الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم ـ قسم الرياضيات

دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجيا

أطروحة أعدّت لنيل درجة الدّكتوراه في الرّياضيّات البحتة

إعداد الطالب

رياض خضر الحميدو

إشراف

الأستاذ الدكتور طالب غريبة

أستاذ في قسم الرّياضيات – كليّة العلوم – جامعة البعث

العام الدراسي

2019 – 2018 م - 1440 هـ

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم ـ قسم الرياضيات

دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجيا

A Study of Multi - Topological Spaces

أطروحة أعدّت لنيل درجة الدّكتوراه في الرياضيات اختصاص الرّياضيّات البحتة (التبولوجيا)

إعداد الطالب

رياض خضر الحميدو

معيد في قسم الرّياضيات – كليّة العلوم – جامعة الفرات

إشراف

الأستاذ الدكتور طالب غريبة

أستاذ في قسم الرّياضيات – كليّة العلوم – جامعة البعث

العام الدراسي

2019 – 2018 م - 1440 هـ

دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجيا

A Study of Multi - Topological Spaces

تمّ تسجيل هذا الموضوع بقرار مجلس جامعة البعث ذي الرقم (385) المتّخذ في الجلسة رقم (7) تاريخ 14 ربيع الأول 1438 هـ الموافق 13 كانون الأول 2016 م للعام الدراسي 2016 – 2017 م

صدر قرار مجلس البحث العلمي والدّراسات العليا في جامعة البعث ذو الرقم /(321) د/ المتّخذ بالجلسة رقم /(8) د/ تاريخ 23/ 1 / 2019 القاضي بتسمية أعضاء لجنة الحكم المؤلفة من السادة:

الاسم والنسبة	المرتبة	الاختصاص	الكلية	الجامعة	الصفة
د. محمد خير أحمد	أستاذ	رياضيات حديثة	العلوم	حلب	عضواً
د. ابراهيم ابراهيم	أستاذ	تحليل رياضي	العلوم	البعث	عضواً
د. طالب غريبة	أستاذ	التبولوجيا والهندسة التفاضلية	العلوم	البعث	مشرفاً
د. خالد العبد الله	أستاذ	ميكانيك	العلوم	البعث	عضواً
د. محمد الشيخ	أستاذ مساعد	الهندسة التفاضلية	العلوم	دمشق	عضواً

الإهـــــــــــــــــــــــداء

وما بكم من نعمة فمن الله

فلكَ اللهمَّ اسجدْ سجدةَ امتنانٍ وعرفانٍ أُودعُكَ فيها مكنونَ صدري وما حَواهُ من شكرٍ حاشَاهُ أن يَفِي شُكرَكَ أو يُوازي عطائَك .. فلك الحمدُ إلهي كما يليقُ بجلالِ وجهِكَ وعظيمِ سلطانِكَ على إكرامك لي وتوفيقي لإنجاز هذا العمل.

لتلكَ السيدةِ التي لها من الفجرِ سكينتُها ومن الأرضِ خضارُهَا ومن الشمسِ دفئُهَا وحنانُهَا ومن القمرِ نورُهَا وطيبتُهَا ومن الشجرِ ظلالُهَا .. حتّى الجنةُ قدَّرَ اللهُ فجعلَهَا تحتَ أقدَامِهَا ..

فلجَنَّةِ قلبِي وحبَّةِ عينِي أمِّي وسيِّدتِي وحبِيبَتِي .. أُهدِي هذا العمل.

أمَّا التَّجاعِيدُ فتلكَ أَعرَافُ الحيَاة وسُنَنُ الكادحينَ الطيبينَ الأتقِيَاءْ، فإذا استَراحَتْ على جبينٍ فليستْ كناياتِ شقاءْ .. إنَّمَا كناياتُ طهرٍ ونقاءْ ..

فللطيبةِ الشَّاخصةِ في وجهِ أبِي ولِحبَّاتِ العَرَقِ الممزُوجة بِعَبَقِ الطُهرِ الساكنِ فيه ..

أهدي هذا العمل.

وللذينَ يسكنونَ القلبَ فيرتاحَ بهم الخاطرُ وتأنسَ بهم عَزَمَاتُ روحِي وتَفرحَ بهم خفقاتُ قلبي حينَ تجدْهُمْ سندًا ومَعَارِجًا تعرجُ بهم إلى أقَاصِي الطُّموحِ وقِمَمِ التَّوفِيق ..

فلأخوتي جميعاً .. أهدي هذا العمل.

ولفراشاتِ قلبي اللّاتي يرتَعْنَ فيه فيملَئْنَهْ بالحب والخيرِ والفَرحِ والسَّعادة زوجتي العزيزة... وبنتي الغالية.. رفيقتا قلبي وشريكتا حياتي .. أهدي هذا العمل.

شكر خاص للدكتور المشرف

ولو أنَّ للشُكرِ لساناً أَرَاحَني   ولكنْ قدَّرَ اللهُ أنَّ الشكرَ أَبكَمُ..

فللّهِ شُكرِي دَائمَاً مُتَواصِلاً   ولكمْ منَ الشُّكرِ الجَزِيلُ المُتَمَّمُ..

لأستاذي الكريم أ.د. طالب غريبة

أتقدمُ إليكم ببالغِ امتناني وجزيلِ عرفانِي على كلِّ ما قدَّمتُمُوه من دعم ومواقفٍ شَدَدتُم بها أَزرِي ..

فلقد كانت توجيهاتُكم السديدةُ خطواتِ نجاحِي وسلّمَ ارتقائِي الذي ما كانّ ليكونَ إلا بكم وبنبلِ أخلاقِكُم ..

فلكمْ من القلبِ أسمَى دَرجاتِ الشكرِ على كل ما قدمتموه لي من توجيهِاتكم وعنايتِكم وأسألُ اللهَ أن أكونَ عند حسنِ ظنِّكم بي مثلما كنتم وعلى الدوام عند حسن ظنِّي بكم.

فلكم الشكرُ التامْ والعِرفانُ الخَالصْ.

كما لا أنسى أن أعمّمَ شكري كلَّ من رافقَ طموحي ودفعَ بي نحو الأمل والنجاح من قريب أو بعيد ..

فلهم جميعاً شكري وامتناني.

المحتويات

ثبت بالرّموز المستخدمة

الرّمز	التعريف
$N.O(X)$	أسرة المجموعات المفتوحة من النمط N
$N.C(X)$	أسرة المجموعات المغلقة من النمط N
$N\alpha.O(X)$	أسرة المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$
$N\alpha.C(X)$	أسرة المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$
$N^{\alpha}.C(X)$	أسرة المجموعات N^{α}–مغلقة
$N^{\alpha}.O(X)$	أسرة المجموعات N^{α}–مفتوحة
فضاء $E.D$	Exteremally Disconnected
$N\alpha-\mathrm{int}(A)$	الداخلية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A من النمط $N\alpha$
$N\alpha-\mathrm{cl}(A)$	اللصاقة النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A من النمط $N\alpha$
NCS	مجموعة نتروسوفيكية هشة
NCS − Taype1	مجموعة نتروسوفيكية هشة من النمط الأول
NCS − Taype2	مجموعة نتروسوفيكية هشة من النمط الثاني
NCS − Taype3	مجموعة نتروسوفيكية هشة من النمط الثالث
$\emptyset_N$	مجموعة خالية نتروسوفيكية هشة
NCTS	فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش
NCOS	مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة
NCCS	مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة
$\grave{A}$ أو A^c	متممة المجموعة A
x_{N_i}	نقطة نتروسوفيكية هشة من النمط i حيث i= 1,2,3
NCP_N	أسرة كل النقاط النتروسوفيكية الهشة
Bi-NCTS	فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي على X

Tri-NCTS	فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثلاثي على X
Bi-NCOS	مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة
Bi-NCOS	مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة
Bi-NCOS(X)	أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة
Bi-NCCS(X)	أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة
Tri-NCOS	مجموعة ثلاثية نتروسوفيكية هشة مفتوحة
Tri-NCOS	مجموعة ثلاثية نتروسوفيكية هشة مفتوحة
Tri-NCOS(X)	أسرة المجموعات الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة
Tri-NCCS(X)	أسرة المجموعات الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المغلقة
$S-NCOS$	المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط S
$S-NCCS$	المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط S
$S-NCOS(X)$	أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطS
$S-NCCS(X)$	أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطS
$Bi-RNCOS$	المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR
$Bi-RNCCS$	المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطR
$\Gamma_1 \vee \Gamma_2$	التبولوجي النتروسوفيكي الهش الأعظمي الذي يحوي كلاً من Γ_1, Γ_2
$Bi-RNCOS(X)$	أسرة كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR
$Bi-RNCCS(X)$	أسرة كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطR
$\mathrm{Bi-S.NCOS}$	المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية
$\mathrm{Bi-S.NCCS}$	المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة القوية
$\mathrm{n-NCTS}$	فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X
$\mathrm{n-NCOS}$	مجموعة $n-$ نتروسوفيكية هشة مفتوحة
$\mathrm{n-NCCS}$	مجموعة $n-$ نتروسوفيكية هشة مغلقة
n-NCOS(X)	أسرة المجموعات $n-$النتروسوفيكية الهشة المفتوحة في X

n-NCCS(X)	أسرة المجموعات n–النتروسوفيكية الهشة المغلقة في X
$NC^n Int(A)$	داخلية n–نتروسوفيكية هشة للمجموعة A
$NC^n cl(A)$	لصاقة n–نتروسوفيكية هشة للمجموعة A
$n.S-NCOS$	المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط $n.S$
$n.S-NCCS$	المجموعة النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط $n.S$
$n.S-NCOS(X)$	أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.S$
$n.S-NCCS(X)$	أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط$n.S$
$n-RNCOS$	المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.R$
$Bi-RNCCS$	المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطR
$n-S.NCOS$	المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية
$n-S.NCCS$	المجموعة النتروسوفيكية الهشة المغلقة القوية

المقدّمة

أوّلاً : أهميّة موضوع الأطروحة

يقدم هذا العمل دراسة أعدت لنيل درجة الدكتوراه في الرياضيات البحتة، تخصص " التبولوجيا"، التي تعد احد فروع الرياضيات، وهو بعنوان " دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجية ".

يتعلق موضوع الأطروحة بدراسة الفضاءات متعددة التبولوجيا ومجموعاتها المفتوحة والمغلقة، وفقاً للمفهوم العادي ووفقاً لمنطق النتروسوفيك ذلك المنطق الجديد عالمياً والأعم من المنطق الضبابي، والذي أسسه العالم الأمريكي F.Smarandache عام 1995 الذي يدرس ويهتم بالحياد، بحيث ياخذ هذا المنطق الجديد بعين الاعتبار كل فكرة مع نقيضها مع طيف الحياد ، حيث ياخذ هذا المنطق كل بيان بثلاث ابعاد هي الصح (T) بدرجات والخطأ (F) بدرجات والحياد (I) بدرجات، نعبر عن ذلك بالشكل (T,I,F) وهذ يعطي وصفاً اكثر دقة من المنطق الضبابي والمنطق الحدسي.

