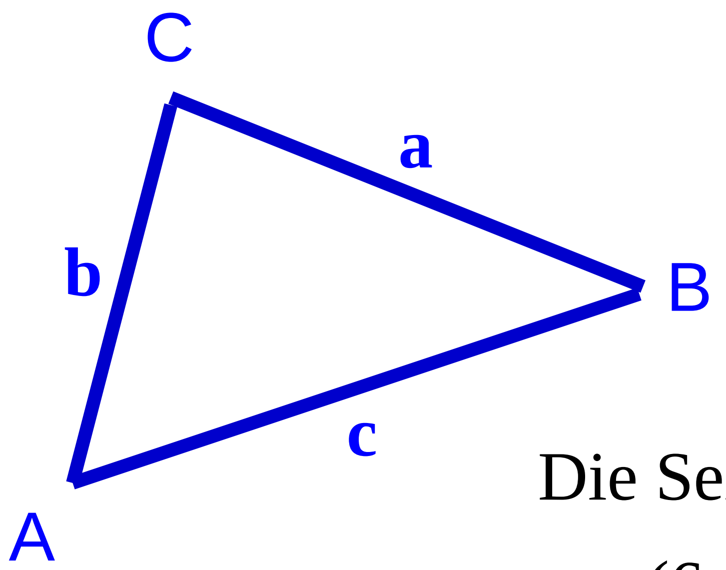
$\mathbf{c} = (6 - 0)\,\sigma_x + (2 - 0)\,\sigma_y = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

Hausaufgabe: Beispiellösung

Probe (vorsichtshalber): $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y + \sigma_x + 4\,\sigma_y$

$= 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$= \mathbf{c}$ (wie erwartet)



Die Seitenvektoren lauten somit:

$\mathbf{a} = (6 - 1)\,\sigma_x + (2 - 4)\,\sigma_y = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = (1 - 0)\,\sigma_x + (4 - 0)\,\sigma_y = \sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{c} = (6 - 0)\,\sigma_x + (2 - 0)\,\sigma_y = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

Nachrechnen des Verallgemeinerten Satzes des Pythagoras:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)^2 = 29$

$\mathbf{b} = \sigma_x + 4\,\sigma_y \qquad\qquad\qquad \mathbf{b}^2 = (\sigma_x + 4\,\sigma_y)^2 = 17$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad\qquad\qquad \mathbf{c}^2 = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)^2 = 40$

Inneres Produkt:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\,(22\,\sigma_x\sigma_y - 3 - 22\,\sigma_x\sigma_y - 3)$$
$$= -3$$

Also gilt: $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 29 + 17 - 6 = 40 = \mathbf{c}^2$

(wie erwartet)

Berechnung des Teil-Vektors p:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)^2 = 29$

$\mathbf{b} = \sigma_x + 4\,\sigma_y \qquad \qquad \mathbf{b}^2 = (\sigma_x + 4\,\sigma_y)^2 = 17$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \qquad \mathbf{c}^2 = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)^2 = 40$

Verallgemeinerter Kathetensatz:

$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 29 - 3 = 26$

Division durch den Vektor **c**:

$\mathbf{p} = 26/40 \cdot (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y$

Berechnung des Teil-Vektors q:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 = (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)^2 = 29$

$\mathbf{b} = \sigma_x + 4\,\sigma_y \qquad \mathbf{b}^2 = (\sigma_x + 4\,\sigma_y)^2 = 17$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \mathbf{c}^2 = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)^2 = 40$

Verallgemeinerter Kathetensatz:

$\mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 17 - 3 = 14$

Division durch den Vektor **c**:

$\mathbf{q} = 14/40 \cdot (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y$

Berechnung des Teil-Vektors q:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)^2 = 29$

$\mathbf{b} = \sigma_x + 4\,\sigma_y \qquad\qquad \mathbf{b}^2 = (\sigma_x + 4\,\sigma_y)^2 = 17$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad\qquad \mathbf{c}^2 = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)^2 = 40$

Verallgemeinerter Kathetensatz:

$\mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 17 - 3 = 14$

Division durch den Vektor **c**:

$\mathbf{q} = 14/40 \cdot (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y$

Probe (vorsichtshalber):

(wie erwartet)

$\mathbf{p} + \mathbf{p} = 3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y + 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y = \mathbf{c}$

Berechnung des Höhevektors h:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)^2 = 29$

$\mathbf{b} = \sigma_x + 4\,\sigma_y \qquad \qquad \mathbf{b}^2 = (\sigma_x + 4\,\sigma_y)^2 = 17$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \qquad \mathbf{c}^2 = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)^2 = 40$