لقد قام العلماء بدراسة الفضاءات التبولوجية ومكوناتها الأساسية من المجموعات المفتوحة والمغلقة، وبما أن المجموعات المفتوحة والمغلقة تعد اللبنة الرئيسية في بناء التبولوجيا والفضاء التبولوجي فقد توسع العلماء والباحثون في دراستها، حيث قدموا أنماطاً أضعف منها مثل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من نمط الفا، والمجموعات المفتوحة (المغلقة) من نمط بيتا، المجموعات شبة المفتوحة (المغلقة)، ومن ثم توسع الباحثون ومددوا مفهوم الفضاء التبولوجي الى الفضاء التبولوجي الثنائي على يد العالم كيلي عام 1965 في [13] ، ثم توسع الباحثون بدراسته وعمموا جميع تعاريف المجموعات المفتوحة (المغلقة) إلى الفضاء التبولوجي الثنائي.

أما الفضاء التبولوجي الثلاثي فقد تم تعريفه ودراسته من قبل الباحث مارتن عام 2000 في [14].

عرف Mrsevic وI. L. Reilly عام 1996 في [15] المجموعات المفتوحة من النمط S، والمجموعات المغلقة من النمط S (S-open sets ,S-closed sets) في الفضاء التبولوجي الثنائي.

أيضاً عرف N. A. Jabbar و A. I. Nasir عام 2010 في [12] المجموعات المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي.

عرف A. A. Salama and F. Smarandache , and V. Kroumov عام 2014 في [21] مفهوم الفضاء التوبولوجي النتروسوفيكي الهش كما عرفوا المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة والعمليات عليها مثل التقاطع والاجتماع.

أيضاً قدم البروفيسور المصري احمد سلامة A.A. Salama عام 2013 دراسة حول مفهوم النقاط النتروسوفيكية الهشة[25] وعرف مفهوم انتماء عنصر ما لمجموعة نتروسوفيكية هشة.

نتابع في هذه الأطروحة دراسة الفضاءات التبولوجية ونركز دراستنا على الفضاءات متعددة التبولوجيا منها، وندرس ونعرف أنماطاً جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها، كما ندرس ونعرف الفضاءات التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة والفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ايضاً ندرس ونعرف الفضاءات التبولوجيا النتروسوفيكية الثنائية وأنماطاً جديدة من المجموعات النتروسوفيكية فيها، لتعطي إضافة لها طابع هام وجديد في هذا المجال، حيث ركزنا على التعريف بمنطق النتروسوفيك الذي يفتح المجال أمام الباحثين في كل الاختصاصات لا سيما الطبية وعلوم الفيزياء والرياضيات عموماً والتبولوجيا خصوصاً.

تعد أطروحتنا الدراسة الأولى من نوعها التي تقوم بتطبيق المنطق النتروسوفيكي الجديد على التبولوجيا والفضاءات التبولوجية في الجامعات السورية.

ثانياً : مشكلة البحث

تمت دراسة الفضاءات التبولوجية ، كما تم تمديدها وتعميمها إلى الفضاءات التبولوجية الثنائية والثلاثية، ودراسة مجموعاتها المفتوحة والمغلقة، وإيجاد أنماط أضعف من المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها، مثل المجموعات α-مفتوحة (α-مغلقة)، والمجموعات β-مفتوحة (β-مغلقة) ، والمجموعات شبه مفتوحة (مغلقة).

كان لابد لنا من متابعة الدراسة وأيجاد أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات متعددة التبولوجيا مثل الفضاء التبولوجي الثنائي والثلاثي وفقاً للمفهوم العادي للتبولوجيا.

أيضا تم تعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش[21] و الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي[26] من قبل البروفيسور المصري احمد سلامة وفريق من الباحثين، وقد عرفنا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي والثلاثي، ومن ثم دراسة وتعريف الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ودراسة أنماط جديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة فيها، أيضاً كان لابد لنا من تعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الثنائي.

ثالثاً : الهدف العلمي من الأطروحة

تهدف الأطروحة إلى دراسة فضاءات متعددة التبولوجيا وتعريف أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها ومن ثم دراسة مفاهيم تبولوجية وفق منطق النتروسوفيك ، حيث عرفنا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي والثلاثي، ومن ثم عرفنا ودرسنا فضاءات أعم وهي الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ثم عرفنا أنماطاً جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها، كما أدخلنا

تعريف اللصاقة والداخلية باستخدام كل نوع من الانواع الجديدة من المجموعات، كما عرفنا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الثنائي، ودرسنا أنماطاً جديدة من المجموعات النتروسوفيكية فيه.

كما قمنا بدراسة مسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة، بعد أن عرفنا مفهوم النقاط النتروسوفيكية الهشة والعمليات عليها.

رابعاً : المسائل الأساسية ذات الطابع العلمي الجديد والتي درست في الأطروحة

١) دراسة فضاءات متعددة التبولوجيا وتعريف أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها.

٢) إدخال تعريف اللصاقة والداخلية لمجموعة ما باستخدام كل نوع من الانماط الجديدة من المجموعات المدروسة في الأطروحة.

٣) دراسة المفاهيم في التبولوجيا العادية وفق أحدث منطق عالمي وهو منطق النتروسوفيك، حيث تعد دراستنا الاولى في الجامعات السورية التي تستخدم هذا المنطق لدراسة التبولوجيا وفقه .

٤) تعريف ودراسة مفهوم النقاط النتروسوفيكية الهشة والعمليات عليها.

٥) دراسة مسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة، حيث تعد أطروحتنا الاولى في العالم التي تدرسها.

٦) دراسة وتعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي وتعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الثنائي ، حيث تعد أطروحتنا الاولى في العالم التي تدرسها.

٧) دراسة وتعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثلاثي، حيث تعد أطروحتنا الاولى في العالم التي تدرسها.

٨) دراسة وتعريف الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة.

٩) تعريف أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة الثنائية والثلاثية، وفي الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي ايضاً.

خامساً : القيمة النظريّة والعلميّة للأطروحة

هذا العمل ذو طابع نظري والنتائج الأساسية يمكن أن تكون مساعدة للتطورات اللاحقة في نظرية المجموعات والفضاءات التبولوجية والفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة والفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية، كما يمكن أن تستخدم في مواضيع أنظمة المعلومات الجغرافية وأنظمة المعلومات

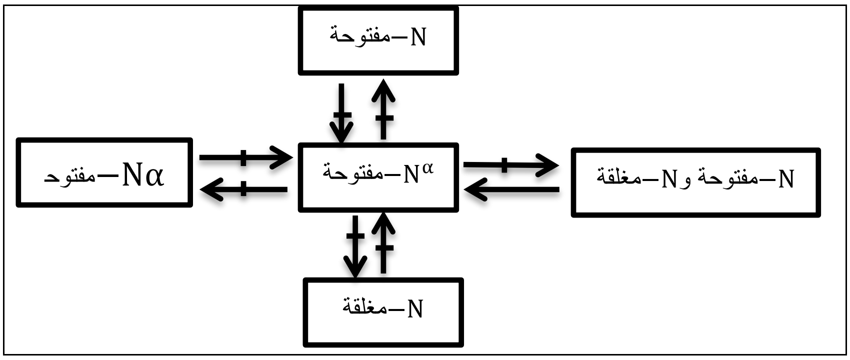
الجغرافية وفق منطق النتروسوفيك، كما يمكن أن تفتح آفاقاً للباحثين في دراسة مفاهيم الرياضيات في جميع فروعها وفق منطق النتروسوفيك، الذي يعد تعميماً للمنطق الضبابي.

سادساً : أهم النتائج العلمية التي توصلنا إليها في الأطروحة

تتلخّص النّتائج العلميّة التي توصّلنا إليها في الأطروحة، بإثبات صحّة المبرهنات الآتية:

مبرهنة: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، ولتكن A مجموعة جزئية من X عندئذ: A مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة $\Leftrightarrow$ توجد مجموعة N –مفتوحة G تحقق $G \subseteq A \subseteq N - int(N - cl(G))$.

مخطط توضيحي لبعض النتائج في الفصل الاول :



مبرهنة: لتكن A مجموعة غير خالية من الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، عندئذ:
إذا كانت $N - int(A) = \emptyset$ فإن A لاتحوي مجموعة غير خالية $N\alpha-$مفتوحة .

مبرهنة: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:
المجموعات $N^{\alpha}-$مفتوحة لا تشكل تبولوجيا على X.

مبرهنة : ليكن(X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

١) A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة.
٢) توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$.
٣) $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$.

مبرهنة : ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

١) A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة.

٢) توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة F، تحقق $\mathrm{NCint}(\mathrm{NCcl}(\mathrm{NCint}(F))) \subseteq A \subseteq F$.

٣) $\mathrm{NCint}(\mathrm{NCcl}(\mathrm{NCint}(\mathrm{NCcl}(A)))) \subseteq A$.

ملاحظة :

المخطط التالي يبين العلاقات بين أنواع المجموعات الجديدة النتروسوفيكية المغلقة التي درسناها في الفصل الثاني

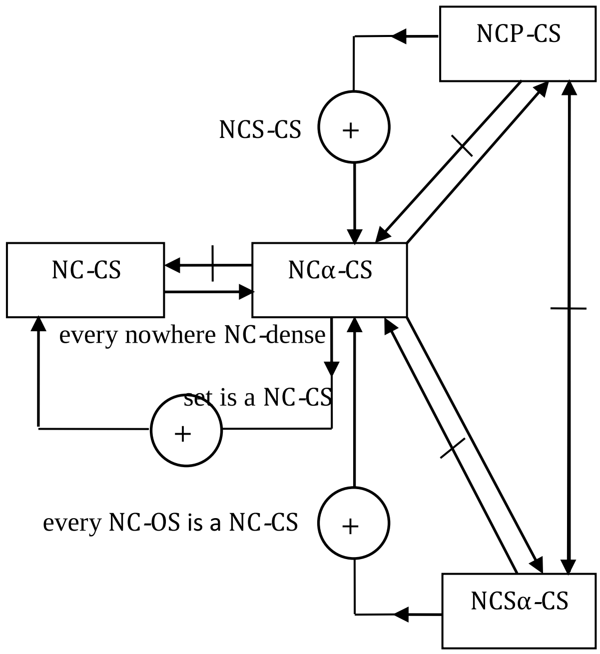


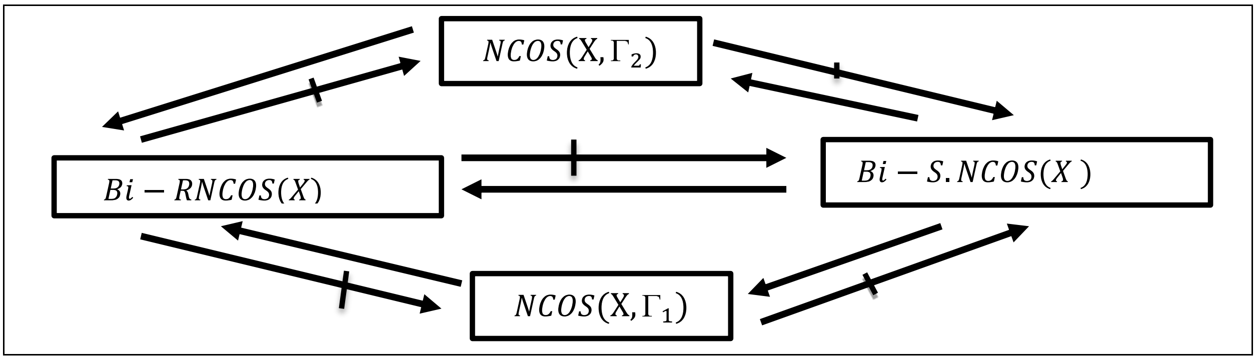
Diagram (2.1)

نتيجة : ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

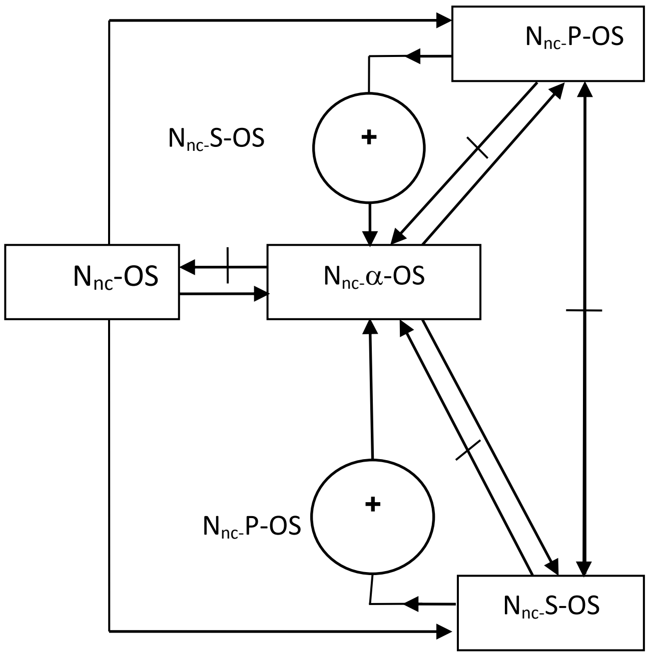
تشكل أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية، تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

مخطط توضيحي لبعض النتائج السابقة حول الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة التي درسناها في الفصل الثالث:

(حيث $\longleftarrow \;=\; \Leftarrow$ و $\nleftarrow \;=\; \nLeftarrow$)



مخطط توضيحي للعلاقات بين الأنماط المختلفة من المجموعات الجديدة في الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة في الفصل الرابع :



مبرهنة : ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

١) A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

٢) توجد مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$.

٣) $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$.

ملاحظة: المخطط التالي يبين العلاقات بين أنواع المجموعات الجديدة النتروسوفيكية التي درسناها

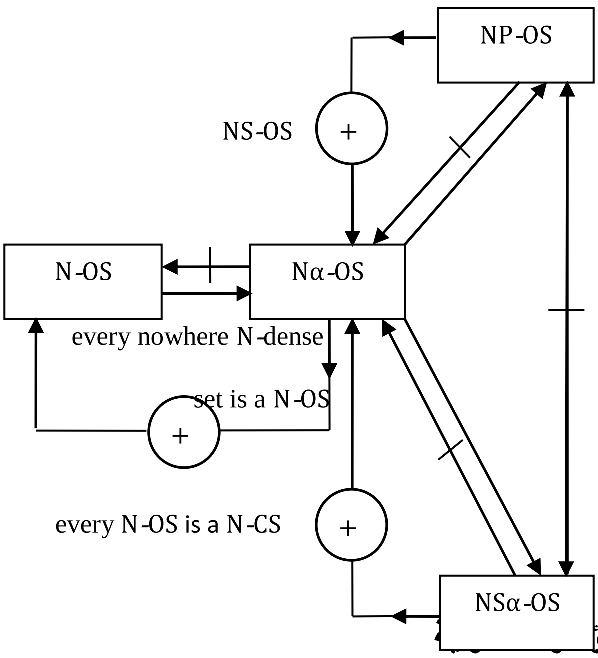


Diagram (5.1)

سابعاً : المنشورات والمؤ

A. المنشورات باللغة العربية:

١. أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثنائية، مجلّة جامعة البعث. العدد **39** **(2017)**.

٢. المجموعات المفتوحة من النمط **Nα** والمجموعات المفتوحة من النمط **Sα** في الفضاءات التبولوجية الثلاثية، مجلّة جامعة البعث. العدد **39** **(2017)**.

٣. المجموعات المفتوحة من النمط **Nα** والمجموعات المفتوحة من النمط **Sα** في الفضاءات التبولوجية الثنائية، مجلّة جامعة بابل للعلوم الصّرفة و التطبيقيّة، المجلّد **26**، العدد **5** **(2018)**.

٤. مجموعات ثنائية نتروسوفيكية هشة جديدة، مجلّة جامعة بابل للعلوم الصّرفة و التطبيقيّة، المجلّد **26**، العدد **7** **(2018)**.

B. المنشورات باللغة الأنكليزية:

1. **Neutrosophic Crisp Bi-Topological Spaces**, Neutrosophic Sets and Systems, Vlo.21, 2018.
2. **Neutrosophic Crisp Tri-Topological Spaces**, Journal of new theory , Vlo.23, 2018, pp.13-21.
3. **On Neutrosophic Crisp Semi Alpha Open Sets**, Neutrosophic Sets and Systems, Vlo.21, 2018.
4. **On Neutrosophic Semi Alpha Closed Sets**, Neutrosophic Sets and Systems, Vlo.18, 2017.
5. **On Neutrosophic Crisp Topology via N-Topology**, Neutrosophic Sets and Systems, Vlo.23, 2018, pp.25-30.
6. **Separation Axioms In Neutrosophic Crisp Topological Spaces**, Neutrosophic Sets and Systems, Vlo.24, 2018.

C. المؤتمرات والندوات :

١. المجموعات المفتوحة والمغلقة من النمط $\mathbf{N^{\alpha}}$ في الفضاءات التبولوجية الثنائية، الندوة الثلاثون للتبولوجي وتطبيقاته، في **كلية العلوم– جامعة طنطا – مصر**، بتاريخ12/ 9 / 2017.

٢. دراسة حول النتروسوفيك وتطبيقاتة التبولوجية، الندوة الحادية والثلاثون للتبولوجي وتطبيقاته، في **كلية العلوم– جامعة الزقازيق – مصر**، بتاريخ 22/ 7 / 2018.

٣. مجموعات ثنائية وثلاثية نتروسوفيكية هشة جديدة في الفضاءات التبولوجية الثنائية والثلاثية النتروسوفيكية الهشة ، المؤتمر العلمي الدولي الرابع للتمريض ، في **جامعة بور سعيد – مصر**، بتاريخ 18/ 10 / 2018.

٤. الفضاءات التبولوجية الرباعية وأنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة، المؤتمر العلمي الثالث لحملة الشهادات العليا، **في ذي قار العراق**، بتاريخ14 – 15/ 3 / 2018.

ثامناً : المحتوى وحجم الأطروحة

تتألّف الأطروحة التي وقعت في (**125** صفحة) من مقدّمة وخمسة فصول وملخّص باللغتين العربيّة والإنكليزيّة والمراجع التي تمّ الاستناد إليها في إنجاز هذه الأطروحة.

ذكّرنا في **الفصل الأول** ببعض المفاهيم والتعريفات التي تلزمنا في هذه الإطروحة، ثم أوجدنا وعرفنا، العديد من الأنوع الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثنائية، حيث أدخلنا تعريف المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ والمجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاءات التبولوجية الثنائية، وعرّفنا المجموعات المفتوحة من النمط $S\alpha$، والمجموعات المغلقة من النمط $S\alpha$ في هذه الفضاءات، ثم عرّفنا المجموعات المفتوحة من النمط N^{α} والمجموعات المغلقة من النمط N^{α} و المجموعات N^{α}–مفتوحة و N^{α}–مغلقة في آن واحد، ودرسنا الخصائص الأساسية لهذه الأنماط الجديدة من المجموعات، وأوجدنا العلاقات بينها وبين المجموعات المفتوحة و المغلقة في الفضاءات التبولوجية الثنائية، ثم أدخلنا تعريف داخلية ولصاقة مجموعة وفقاً لكل نوع من هذه الأنواع الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة.

ذكّرنا في **الفصل الثّاني** ببعض المفاهيم والتعريفات وفق منطق النتروسوفيك التي تلزمنا في هذه الإطروحة، كما درسنا أنماطاً جديدة من النقاط في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش، ومن ثم استعملنا المفهوم الجديد من النقاط، في تعريف مسلمات فصل نتروسوفيكية هشة جديدة في هذا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش، لابد أن ننوه إلى أن مسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة لم تدرس سابقاً من قبل أي باحث ، ونحن أول من قام بدراستها وتعريفها، كما درسنا صفاً جديداً من المجموعات النتروسوفيكية الهشة هي المجموعات النتروسوفيكية الهشة الشبه α–مغلقة (NCSα-CS) ، ودرسنا علاقتها مع أصناف المجموعات النتروسوفيكية الهشة المختلفة.

درسنا في **الفصل الثّالث** الفضاء التوبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي والثلاثي ، كتعميم وتمديد للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش. ثم عرفنا ودرسنا العديد من الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة الثنائية والثلاثية، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة، ثم عرفنا الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكي الهش، ثم عممنا النتائج إلى هذا الفضاء.

درسنا في **الفصل الرابع** مفهوم الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، كتمديد أو تعميم للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش، بطريقة أخرى جديدة، أيضاً قمنا بتعريف العديد من المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة فيه، مثل : المجموعة N_{nc}-مفتوحة (N_{nc}-مغلقة) والمجموعة P-N_{nc}-مفتوحة (P-N_{nc}-مغلقة) والمجموعة S- N_{nc}- مفتوحة (S - N_{nc}- مغلقة) والمجموعة $\alpha-N_{nc}$-مفتوحة (N_{nc}- α-مغلقة)، ودرسنا العلاقات بين هذه الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة.

درسنا في **الفصل الخامس** وأوجدنا تعريف الفضاء التوبولوجي النتروسوفيكي الثنائي، كتعميم وتمديد للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي. ثم عرفنا ودرسنا العديد من الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الثنائية، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الجديدة، كما درسنا صفاً جديداً من المجموعات النتروسوفيكية هي المجموعات النتروسوفيكية الشبه $\alpha-$مفتوحة ($NS\alpha$-OS)، ودرسنا علاقتها مع أصناف المجموعات النتروسوفيكية المختلفة.

اعتمدنا في الاطروحة على التأشيرة المزدوجة، حيث أنّ التأشيرة الأولى تدلّ على رقم الفصل، والتأشيرة الثّانية تدل على ترتيب الفقرة، كما اعتمدنا تأشيرة ثلاثيّة للفقرات الفرعيّة. التأشيرات من اليمين إلى اليسار.

وقد اعتمدنا الرموز الآتية :

- τ تبولوجيا على المجموعة X و(X, τ) فضاء تبولوجي.
- Γ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة (أو تبولوجيا نتروسوفيكية) على المجموعة X و(X, Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش(أو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي).

ختاماً : آمل أن أكون قد وفّقت وأستاذي المشرف بأن نكون قد أنجزنا إضافة متواضعة وجديدة في مجال دراستنا، وأكملنا نقصاً كان موجوداً، و أتممنا ما كنا نصبو إليه، وأضفنا مرجعاً متواضعاً إلى المكتبة

العربية ، وأدخلنا مفاهيم جديدة في التبولوجيا وفق المنطق العادي ووفق منطق النتروسوفيك ذاك المنطق الجديد على مستوى العالم. **والله ولي التوفيق.**

1

الفصل الأول

أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة (من نمط α) في الفضاءات ثنائية التبولوجية

مقدمة :

تعدّ المجموعات المفتوحة إحدى اللبنات الأساسية التي يقوم عليها بناء الفضاءات التبولوجية ، لذا أولى الباحثون و العلماء في مجال الرياضيات بشكل عام والتبولوجيا بشكل خاص اهتماماً كبيراً بها، ونظراً لاهميتها الكبيرة فقد أوجد الباحثون ودرسوا عدّة أنماطاً من المجموعات المرادفة لها مثل المجموعات المفتوحة من نمط α والمجموعات المفتوحة من نمط β والمجموعات شبه المفتوحة والمجموعات شبه المفتوحة من نمط α.