Verallgemeinerter Flächensatz:

$$\mathbf{h}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 22\,\sigma_x\sigma_y - 3 + 3 = 22\,\sigma_x\sigma_y$$

Division durch den Vektor **c**:

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= 22/40\,\sigma_x\sigma_y\,(6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\\ &= 132/40\,\sigma_x\sigma_y\sigma_x + 44/40\,\sigma_x\sigma_y\sigma_y\\ &= 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y\end{aligned}$$

Ergebnisse:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = \sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{p} = 3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y$

$\mathbf{q} = 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y$

$\mathbf{h} = 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y$

Probe (vorsichtshalber):

$$\begin{aligned}\mathbf{p} + \mathbf{h} &= 3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y + 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y \\ &= 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \\ &= \mathbf{a} \quad \text{(wie erwartet)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q} - \mathbf{h} &= 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y - (1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y) \\ &= \sigma_x + 4\,\sigma_y \\ &= \mathbf{b} \quad \text{(wie erwartet)}\end{aligned}$$

Ergebnisse:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = \quad \sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{p} = 3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y$

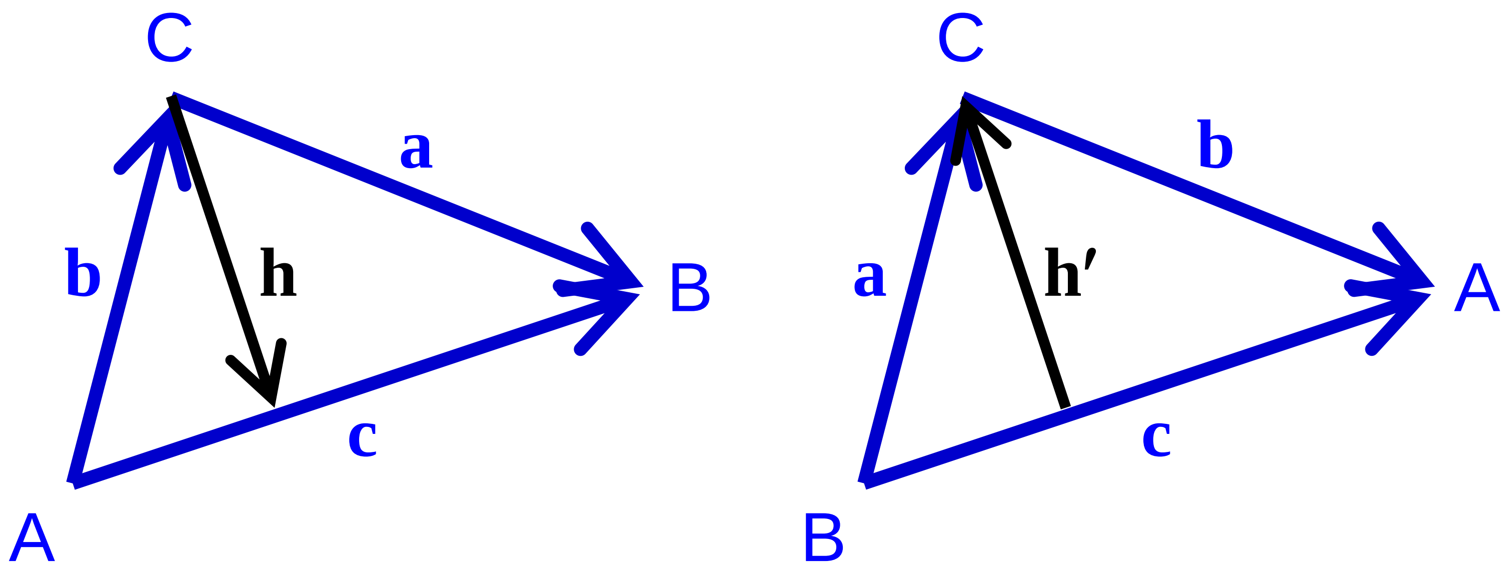
$\mathbf{q} = 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y$

$\mathbf{h} = 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y$

Die Orientierung des Höhenvektors **h** zeigt in dieser Beispiellösung somit nicht in Richtung des Eckpunktes C, sondern in Richtung des Fußpunktes auf dem Seitenvektor **c**.

Diese Orientierung des Höhenvektors spiegelt die Orientierung des Dreiecks gegen den oder im Uhrzeigersinn wieder.