ذكّرنا في هذا الفصل أولاً ببعض المفاهيم والتعريفات التي تلزمنا في هذه الإطروحة ، ثم أوجدنا وعرفنا، العديد من الأنوع الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا، حيث أدخلنا تعريف المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ (أو اختصاراً $N\alpha$—مفتوحة) والمجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ (أو أختصاراً $N\alpha$—مغلقة) في الفضاءات ثنائية التبولوجيا، وعرّفنا المجموعات المفتوحة من النمط $S\alpha$، والمجموعات المغلقة من النمط $S\alpha$ في هذه الفضاءات، ثم عرّفنا المجموعات المفتوحة من النمط N^{α} (أو اختصاراً N^{α}—مفتوحة) والمجموعات المغلقة من النمط N^{α} (أو اختصاراً N^{α}—مغلقة) و المجموعات N^{α}—مفتوحة وN^{α}—مغلقة في آن واحد في الفضاءات ثنائية التبولوجيا، ودرسنا الخصائص الأساسية لهذه الأنماط الجديدة من المجموعات، وأوجدنا العلاقة بينها وبين المجموعات المفتوحة و المغلقة في هذه الفضاءات ثنائية التبولوجيا، ثم أدخلنا تعريف داخلية ولصاقة مجموعة وفقاً لكل نوع من هذه الانواع الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة، كما أعطينا عدداً من الأمثلة المساعدة.

1 – 1 تعاريف ومفاهيم أساسية في الفضاءات ثنائية التبولوجيا:

سنقدم في هذا الجزء من الفصل الأول تذكرة ببعض التعريفات الأساسية و المبرهنات في الفضاءات التبولوجية الأحادية والثنائية ، التي استقيناها من بعض المصادر، واستفدنا من معظمها في رسالتنا، ثم سنعرض بعض المفاهيم والتعريفات والمبرهنات والنتائج التي توصلنا إليها في هذا العمل.

تعريف $(\mathbf{1.1.1})$:$[16]$, $[11]$ ليكن (X , τ) فضاء تبولوجياً عندئذ:

١) المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة الفا مفتوحة (α–مفتوحة) في الفضاء التبولوجي (X , τ) إذا حققت الشرط $A \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A))$.

وتدعى متممة (أو مكملة A)، والتي سنرمز لها بـ$\grave{A}$ ، مجموعة الفا مغلقة (α–مغلقة) .

٢) المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة N^{α}–مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X , τ) إذا وجدت مجموعة الفا مفتوحة B غير خالية تحقق $\operatorname{cl}B \subseteq A$.

وتدعى متممة (أو مكملة A)، مجموعة N^{α}–مغلقة.

تعريف $(\mathbf{2.1.1})$:$[13]$ لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، وليكن كل من: τ_1, τ_2 تبولوجيا على X ، عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مفتوحة إذا كانت تنتمي إلى $\tau_1 \cup \tau_2$

- تدعى متممة أو مكملة A ، وسنرمز لها بـ$X - A$ ، مجموعة مغلقة.
- الفضاء (X, τ_1, τ_2) يدعى فضاء ثنائي التبولوجيا.

تعريف$(\mathbf{3.1.1})$: $[15]$ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ، عندئذ:

المجموعة الجزئية Aمن X تدعى مجموعة مفتوحة من النمط S، إذا كانت A مجموعة مفتوحة، فقط في أحد الفضائين (X, τ_i) لأجل $i = 1 , 2$.

- مكملتها تدعى مجموعة مغلقة من النمط S.

تعريف $(\mathbf{4.1.1})$: $[17]$ نقول عن فضاء تبولوجي (X , τ) إنه فضاء $E.D$ (Exteremally Disconnected) ، إذا حقق الشرط : $\operatorname{cl}(T) \in \tau, \forall T \in \tau$.

- سنذكّر أيضاً بتعريف المجموعات المفتوحة من النمط N (أو اختصاراً N–مفتوحة) ، ومتمماتها المجموعات المغلقة من النمط N (أو اختصاراً N-مغلقة) ، ومن ثم ندرس الخصائص الأساسية لها، ونوجد علاقتها مع المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا.

تعريف$(\mathbf{5.1.1})$: $[12]$ ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة مفتوحة من النمط N (أو اختصاراً $N-$مفتوحة) في الفضاء التبولوجي الثنائي إذا كانت مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$ حيث:

$\tau_1 \vee \tau_2$ هو التبولوجي الأعظمي الذي يحوي كلاً من τ_1 , τ_2

$(\tau_1 \vee \tau_2$: is the supremum topology on X contains $\tau_1 , \tau_2)$

- متممة المجموعة المفتوحة من النمط N، هي مجموعة مغلقة من النمط N (أو اختصاراً N-مغلقة) في الفضاء التبولوجي الثنائي.
- يرمز لأسرة كل المجموعات المفتوحة من النمط N، بـ$N.O(X)$.
- يرمز لأسرة كل المجموعات المغلقة من النمط N، بـ$N.C(X)$.

ملاحظة $(\mathbf{6.1.1})$:[12]

١) المجموعة المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي(X, τ_{1}, τ_2) ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1 ,2$.

٢) المجموعة المغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي(X, τ_{1}, τ_2) ليس بالضرورة مجموعة مغلقة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1 ,2$.

٣) كل مجموعه مفتوحة في أي من الفضاءات (X , τ_i) حيث $i = 1 ,2$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي(X, τ_{1}, τ_2).

٤) كل مجموعه مغلقة في أي من الفضاءات (X , τ_i) حيث $i = 1 ,2$ هي مجموعة مغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_{1}, τ_2).

ملاحظة $(\mathbf{7.1.1})$: من كل فضاء تبولوجي يمكن استحداث فضاء ثنائي التبولوجيا.

مثلاً ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً فإن (X , τ, τ) فضاء ثنائي التبولوجيا.

نتيجة $(\mathbf{8.1.1})$: كل فضاء ثنائي التبولوجيا ليس فضاء تبولوجيا، لكن يمكن استحداث فضاء تبولوجي منه، بأكثر من طريقة:

لو كان (X, τ_1, τ_2) فضاءً تبولوجياً ثنائياً فإن:

١) $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$ فضاء تبولوجي، حيث $\tau_1 \vee \tau_2$ التبولوجي الأعظمي على X الذي يحوي كلا من τ_1, τ_2

$(\tau_1 \vee \tau_2$: is the supremum topology on X contains $\tau_1 , \tau_2)$

٢) $(X , \tau_1 \cap \tau_2)$ فضاء تبولوجي.

ملاحظة$(\mathbf{9.1.1})$: ليكن (X, τ_{1}, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

اجتماع أسرة مجموعات مفتوحة من النمط N هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

ملاحظة $(\mathbf{10.1.1})$: ليكن (X , τ_1, τ_2) فضاء ثنائياً تبولوجياً على X عندئذ:

تقاطع عدد منته او غير منته من المجموعات المغلقة، من النمط N هي مجموعة مغلقة من النمط N.

تعريف $(11.1.1)$: داخلية مجموعة A من النمط N ($N - intA$)، هي اجتماع كل المجموعات N−مفتوحة، المحتواة في A.

ملاحظة $(12.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:

١) $N - \text{int}\, A \subset A$.

٢) $N - \text{int}\, A$ هي مجموعة N−مفتوحة.

نتيجة $(13.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، عندئذ:

$N - \text{int}\, A$، هي أكبر مجموعة N−مفتوحة، المحتواة في A.

مبرهنة $(14.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، عندئذ:

$N - \text{int}\, A = A \Leftrightarrow A$ هي مجموعة N−مفتوحة.

البرهان: A هي مجموعة N −مفتوحة و $A \subseteq A$ لذلك $A \subseteq \cup \{ B : B \subseteq A ,\ \text{مفتوحة} - N \text{ هي } B \}$

أيضاً: كل عنصر من الاجتماع هو مجموعة جزئية من A لذلك

$A = \cup \{ B : B \subseteq A ,\ \text{مفتوحة} - N \text{ هي } B \} = N - \text{int}\, A$.

العكس: بما أن $N - \text{int}\, A$ هي مجموعة N −مفتوحة، وبما أن $N - \text{int}\, A = A$ فإن:

A هي مجموعة N −مفتوحة.

ملاحظة $(15.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

$(N - \text{int}\, A) \cup (N - \text{int}\, B) \subseteq N - \text{int}\,(A \cup B)$.

تعريف $(16.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

تقاطع كل المجموعات N−مغلقة التي تحوي المجموعة A، تسمى لصاقة المجموعة A من النمط N و يرمز لها بالرمز: $N - \text{cl}\, A$، أي أن:

$N - \text{cl}\, A = \cap \{ B : B \supseteq A ,\ \text{مغلقة} - N \text{ هي } B \}$.

نتيجة$(17.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

$N - \text{cl}\, A$، هي مجموعة N−مغلقة.

البرهان : ينتج عن كون تقاطع المجموعات N−مغلقة، هي مجموعة N−مغلقة.

ملاحظة $(18.1.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، عندئذ:

A هي مجموعة N–مغلقة. $A \Leftrightarrow A = N - cl\,A$

البرهان: نعلم أن $N - cl\,A = \cap \{ B : B \supseteq A , B \text{ is } N - closed \}$

إذا كانت A هي مجموعة N – مغلقة، فإنها احدى المجموعات أعلاه

$\cap \{B : B \supseteq A , B \text{ is } N - closed\}$، وكل عنصر منها يحتوي A لذلك: تقاطع المجموعات السابقة هو A ومنه $N - cl\,A = A$.

العكس: بما أن $N - cl\,A = A$ و $N - cl\,A$ هي مجموعة N –مغلقة، فإن A هي مجموعة N –مغلقة.

1 – 2 المجموعات المفتوحة من النمط Nα في الفضاءات ثنائية التبولوجيا:

في هذا القسم سنعرف وندرس المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$، ومتمماتها المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$، وسنوجد الخصائص الأساسية لها، وسندرس علاقتها مع المجموعات المفتوحة والمغلقة والمجموعات الفا مفتوحة والفا مغلقة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا.

تعريف $(\mathbf{1.2.1})$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (أو اختصاراً $N\alpha$–مفتوحة) إذا كانت مجموعة الفا مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$ حيث:

$$\tau_1 \vee \tau_2 : \text{is the supremum topology on } X \text{ contains } \tau_1 , \tau_2$$

- متممة المجموعة المفتوحة من النمط $N\alpha$، هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي(أو اختصاراً $N\alpha$–مغلقة).
- يرمز لأسرة كل المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ بـ $N\alpha.O(X)$.
- يرمز لأسرة كل المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ بـ $N\alpha.C(X)$.

مثال $(\mathbf{2.2.1})$:

$$X = \{1,2,3\} , \tau_1 = \{X , \emptyset , \{1\}\}, \tau_2 = \{X , \emptyset , \{2\}\}$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X , \emptyset , \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

واضح أن كل من: (X, τ_1) , (X, τ_2) فضاءات تبولوجية لذلك فإن (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا، والمجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ فيه هي:

$$N\alpha.O(X) = N.O(X) = \{\emptyset , \{1\} , \{2\}, \{1,2\}, X\}$$

والمجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ في هذا الفضاء التبولوجي الثنائي هي:

$$N\alpha.C(X) = N.C(X) = \{\emptyset , \{2,3\} , \{1,3\}, \{3\}, X\}$$

مبرهنة$(3.2.1)$:

١) إن المجموعات المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي هي مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$ أي$N.O(X) \subset N\alpha.O(X)$، لكن العكس غير صحيح.

٢) إن المجموعات المغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي هي مجموعات مغلقة من النمط $N\alpha$ أي$N.C(X) \subset N\alpha.C(X)$، لكن العكس غير صحيح.

البرهان :

١) لتكن A مجموعة مفتوحة من النمط N .

نعلم أن$A \subseteq N - cl(A)$ ومنه

$$N - int(A) \subseteq N - int(N - cl(A))$$

لكن بما أن A مجموعة مفتوحة من النمط N فإن

$N - int(A) = A$ ومنه $A \subseteq N - int(N - cl(A)) \ldots\ldots(1)$

أيضاً لدينا $(2)\ldots\ldots$ $N - int(N - cl(A)) = N - int\Big(N - cl\big(N - int(A)\big)\Big)$

ومن ثم ينتج عن $(1),(2)$ أن :

$$A \subseteq N - int(N - cl(N - int(A)))$$

ومنه A هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

٢) بالطريقة نفسها يتم البرهان.

مثال يثبت أن العكس غير صحيح :

مثال $(4.2.1)$:

$$X = \{1,2,3\}, \tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}, \tau_2 = \{X, \emptyset\}$$

$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$$

واضح أن كلاً من: (X,τ_2) , (X,τ_1) فضاءات تبولوجية لذلك فإن (X,τ_1,τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا، والمجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ فيه هي:

$$N\alpha.O(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}, \{1,2\}, X\} \neq N.O(X) = \{\emptyset, \{1\}, X\}$$

والمجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ في هذا الفضاء ثنائي التبولوجي هي:

$$N\alpha.C(X) = \{\emptyset, \{2,3\}, \{2\}, \{3\}, X\} \neq N.C(X) = \{\emptyset, \{2,3\}, X\}$$

إن $\{1,2\},\{1,3\}$ مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$، لكن ليست مفتوحة من النمط N.

إن $\{2\},\{3\}$ مجموعات مغلقة من النمط $N\alpha$، لكن ليست مغلقة من النمط N.

نتيجة $(5.2.1)$:

إن المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء الثنائي، تختلف عن المجموعات المفتوحة من النمط N فيه، أيضاً المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا و المجموعات المغلقة من النمط N فيه هما مفهومان مختلفان.

ملاحظة $(\mathbf{6.2.1})$:

١) المجموعة المفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا (X, τ_1, τ_2) ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1\ ,2$.

٢) المجموعة المغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا (X, τ_1, τ_2) ليس بالضرورة مجموعة مغلقة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1\ ,2$.

مثال $(\mathbf{7.2.1})$:

$$X = \{1,2,3\}\ , \tau_1 = \{X\ , \emptyset\ , \{1\}\}, \tau_2 = \{X\ , \emptyset\ \} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X\ , \emptyset\ , \{1\}\}$$

واضح أن كلاً من: (X, τ_1) , (X, τ_2) فضاء تبولوجي لذلك فان (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي تبولوجي، والمجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ فيه هي:

$$N\alpha.\, O(X) = \{\emptyset\ , \{1\}\ , \{1,3\}, \{1,2\}, X\} \neq N.\, O(X) = \{\ \emptyset\ , \{1\}\ , X\ \}$$

والمجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ في هذا الفضاء ثنائي التبولوجيا هي:

$$N\alpha.\, C(X) = \{\emptyset\ , \{2,3\}\ , \{2\}, \{3\}, X\} \neq N.\, C(X) = \{\ \emptyset\ , \{2,3\}\ , X\ \}$$

$\{1,2\}, \{1,3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ لكنها ليست مفتوحة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1\ ,2$.

إن كلاً من $\{3\}, \{2\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ لكنها ليست مغلقة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1\ ,2$.

نتيجة $(\mathbf{8.2.1})$:

١) المجموعة المفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة فيه.

٢) المجموعة المغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2) ليس بالضرورة مجموعة مغلقة فيه.

البرهان: ينتج مباشرة عن الملاحظة (6.2.1).

مثال $(\mathbf{9.2.1})$: في المثال (7.2.1) :

$\{1,2\}, \{1,3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ لكنها ليست مفتوحة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1\ ,2$ ، ومن ثم $\{1,2\}$ ليست مجموعة مفتوحة.

$\{2\},\{3\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ لكنها ليست مغلقة في أي من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$ ومن ثم المجموعة $\{3\}$ ليست مجموعة مغلقة.

ملاحظة ($\mathbf{10.2.1}$):

١) المجموعة الفا مفتوحة في أي من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$ ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) .

٢) المجموعة الفا مغلقة في أي من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$ ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) .

مثال ($\mathbf{11.2.1}$): في المثال (2.2.1):

نلاحظ أن $\{2\}$ مجموعة الفا مغلقة في (X,τ_1) و $\{1\}$ مجموعة الفا مغلقة في (X,τ_2) لكن كل منهما ليست مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) .

نلاحظ أن $\{1,3\}$ مجموعة الفا مفتوحة في (X,τ_1) و $\{2,3\}$ مجموعة الفا مفتوحة في (X,τ_2) لكن كل منهما ليست مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) .

ملاحظة ($\mathbf{12.2.1}$):

١) المجموعة المفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) ليس بالضرورة مجموعة الفا مفتوحة في أي من الفضائين (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$.

٢) المجموعة المغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) ليس بالضرورة مجموعة الفا مغلقة في أي من الفضائين (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$.

مثال ($\mathbf{13.2.1}$): ليكن $X = \{1,2,3\}$

$$\tau_1 = \{X\,,\emptyset\,,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\},\tau_2 = \{X\,,\emptyset\,,\{2,3\}\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X\,,\emptyset\,,\{1\},\{2\},\{3\}\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$$

واضح أن كل من: $(X,\tau_1)\,,(X,\tau_2)$ فضاءات تبولوجية لذلك $(X,\tau_1\,,\tau_2)$ هو فضاء ثنائي التبولوجيا، والمجموعات المفتوحة من النمط N هي:

$$X\,,\emptyset\,,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$$

والمجموعات المغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي هي:

$$\emptyset\,,\{2,3\}\,,\{1,3\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{3\},X$$

إن كلا من $\{2\},\{3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط N ، ومن ثم كلا منهما مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ ، لكنها ليست مجموعة الفا مفتوحة في أي من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$.

$\{1,2\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط N، ومن ثم مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ ، لكنها ليست الفا مغلقة في أي من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2$.

ملاحظة $(14.2.1)$:

١) كل مجموعة مفتوحة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2).

٢) كل مجموعة مغلقة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2).

مبرهنة $(15.2.1)$:

ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ فيه.

البرهان: لتكن A مجموعة مفتوحة ولنبرهن أنها مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، بما أن A مجموعة مفتوحة فإن $A \in \tau_1 \cup \tau_2$ ، لكن $\tau_1 \cup \tau_2 \subset \tau_1 \vee \tau_2$ ومنه $A \in \tau_1 \vee \tau_2$ ومن ثم :

A مجموعة مفتوحة من النمط N ومن ثم هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

ملاحظة $(16.2.1)$:

عكس المبرهنة (15.2.1)، ليس صحيحاً بشكل عام كما يوضح المثال الآتي.

مثال $(17.2.1)$:

في مثال (13.2.1) إن كل من $\{2\},\{3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ ، لكنها ليست مفتوحة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ ومن ثم كل من $\{2\},\{3\}$ ليست مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي .

$\{1,2\}$ مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ ، لكنها ليست مغلقة في أي من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1,2$، ومن ثم $\{1,2\}$ ليست مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي الثنائي .

مبرهنة$(18.2.1)$: في الفضاء ثنائي التبولوجيا :

$$A \text{ مجموعة } N\alpha- \text{ مفتوحة} \Leftrightarrow A \subseteq N-\operatorname{int}\left(N-\operatorname{cl}\left(N-\operatorname{int}(A)\right)\right).$$

البرهان : بما أن A مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي فإن A مجموعة الفا مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$ ومنه يتم المطلوب.

مبرهنة$(19.2.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، عندئذ:

اجتماع أي أسرة مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$ هو مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

البرهان : لتكن $\{A_\alpha / \alpha \in I\}$أسره مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$، فيكون لأجل كل $\alpha \in I$،

$$\Rightarrow A_\alpha \subset N-\operatorname{int}\left(N-\operatorname{cl}\left(N-\operatorname{int} A_\alpha\right)\right)$$

$\Rightarrow \cup A_\alpha \subset \cup \left(N-\text{int}\left(N-\text{cl}\ (N-\text{int}\, A_\alpha)\right)\right)$ (اخذنا الاجتماع للطرفين)

$\Rightarrow \cup A_\alpha \subset N-\text{int}\left(\cup\left(N-\text{cl}\ (N-\text{int}\, A_\alpha)\right)\right)$ (حسب مبرهنة (15.1.1))

$\Rightarrow \cup A_\alpha \subset N-\text{int}\left(N-\text{cl}\left(\cup(N-\text{int}\, A_\alpha)\right)\right)$

[لان $(N-\text{cl}\ (A) \cup N-\text{cl}\ (B) \subset N-\text{cl}\ (A \cup B))$]

$\Rightarrow \cup A_\alpha \subset N-\text{int}\left(N-\text{cl}\left(\ (N-\text{int}(\cup A_\alpha))\right)\right)$ (حسب مبرهنة(15.1.1))

ومنه $\cup A_\alpha$ مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

نتيجة ($\mathbf{20.2.1}$): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، عندئذ:

تقاطع أي عدد من مجموعات $N\alpha$–مفتوحة هو مجموعة $N\alpha$–مفتوحة.

البرهان :

لتكن $\{A_\alpha \,/\, \alpha \in I\}$ أسره مجموعات $N\alpha$–مفتوحة ، فيكون لأجل كل $\alpha \in I$،

$\Rightarrow\ A_\alpha \subset N-\text{int}\left(N-\text{cl}\ (N-\text{int}\, A_\alpha)\right)$

$\Rightarrow\ \cap\ A_\alpha \subset\ \cap \left(N-\text{int}\left(N-\text{cl}\ (N-\text{int}\, A_\alpha)\right)\right)$

$\Rightarrow\ \cap\ A_\alpha \subset N-\text{int}\left(\cap \left(N-\text{cl}\ (N-\text{int}\, A_\alpha)\right)\right)$

$\Rightarrow\ \cap\ A_\alpha \subset N-\text{int}\left(N-\text{cl}\left(\cap\ (N-\text{int}\, A_\alpha)\right)\right)$

$\Rightarrow\ \cap\ A_\alpha \subset N-\text{int}\left(N-\text{cl}\left(\ (N-\text{int}(\cap\, A_\alpha))\right)\right)$

ومنه $\cap\ A_\alpha$ مجموعة $N\alpha$–مفتوحة .

ملاحظة ($\mathbf{21.2.1}$): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X ، عندئذ:

١) إن X و $\emptyset$ مجموعتان مفتوحتان من النمط $N\alpha$.