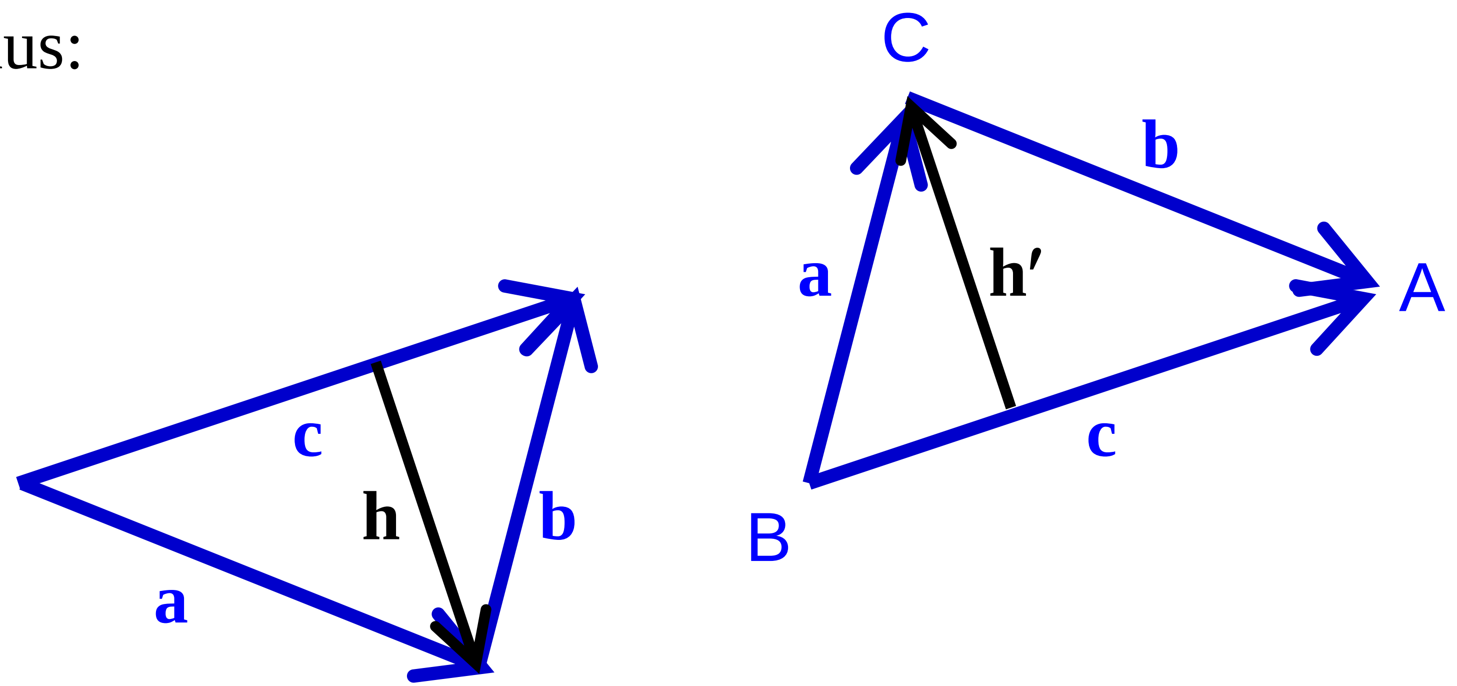
Orientierung des Höhenvektors



$$\mathbf{h} = 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y \qquad \mathbf{h}' = -\,\mathbf{h} = -\,1{,}1\,\sigma_x + 3{,}3\,\sigma_y$$

Orientierung des Höhenvektors

Denn eigentlich sieht unser ausgewürfeltes Zufallsdreieck so aus:

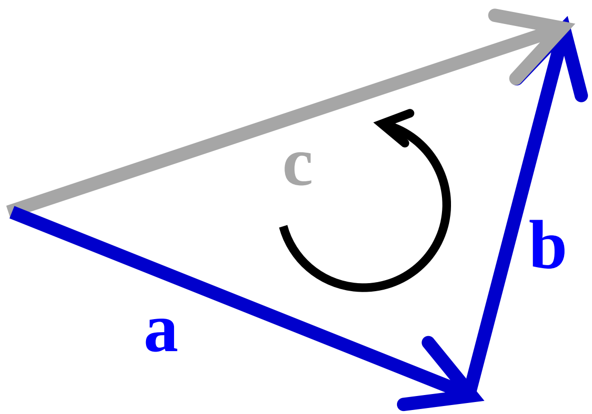


$$\mathbf{h} = 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y \qquad \mathbf{h}' = -\,\mathbf{h} = -\,1{,}1\,\sigma_x + 3{,}3\,\sigma_y$$