٢) إن X و $\emptyset$ مجموعتان مغلقتان من النمط $N\alpha$.

مبرهنة($\mathbf{22.2.1}$): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:

المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ تشكل تبولوجيا على X.

البرهان : ينتج عن مبرهنة (19.2.1) و مبرهنة (20.2.1) و مبرهنة (21.2.1).

مبرهنة ($\mathbf{23.2.1}$): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X، ولتكن A مجموعة جزئية من X عندئذ:

A مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة $\Leftrightarrow$ توجد مجموعة N –مفتوحة G تحقق

$G \subseteq A \subseteq N-\text{int}(N-\text{cl}(G))$.

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن A مجموعة $N\alpha-$ مفتوحة ومنه حسب تعريف المجموعة $N\alpha-$ مفتوحة، فإنه يتحقق $A\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(A)))$ ومنه نجد أن:

$N-\mathrm{int}(A)\subseteq A\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(A)))$ بوضع $G=N-\mathrm{int}(A)$ نجد أن $G\subseteq A\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(G))$.

$\Rightarrow$: لنفرض أن G مجموعة $N-$ مفتوحة حيث $G\subseteq A\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(G))$ ، نعلم أن $N-\mathrm{int}(A)$ هي أكبر مجموعة $N-$ مفتوحة محتواه في A وأن G مجموعة $N-$ مفتوحة تحقق $G\subseteq A$ ومن ثم $G\subseteq N-\mathrm{int}(A)$ ومنه $N-\mathrm{cl}(G)\subseteq N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(A))$ ومنه $N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(G))\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(A)))$ ، لكن $G\subseteq A\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(G))$ ومن ثم $A\subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(A)))$ ومنه A مجموعة $N\alpha-$ مفتوحة.

1 – 3 داخلية و لصاقة مجموعة من النمط Nα :

سنستخدم في هذا القسم من الفصل الأول المفهوم الجديد للمجموعات المفتوحة، المغلقة من النمط $N\alpha$ في تعريف داخلية و لصاقة مجموعة ما من النمط $N\alpha$، في الفضاءات ثنائية التبولوجيا، وإيجاد الخصائص الأساسية لهما.

تعريف $(\mathbf{1.3.1})$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، ولتكن $A\subseteq X$ ، أي عنصر $x\in X$ يدعى نقطة داخلية من النمط $N\alpha$ للمجموعة A، إذا وجدت V مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، تحقق $x\in V\subset A$.

مثال $(\mathbf{2.3.1})$: ليكن $X=\{1,2,3\}$

$$\tau_1=\{X,\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\},\tau_2=\{X,\emptyset,\{2,3\}\}\Rightarrow$$
$$\tau_1\vee\tau_2=\{X,\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$$

واضح أن كلاً من: $(X,\tau_1)\,,(X,\tau_2)$ فضاءات تبولوجية لذلك فان (X,τ_1,τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا، إن كلاً من 3 ,2 ,1 هو نقطة داخلية من النمط $N\alpha$ للمجموعة $A=\{1,2,3\}$.

تعريف $(\mathbf{3.3.1})$: مجموعة كل النقاط الداخلية من النمط $N\alpha$ للمجموعة A، تدعى داخلية A من النمط $N\alpha$ ويرمز لها بالرمز: $N\alpha-\mathrm{int}(A)$

مثال $(\mathbf{4.3.1})$: في المثال $(2.2.1)$ بفرض $A=\{1,2\}$ فان: $N\alpha-\mathrm{int}(A)=A$.

مبرهنة $(\mathbf{5.3.1})$: داخلية A من النمط $N\alpha$ ($N\alpha-\mathrm{int}(A)$)، تسأوي اجتماع كل المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$، المحتواة في A.

البرهان: لنبرهن أن $N\alpha-\mathrm{int}(A)=\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}$.

بفرض $x\in N\alpha-\mathrm{int}(A)$ ومنه يوجد B مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، تحقق $x\in B\subset A$ ومنه:

$x\in\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}$ ومنه:

$N\alpha-\mathrm{int}(A)\subseteq\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}$.

لبرهان العكس: لنفترض أن $x\in\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}$ ومنه:

$x\in B_0$، B_0 مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، محتواة في A ومنه:

يوجد B_0 مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، تحقق $x\in B_0\subseteq A$ ومنه: $x\in N\alpha-\mathrm{int}(A)$ ومنه:

$\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}\subseteq N\alpha-\mathrm{int}(A)$

ومنه: $N\alpha-\mathrm{int}(A)=\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}$.

ملاحظة $(\mathbf{6.3.1})$: لتكن A مجموعة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، فان الخواص الآتية محققة :

١) $N\alpha-\mathrm{int}(A)\subseteq A$.

٢) $N\alpha-\mathrm{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

ملاحظة $(\mathbf{7.3.1})$: $N\alpha-\mathrm{int}(A)$، هي أكبر مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، محتواة في A.

البرهان: ينتج عن كون $N\alpha-\mathrm{int}(A)=\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\alpha\ \text{هي}\ B\right\}$.

مبرهنة $(\mathbf{8.3.1})$: لتكن A مجموعة ما في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، عندئذ:

A هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ إذا وفقط إذا كانت $A=N\alpha-\mathrm{int}(A)$.

البرهان:

A هي مجموعة $N-$ مفتوحة و $A\subseteq A$ لذلك $A\in\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\ \text{هي}\ B\right\}$

أيضاً: كل عنصر من الاجتماع هو مجموعة جزئية من A لذلك

$A=\cup\left\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}\ -N\ \text{هي}\ B\right\}=N\alpha-\mathrm{int}(A)$

العكس: بما أن $N\alpha-\mathrm{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، وبما أن

$N\alpha-\mathrm{int}(A)=A$ فإن: A هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

مبرهنة $(\mathbf{9.3.1})$: لتكن كل من A,B مجموعة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، فإن الخواص الآتية محققة:

١) $A\subseteq B\Longrightarrow N\alpha-\mathrm{int}(A)\subseteq N\alpha-\mathrm{int}(B)$.

٢) $N\alpha-\text{int}(A)\cup N\alpha-\text{int}(B)\subseteq N\alpha-\text{int}(A\cup B)$.

٣) $N\alpha-\text{int}(A\cap B)=N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)$.

٤) $N\alpha-\text{int}(N\alpha-\text{int}(A))=N\alpha-\text{int}(A)$.

البرهان:

١) ينتج عن مبرهنة (5.3.1) .

٢) $N\alpha-\text{int}(A)\subseteq A$ و $N\alpha-\text{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$،

$N\alpha-\text{int}(B)\subseteq B$ و $N\alpha-\text{int}(B)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$،

وبما أن: اجتماع أي مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$، هو مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ فإن:

$N\alpha-\text{int}(A)\cup N\alpha-\text{int}(B)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

أيضاً $N\alpha-\text{int}(A)\cup N\alpha-\text{int}(B)\subseteq A\cup B$ ومنه:

$N\alpha-\text{int}(A)\cup N\alpha-\text{int}(B)$ هي أحدى المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ الجزئية من $A\cup B$ ، لكن $N\alpha-\text{int}(A\cup B)$ هو أكبر مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ جزئية من $A\cup B$ ومنه: $N\alpha-\text{int}(A)\cup N\alpha-\text{int}(B)\subseteq N\alpha-\text{int}(A\cup B)$.

٣) بما أن $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$ و من البند (1) نحصل على ان

$N\alpha-\text{int}(A\cap B)\subseteq N\alpha-\text{int}(A)$ و $N\alpha-\text{int}(A\cap B)\subseteq N\alpha-\text{int}(B)$.

ومن ثم $N\alpha-\text{int}(A\cap B)\subseteq N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)$ .... (1)

بما أن $N\alpha-\text{int}(A)$ و $N\alpha-\text{int}(B)$ مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$ ،

وبما أن: تقاطع أي مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$، هو مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ فإن:

$N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

أيضاً من مبرهنة (6.3.1) البند (1)، $N\alpha-\text{int}(A)\subseteq A$ و $N\alpha-\text{int}(B)\subseteq B$ ومن ثم

$N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)\subseteq A\cap B$ ومنه:

$N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)$ هي أحدى المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ الجزئية من $A\cap B$ ،لكن $N\alpha-\text{int}(A\cap B)$ هو أكبر مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ جزئية من $A\cap B$ ومنه:

$N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)\subseteq N\alpha-\text{int}(A\cap B)$ .... (2)

ومن (1) و (2) نحصل على أن:

$N\alpha-\text{int}(A\cap B)=N\alpha-\text{int}(A)\cap N\alpha-\text{int}(B)$.

٣) بما أن $N\alpha-\text{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$، ومن مبرهنة (8.3.1) نحصل على أن $N\alpha-\text{int}(N\alpha-\text{int}(A))=N\alpha-\text{int}(A)$.

تعريف $(10.3.1)$: تقاطع كل المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ التي تحوي المجموعة A، تسمى لصاقة المجموعة A من النمط $N\alpha$ و يرمز لها بالرمز: $N\alpha - cl(A)$، أي:

$N\alpha - cl(A) = \cap \{ B : B \supset A ,$ مغلقة $- N\alpha$ هي $B \}$.

نتيجة $(11.3.1)$: بما أن تقاطع المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$، هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ فان $N\alpha - cl(A)$، هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$.

ملاحظة $(12.3.1)$: لتكن A مجموعة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، فان:

$A \subseteq N\alpha - cl(A)$.

مبرهنة $(13.3.1)$: $N\alpha - cl(A)$، هي أصغر مجموعة مغلقة من النمط N، تحوي A.

البرهان: ينتج عن كون $N\alpha - cl(A) = \cap \{ B : B \supset A , B \text{ is } N\alpha - closed\}$.

مبرهنة $(14.3.1)$: $A = N\alpha - cl(A)$ ، إذا وفقط إذا ، كانت A هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$.

البرهان: نعلم أن $N\alpha - cl(A) = \cap \{ B : B \supset A , B \text{ is } N\alpha - closed \}$

إذا كانت A هي مجموعة $N\alpha$ – مغلقة، فإنها أحدى المجموعات أعلاه

$\cap \{B : B \supseteq A , B \text{ is } N\alpha - closed\}$، وكل عنصر منها يحتوي A لذلك: تقاطع المجموعات السابقة هو A ومنه $N\alpha - cl(A) = A$.

العكس: بما أن $N\alpha - cl(A) = A$ و $N\alpha - cl(A)$ هي مجموعة $N\alpha$ – مغلقة، فإن A هي مجموعة $N\alpha$ – مغلقة.

ملاحظة $(15.3.1)$: لتكن كل من A, B مجموعة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، فإن الخواص الآتية محققة:

١) $A \subseteq B \Longrightarrow N\alpha - cl(A) \subseteq N\alpha - cl(B)$.

٢) $N\alpha - cl(A \cap B) \subseteq N\alpha - cl(A) \cap N\alpha - cl(B)$.

٣) $N\alpha - cl(A \cup B) = N\alpha - cl(A) \cup N\alpha - cl(B)$.

٤) $N\alpha - cl(N\alpha - cl(A)) = N\alpha - cl(A)$.

البرهان:

١) ينتج عن التعريف(10.3.1).

٢) بما أن $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$ و من البند (1) نحصل على ان

$N\alpha - cl(A \cap B) \subseteq N\alpha - cl(A)$ و $N\alpha - cl(A \cap B) \subseteq N\alpha - cl(B)$.

ومن ثم $N\alpha - cl(A \cap B) \subseteq N\alpha - cl(A) \cap N\alpha - cl(B)$.

٣) بما أن $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ و من البند (1) نحصل على ان

$N\alpha-cl(A)\subseteq N\alpha-cl(A\cup B)$ و $N\alpha-cl(B)\subseteq N\alpha-cl(A\cup B)$.

ومن ثم $N\alpha-cl(A)\cup N\alpha-cl(B)\subseteq N\alpha-cl(A\cup B)$ .... (1)

بما أن $N\alpha-cl(A)$ و $N\alpha-cl(B)$ مجموعات مغلقة من النمط $N\alpha$،

وبما أن: اتحاد أي مجموعات مغلقة من النمط $N\alpha$، هو مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ فإن:

$N\alpha-cl(A)\cup N\alpha-cl(B)$ هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$.

أيضاً من مبرهنة (12.3.1) البند (1)، $A\subseteq N\alpha-cl(A)$ و $B\subseteq N\alpha-cl(B)$ و يؤدي إلى أن $A\cup B\subseteq N\alpha-cl(A)\cup N\alpha-cl(B)$ ومنه:

$N\alpha-cl(A)\cup N\alpha-cl(B)$ هي أحدى المجموعة المغلقة من النمط $N\alpha$ و تحوي $A\cup B$، لكن $N\alpha-cl(A\cup B)$ هو اصغر مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ تحوي $A\cup B$ ومنه:

$N\alpha-cl(A\cup B)\subseteq N\alpha-cl(A)\cup N\alpha-cl(B)$ .... (2)

ومن (1) و (2) نحصل على أن:

$N\alpha-cl(A\cup B)=N\alpha-cl(A)\cup N\alpha-cl(B)$.

٤) بما أن $N\alpha-cl(A)$ هي مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$، ومن مبرهنة (14.3.1) نحصل على أن $N\alpha-cl(N\alpha-cl(A))=N\alpha-cl(A)$.

مبرهنة (16.3.1): ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، عندئذ:

$$(N\alpha-intA)' = N\alpha-cl(A')$$

البرهان :

$$(N\alpha-int(A))' = (\cup\{B : B\subseteq A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\alpha \text{ هي } B\})'$$

$$=\cap\{B' : B'\subseteq A'\ ,\ \text{مغلقة}-N\alpha \text{ هي } B'\}$$

$$=\cap\{F=B' : F\supseteq A'\ ,\ \text{مغلقة}-N\alpha \text{ هي } F\}$$

$$=N\alpha-cl(A')$$

مبرهنة (17.3.1):

A مجموعة $N\alpha-$ مغلقة $\Leftrightarrow$ $A\supseteq\Big(N-cl\big(N-int\,(N-cl\,A)\big)\Big)$.

البرهان :

A' مجموعة $N\alpha-$ مفتوحة $\Leftrightarrow$ A مجموعة $N\alpha-$ مغلقة

$$\Leftrightarrow\ \grave{A} \subseteq N - \text{int}\left(N - \text{cl}\left(N - \text{int}(\grave{A})\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\ (\grave{A})\grave{} \supseteq (\ N - \text{int}\left(N - \text{cl}\left(N - \text{int}(\grave{A})\right)\right)\grave{)}$$
$$\Leftrightarrow\ A \supseteq N - \text{cl}(\ N - \text{cl}\left(N - \text{int}(\grave{A})\right)\grave{)}$$
$$\Leftrightarrow\ A \supseteq N - \text{cl}\ \left(N - \text{int}(\ \left(N - \text{int}(\grave{A})\right)\grave{)}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ A \supseteq N - \text{cl}N - \text{int}(N - \text{int}\ \grave{A}\ \grave{)}$$
$$\Leftrightarrow\ A \supseteq N - \text{cl}\ \left(N - \text{int}\ \left(N - \text{cl}(\ \grave{A}\ \grave{)}\right)\ \right)$$
$$\Leftrightarrow\ A \supseteq N - \text{cl}\ (N - \text{int}\ (N - \text{cl}A)\ )$$

ملاحظة $(\mathbf{18.3.1})$:

لتكن$T = \{\ A : A \text{ is } N - \text{open}\}, T^* = \{\ A : A \text{ is } N\alpha -\ \text{open}\}$عندئذ:$T \subseteq T^*$.

البرهان : لتكن $A \in T$ ومنه A مجموعة $N-$مفتوحة ومنه فإن A مجموعة $N\alpha-$ مفتوحة ،
ومنه$A \in\ T^*$ ومن ثم$T \subseteq T^*$.

مبرهنة $(\mathbf{19.3.1})$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ، و$(X, \tau_1 \vee \tau_2)$ فضاء$E.D$ ولتكن A مجموعة جزئية من X عندئذ :

A مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$N - \text{cl}(A) = N - \text{int}(N - \text{cl}\ N - \text{int}(A))$$

البرهان :

بما أن A مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ فإن :$A \subseteq N - \text{int}(N - \text{cl}\ N - \text{int}(A))$

الآن نعلم أن $N - \text{int}\ (A) \subseteq A$ ومنه $N - \text{cl}\ \left(N - \text{int}(A)\right) \subseteq N - \text{cl}\ (A)$ ومنه

$N - \text{int}(N - \text{cl}\ N - \text{int}(A)) \subseteq N - \text{int}(N - \text{cl}\ A)$ وبما أن

$N - \text{int}(N - \text{cl}\ A) \subseteq N - \text{cl}\ (A)$ فإن

$$N - \text{int}(N - \text{cl}(\ N - \text{int}(A))) \subseteq N - \text{cl}\ (A) \ldots\ldots (3)$$

أيضاً بما أن A مجموعة شبه مفتوحة (لانها مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$) فإن :

لكن $N\text{-cl}(A) \subseteq N-cl(N-int(A))$ ومنه $A \subseteq N-cl(N-int(A))$

ومنه $E.D$ فضاء $(X, \tau_1 \vee \tau_2)$ ، لأن $N-cl\big(N-int(A)\big)$ مجموعة مفتوحة

ومنه $N-int\Big(N-cl\big(N-int(A)\big)\Big) = N-cl(N-int(A))$

$$N-cl(A) \subseteq N-int(N-cl(N-int(A))) \quad \ldots\ldots (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow N-cl(A) = N-int(N-cl(N-int(A)))$$

العكس : لنفرض أنه $N-cl(A) = N-int(N-cl(N-int(A)))$

ومنه : $A \subseteq N-cl(A) = N-int(N-cl(N-int(A)))$ ومنه :

$$A \subseteq N-int(N-cl(N-int(A)))$$

ومنه : A مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

مبرهنة $(\mathbf{20.3.1})$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجيا ثنائيا ، ولتكن A مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ ، عندئذ:

$$N-cl\Big(N-int\big(N-cl(N-int\,A)\big)\Big) \subseteq N-cl\,A \,.$$

البرهان :

لنفترض أن A مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ ، ولنبرهن أن

$$N-cl\Big(N-int\big(N-cl(N-int\,A)\big)\Big) \subseteq A \,.$$

بما أن A مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ ، فإن

$$N-cl\big(N-int(N-cl\,A)\big) \subseteq A$$

وبما أن: $N-int(N-cl\,A) \subseteq N-cl\big(N-int(N-cl\,A)\big) \subseteq A$

فإن $N-int(N-cl\,A) \subseteq A \ldots (i)$

الآن بما أن: $N-int(A) \subseteq A$ فان $N-cl\big(N-int(A)\big) \subseteq N-cl\,A$ ومنه

$N-\mathrm{int}\big(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\,A)\big)\subseteq N-\mathrm{int}(\,N-\mathrm{cl}\,A)\ \ldots(\mathrm{ii})$ ومنه من$(\mathrm{i}),(\mathrm{ii})$ نجد أن

$N-\mathrm{int}\big(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\,A)\big)\subseteq A$ ومنه

$N-\mathrm{cl}\Big(\,N-\mathrm{int}\big(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\,A)\big)\Big)\subseteq N-\mathrm{cl}\,A$.

مبرهنة $(\mathbf{21.3.1})$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، عندئذ:

إذا كانت المجموعتان $X\,,\emptyset$ هما الوحيدتان المفتوحتان من النمط N والمغلقتان من النمط N في آن واحد ، عندئذ تكون المجموعتان $X\,,\emptyset$ هما الوحيدتان المفتوحتان من النمط $N\alpha$ والمغلقتين من النمط $N\alpha$ في آن واحد .

البرهان :

لتكن $X\,,\emptyset$ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان من النمط N والمغلقتان من النمط N في آن واحد ولنفرض جدلا أنه توجد مجموعة A مفتوحة من النمط $N\alpha$ ومغلقة من النمط $N\alpha$ في آن واحد .

بما أن A مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ فإن :

$$A\subseteq N-\mathrm{int}\big(\,N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\,A)\big)\ \ldots\ldots(1)$$

بما أن A مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$ فإن :

$$N-\mathrm{cl}\big(\,N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}\,A)\big)\subseteq A\ \ldots\ldots(2)$$

أيضاً $N-\mathrm{cl}\big(\,N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}\,A)\big)\subseteq A$ وبما أن:

$N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}\,A)\subseteq N-\mathrm{cl}\big(\,N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}\,A)\big)\subseteq A$ فإن

$$N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}\,A)\subseteq A\ \ldots(\mathrm{i})$$

الآن بما أن: $N-\mathrm{int}(A)\subseteq A$ فان $N-\mathrm{cl}\big(\,N-\mathrm{int}(\,A)\big)\subseteq N-\mathrm{cl}\,A$ ومنه

$N-\mathrm{int}\big(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\,A)\big)\subseteq N-\mathrm{int}(\,N-\mathrm{cl}\,A)\ \ldots(\mathrm{ii})$ ومنه من$(\mathrm{i}),(\mathrm{ii})$ نجد أن

$$N-\mathrm{int}\big(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\,A)\big)\subseteq A\ \ldots\ldots(3)$$

بما أن A مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ فإن $\grave{A}$ مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$

$$\Leftrightarrow \quad N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}\left(N-\mathrm{int}(\grave{A})\right)) \subseteq \grave{A}$$
$$\Leftrightarrow \ (\grave{A})\grave{} \subseteq [\ N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\ (\grave{A}\ )))]\grave{}$$
$$\Leftrightarrow \ A \subseteq \ N-\mathrm{cl}[N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\ (\grave{A}\ ))]\grave{}$$
$$\Leftrightarrow \ A \subseteq N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}[N-\mathrm{int}\ (\grave{A})]\grave{}\ )$$
$$\Leftrightarrow \ A \subseteq N-\mathrm{cl}\ (N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}[\ \grave{A}\ ]\grave{}))$$
$$\Leftrightarrow \ A \subseteq N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(\ N-\mathrm{cl}\ (A))) \ldots\ldots (4)$$

ومن ثم ينتج عن$(2),(4)$ أن :

$$N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(\ N-\mathrm{cl}\ (A))) \subseteq A \subseteq N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}(\ N-\mathrm{cl}(\ A))) \ldots.(5)$$

ومن ثم ينتج عن$(1),(3)$ أن :

$$N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\ A)) \subseteq A \subseteq N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\ A)) \ldots\ldots (6)$$

ومن ثم ينتج عن$(6),(5)$ أن :

$$N-\mathrm{int}(N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\ (A))) = \ A \ , \qquad N-\mathrm{cl}(N-\mathrm{int}\ (N-\mathrm{cl}\ (A))) = \ A$$

ومن ثم : المجموعة A مفتوحة من النمط N ومغلقة من النمط N في آن واحد ، وهذا يناقض كون المجموعتين $X,\emptyset$ هما الوحيدتان المفتوحتان من النمط N والمغلقتان من النمط N في آن واحد ، ومن ثم: المجموعتان $X,\emptyset$ هما الوحيدتان المفتوحتان من النمط $N\alpha$ والمغلقتان من النمط $N\alpha$ في آن واحد.