Orientierung des Höhenvektors

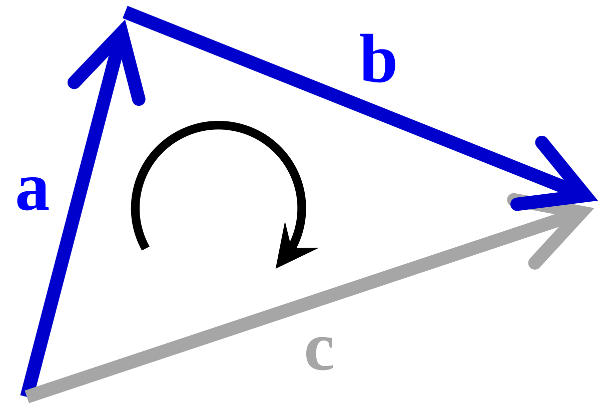
Orientierung des Dreiecks …

… gegen den Uhrzeigersinn



(positive Orientierung)

… im Uhrzeigersinn



(negative Orientierung)

Nachrechnen des verallgemeinerten Höhensatzes:

$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = \quad \sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{p} = 3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y$

$\mathbf{q} = 2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y$

$\mathbf{h} = 1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y$

Verallgemeinerter Höhensatz:

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = (3{,}9\,\sigma_x + 1{,}3\,\sigma_y)\,(2{,}1\,\sigma_x + 0{,}7\,\sigma_y)$$
$$= 8{,}19\,\sigma_x{}^2 + 2{,}73\,\sigma_x\sigma_y + 2{,}73\,\sigma_y\sigma_x + 0{,}91\,\sigma_y{}^2 = 9$$

$$\mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = (1{,}1\,\sigma_x - 3{,}3\,\sigma_y)^2 - 3$$
$$= 1{,}21\,\sigma_x{}^2 - 3{,}63\,\sigma_x\sigma_y - 3{,}63\,\sigma_y\sigma_x + 10{,}89\,\sigma_y{}^2 - 3$$
$$= 1{,}21 + 10{,}89 - 3 = 9 = \mathbf{p}\,\mathbf{q} \quad \text{(wie erwartet)}$$

Ausblick:

Die komplexe Konjugation bewirkt einen Symmetriebetrug

BzMU 2020

Es ist nicht verboten, nun auch Potenzen höherer Ordnung der Hypotenuse $\mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ eines recht-winkligen Dreiecks zu betrachten.

Koeffizienten der Terme kommutativer Größen wie **p** und **q** bilden dann ein **Pascal-Dreieck**.

$$c^0 = 1$$

$$c = 1\,p + 1\,q$$

$$c^2 = 1\,p^2 + 2\,pq + 1\,q^2$$

$$c^3 = 1\,p^3 + 3\,p^2q + 3\,pq^2 + 1\,q^3$$

$$c^4 = 1\,p^4 + 4\,p^3q + 6\,p^2q^2 + 4\,pq^3 + 1\,q^4$$

$$c^5 = 1\,p^5 + 5\,p^4q + 10\,p^3q^2 + 10\,p^2q^3 + 5\,pq^4 + 1\,q^5$$

$$c^6 = 1\,p^6 + 6\,p^5q + 15\,p^4q^2 + 20\,p^3q^3 + 15\,p^2q^4 + 6\,pq^5 + 1\,q^6$$

Kommutative Vertauschung $\Leftrightarrow$ Pascal-Dreieck

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Kommutative Vertauschung $\Leftrightarrow$ Pascal-Dreieck

BzMU 2020

Koeffizienten der Terme kommutativer Größen wie **p** und **q** bilden dann ein Pascal-Dreieck.

Koeffizienten von Termen anti-kommutativer Größen wie **a** und **b** (siehe folgende Abbildung) bilden das **Pauli-Pascal-Dreieck** (Horn 2007).

Martin Erik Horn: Die didaktische Relevanz des Pauli-Pascal-Dreiecks. In D. Höttecke (Hrsg.): Beiträge zur GDCP Jahres-tagung in Bern, Band 27. LIT-Verlag, Berlin 2007, S. 557–559.

$$c^0 = 1$$

$$c = 1\,a + 1\,b$$

$$c^2 = 1\,a^2 + 0\,ab + 1\,b^2$$

$$c^3 = 1\,a^3 + 1\,a^2b + 1\,ab^2 + 1\,b^3$$

$$c^4 = 1\,a^4 + 0\,a^3b + 2\,a^2b^2 + 0\,ab^3 + 1\,b^4$$

$$c^5 = 1\,a^5 + 1\,a^4b + 2\,a^3b^2 + 2\,a^2b^3 + 1\,ab^4 + 1\,b^5$$

$$c^6 = 1\,a^6 + 0\,a^5b + 3\,a^4b^2 + 0\,a^3b^3 + 3\,a^2b^4 + 0\,ab^5 + 1\,b^6$$

$$c^7 = 1\,a^7 + 1\,a^6b + 3\,a^5b^2 + 3\,a^4b^3 + 3\,a^3b^4 + 3\,a^2b^5 + 1\,ab^6 + 1\,b^7$$

Anti-kommutative Vertauschung $\Leftrightarrow$ Pauli-Pascal-Dreieck

							1							
						1		**1**						
					1		**0**		**1**					
				1		**1**		**1**		**1**				
			1		**0**		**2**		**0**		**1**			
		1		**1**		**2**		**2**		**1**		**1**		
	1		**0**		**3**		**0**		**3**		**0**		**1**	
1		**1**		**3**		**3**		**3**		**3**		**1**		**1**

Anti-kommutative Vertauschung $\Leftrightarrow$ Pauli-Pascal-Dreieck

BzMU 2020

Wir alle begehen also einen Symmetriebetrug, wenn wir die komplexe Konjugation nutzen. Die Multiplikation komplexer Zahlen ist kommutativ, denn Potenzen höherer Ordnung zeigen die Koeffizienten des Pascal-Dreiecks. Multiplizieren wir allerdings auch komplex konjugierten Faktoren, bilden die dann berechneten Koeffizienten ein **Pauli-Pascal-Dreieck** (Horn 2019).

Martin Erik Horn: Horn, M.E. (2019). Cheating with Complex Numbers. Der Selbstbetrug mit den komplexen Zahlen. http://www.vixra.org/abs/1911.0023 [01.11.2019]

$\mathbf{z}^0 =$ $\mathbf{1}$

$z =$ $\mathbf{1}\,x + \mathbf{1}\,iy$

$z^*z =$ $\mathbf{1}\,x^2 + \mathbf{0}\,ixy + \mathbf{1}\,y^2$

$z\,z^*z =$ $\mathbf{1}\,x^3 + \mathbf{1}\,ix^2y + \mathbf{1}\,xy^2 + \mathbf{1}\,iy^3$

$z^*z\,z^*z =$ $\mathbf{1}\,x^4 + \mathbf{0}\,ix^3y + \mathbf{2}\,x^2y^2 + \mathbf{0}\,ixy^3 + \mathbf{1}\,y^4$

$z\,z^*z\,z^*z =$ $\mathbf{1}\,x^5 + \mathbf{1}\,ix^4y + \mathbf{2}\,x^3y^2 + \mathbf{2}\,ix^2y^3 + \mathbf{1}\,xy^4 + \mathbf{1}\,iy^5$

$z^*z\,z^*z\,z^*z = \mathbf{1}\,x^6 + \mathbf{0}\,ix^5y + \mathbf{3}\,x^4y^2 + \mathbf{0}\,ix^3y^3 + \mathbf{3}\,x^2y^4 + \mathbf{0}\,ixy^5 + \mathbf{1}\,y^6$

komplex konjugierte Faktoren $\Leftrightarrow$ Pauli-Pascal-Dreieck

BzMU 2020

Fazit: Die komplexe Konjugation wurde erfunden, um nicht-kommutative Strukturen recht dreist mit Hilfe kommutativer Größen zu modellieren.

$\Rightarrow$ Wir alle begehen einen Symmetriebetrug,
wenn wir die komplexe Konjugation nutzen.

Anhang:

Die GDM hat ihren Namen nicht verdient

gescheitertes MGDM-Paper

Einen ähnlichen Beitrag wie diesen hier hatte ich letztes Jahr unter dem Titel „Der Selbstbetrug mit den komplexen Zahlen“ geschrieben und bei den „Mitteilungen der GDM“ eingereicht.

Und ich bin mir sicher, ich habe in diesem gescheiterten MGDM-Paper etwas über den Satz des Pythagoras geschrieben, siehe:

www.vixra.org/abs/1911.0023

gescheitertes MGDM-Paper

Deshalb war ich etwas erstaunt, dass mich kurze Zeit später eine Ablehnung erreichte, die folgendermaßen begründet wurde:

> „Einstimmig waren die Kollegen der Meinung, dass der mathematikdidaktische Fokus fehlt. Zum größeren Teil wird die Physik(Didaktik) angesprochen.“

gescheitertes MGDM-Paper

Eine Diskussion des Satzes des Pythagoras ist aus Sicht der GDM keine mathematikdidaktische Angelegenheit, sondern eine physikdidaktische. Sehr schön, wir sollten also den Namen unseres Fachverbandes ändern in:

GDMOP – Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ohne Pythagoras