- العلاقة بين الداخلية واللصاقة لمجموعة ما ، بأشكالها المختلفة، توضحة المبرهنة الآتية :

مبرهنة $(\mathbf{22.3.1})$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً عندئذ:

$$.\ \ N-\mathrm{int}(A) \subseteq \ N\alpha-\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq N\alpha-\mathrm{cl}(A\ ) \ \subseteq N-\mathrm{cl}(A)$$

البرهان :

كل مجموعة $N-$ مفتوحة هي مجموعة $N\alpha-$ مفتوحة ، ومنه أسرة كل المجموعات

$N-$ مفتوحة هي أسرة جزئية من أسرة كل المجموعة $N\alpha-$ مفتوحة لذلك

$$N-\mathrm{int}A \subseteq N\alpha-\mathrm{int}A \ldots\ldots(1)$$

أيضاً : أسرة كل المجموعات $N-$ مغلقة هي مجموعة جزئية من أسرة كل المجموعات

$N\alpha-$ مغلقة لذلك $N\alpha-clA \subseteq N-clA \dots\dots (2)$

من المعلوم أيضاً : $N\alpha-intA \subseteq A \dots\dots (3)$

$(1),(2),(3) \Rightarrow N-intA \subseteq N\alpha-intA \subseteq A \subseteq N\alpha-clA \subseteq N-clA$.

1 – 4 المجموعات المفتوحة من النمط $S\alpha$ في الفضاءات ثنائية التبولوجيا:

في هذا البند عرفنا المجموعات المفتوحة من النمط $S\alpha$، ومتمماتها المجموعات المغلقة من النمط $S\alpha$، ودرسنا الخصائص الأساسية لها، وأوجدنا علاقتها مع المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا. أيضاً أوجدنا العلاقة بين هذه المجموعات والمجموعات المفتوحة والمغلقة من النمط N ، ثم علاقتها مع المجموعات المفتوحة والمغلقة من النمط $N\alpha$ ومع المجموعات المفتوحة والمغلقة من النمط S.

تعريف ($\mathbf{1.4.1}$): ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ، عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$، إذا كانت A مجموعة الفا مفتوحة، فقط في أحد الفضاءات (X,τ_i) لأجل $i=1,2$.

- تدعى مكملتها، مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$.

مثال ($\mathbf{2.4.1}$):

$$X=\{1,2,3\}, \tau_1=\{X,\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}, \tau_2=\{X,\emptyset,\{2,3\}\} \Rightarrow$$

$\{2,3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي.

$\{1\}$ مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$ في الفضاء التبولوجي الثنائي .

نتيجة ($\mathbf{3.4.1}$): ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجيا ثنائيا عندئذ:

١) المجموعة المفتوحة من النمط S، ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

٢) المجموعة المغلقة من النمط S، ليست بالضرورة مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$.

المثال الآتي يوضح :

مثال ($\mathbf{4.4.1}$): في مثال (2.4.1)

$\{1,2\}$ مجموعة مفتوحة من النمط S، لكنها ليست مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

$\{3\}$ مجموعة مغلقة من النمط S، لكنها ليست مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$.

مبرهنة ($\mathbf{5.4.1}$): ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، عندئذ:

١) إذا كانت كل مجموعة الفا مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X , τ_i) هي مجموعة مفتوحة فيه ،لأجل أي $i = 1,2$ ، فإن كل مجموعة مفتوحة من النمط S، هي مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

٢) إذا كانت كل مجموعة الفا مغلقة في الفضاء التبولوجي (X , τ_i) هي مجموعة مغلقة فيه ،لأجل أي $i = 1,2$ ، فإن كل مجموعة مغلقة من النمط S، هي مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$.

البرهان:

١) لتكن A مجموعة مفتوحة من النمط S، ولنبرهن أنها مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

بما أن A مجموعة مفتوحة من النمط S، فإنها مجموعة مفتوحة في أحد الفضاءات (X, τ_i) فقط لأجل $i = 1 , 2$، ومنه A مجموعة الفا مفتوحة في أحد الفضاءات (X, τ_i) لأجل $i \in \{1 , 2\}$ ، إذا فرضنا أن A مجموعة الفا مفتوحة في أحد الفضاءات (X, τ_j) لأجل $j \in \{1 , 2\}$ حيث $j \neq i$ ، ومن ثم حسب الفرض كل مجموعة الفا مفتوحة في (X , τ_i) هي مجموعة مفتوحة فيه، نجد أن A مجموعة مفتوحة في الفضاء (X, τ_j) ، وهذا يناقض كون A مجموعة مفتوحة من النمط S، ومن ثم A ليست مجموعة الفا مفتوحة في أحد الفضاءات (X, τ_j) لأجل $j \in \{1 , 2\}$ حيث $j \neq i$ ، ومنه A مجموعة الفا مفتوحة في أحد الفضاءات (X, τ_i) فقط لأجل $i \in \{1 , 2\}$ ، ومن ثم A مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

٢) لتكن A مجموعة مغلقة من النمط S، ولنبرهن أنها مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$.

بما أن A مجموعة مغلقة من النمط S، فأنها مجموعة مغلقة في أحد الفضاءات (X, τ_i) فقط لأجل $i = 1 , 2$، ومنه A مجموعة الفا مغلقة في أحد الفضاءات (X, τ_i) لأجل $i \in \{1 , 2\}$ ، إذا فرضنا ان A مجموعة الفا مغلقة في أحد الفضاءات (X, τ_j) لأجل $j \in \{1 , 2\}$ حيث $j \neq i$ ، ومن ثم حسب الفرض كل مجموعة الفا مغلقة في (X , τ_i) هي مجموعة مغلقة فيه، نجد أن A مجموعة مغلقة في الفضاء (X, τ_j) ، وهذا يناقض كون A مجموعة مغلقة من النمط S، ومن ثم A ليست مجموعة الفا مغلقة في أحد الفضاءات (X, τ_j) لأجل $j \in \{1 , 2\}$ حيث $j \neq i$ ، ومنه A مجموعة الفا مغلقة في أحد الفضاءات (X, τ_i) فقط لأجل $i \in \{1 , 2\}$ ومن ثم A مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$.

ملاحظة (6.4.1):

ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ، عندئذ:

٣) المجموعة المفتوحة من النمط $S\alpha$، ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط S .

٤) المجموعة المغلقة من النمط $S\alpha$، ليست بالضرورة مجموعة مغلقة من النمط S .

كما يوضح المثال الآتي.

مثال (7.4.1): في المثال (7.2.1) :

$\{1,2\}$ هي مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$ لكنها ليست مجموعة مفتوحة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثنائي.

$\{3\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط $S\alpha$ لكنها ليست مجموعة مغلقة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثنائي.

مبرهنة $(\mathbf{8.4.1})$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجيا ثنائيا عندئذ:

١) المجموعة المفتوحة من النمط $S\alpha$، ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

٢) المجموعة المفتوحة من النمط $S\alpha$، ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

البرهان: ينتج مباشرة عن ملاحظة (10.2.1).

مبرهنة $(\mathbf{9.4.1})$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجيا ثنائيا عندئذ:

١) المجموعة المفتوحة من النمط $N\alpha$، ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

٢) المجموعة المفتوحة من النمط $N\alpha$، ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة من النمط $S\alpha$.

البرهان: ينتج مباشرة عن مبرهنة (12.2.1).

1 – 5 المجموعات المفتوحة من النمط N^{α} في الفضاءات ثنائية التبولوجية:

تعريف $(\mathbf{1.5.1})$:

ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:

تدعى المجموعة الجزئية A من X مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ ($N\alpha-$مفتوحة)غير خالية B تحقق $N - clB \subseteq A$.

- متممة المجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة ، هي مجموعة $N^{\alpha}-$مغلقة في الفضاء التبولوجي الثنائي.
- يرمز لأسرة كل المجموعات $N^{\alpha}-$مفتوحة بـ $N^{\alpha}.O(X)$.
- يرمز لأسرة كل المجموعات $N^{\alpha}-$مغلقة بـ $N^{\alpha}.C(X)$.

مثال $(\mathbf{2.5.1})$: في كل فضاء ثنائي التبولوجيا (X, τ_1, τ_2) ، X مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة .

مثال $(\mathbf{3.5.1})$:

$$X = \{1,2,3,4\}\,, \tau_1 = \{X\,, \emptyset\,, \{2\}, \{2,4\}\}, \tau_2 = \{X\,, \emptyset\,, \{4\}, \{2,4\}\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X\,, \emptyset\,, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$$

واضح أن (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا، المجموعات $N\alpha-$مفتوحة فيه هي:

$$N\alpha.O(X) = \tau_1 \vee \tau_2 \cup \{\{1,2,4\}, \{2,3,4\}\}$$

المجموعات $N^{\alpha}-$مفتوحة فيه هي: $N^{\alpha}.O(X) = \{\{1,3,4\}, X\}$

المجموعات $N^{\alpha}-$مغلقة في هذا الفضاء التبولوجي الثنائي هي: $N^{\alpha}.C(X) = \{\{2\}, \emptyset\}$

ملاحظة $(4.5.1)$:

١) ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، بحيث $\tau_1 \vee \tau_2 = \{\emptyset, X\}$ عندئذ:

X هي المجموعة الوحيدة N^αـمفتوحة فيه ، $\emptyset$ هي المجموعة الوحيدة N^αـمغلقة فيه.

٢) ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، بحيث$\tau_1 \vee \tau_2 = P(X)$ التبولوجيا القوية على X ، عندئذ:

كل مجموعةNـمفتوحة غير خالية هي مجموعة N^αـمفتوحة فيه .

٣) ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، بحيث$\tau_i = P(X)$ (التبولوجيا القوية على X)لأجل $i = 1$ أو $i = 2$ ، عندئذ:

كل مجموعة Nـمفتوحة غير خالية هي مجموعة N^αـمفتوحة فيه .

لأنه : بما أن $\tau_i = P(X)$ لأجل $i = 1$ أو $i = 2$ فإن :

$\tau_1 \vee \tau_2 = P(X)$ ومن ثم حسب (2) يتم المطلوب .

ملاحظة $(5.5.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، عندئذ:

1 . إن المجموعات N^αـمفتوحة في الفضاء الثنائي ، تختلف عن المجموعات Nـمفتوحة فيه ،انظر مثال (3.5.1) المجموعة $\{4\}$ هي مجموعة N ـمفتوحة فيه ، لكنها ليست مجموعة N^αـمفتوحة ، المجموعة $\{1,3,4\}$ هي مجموعة N^αـمفتوحة فيه ، لكنها ليست مجموعة Nـمفتوحة .

2 . إن المجموعات N^αـمفتوحة في الفضاء الثنائي ، تختلف عن المجموعات $N\alpha$ـمفتوحة فيه ، انظر مثال (3.5.1) المجموعة $\{1,2,4\}$ هي مجموعة $N\alpha$ـمفتوحة فيه ، لكنها ليست مجموعة N^αـمفتوحة ، المجموعة $\{1,3,4\}$ هي مجموعة N^αـمفتوحة فيه ، لكنها ليست مجموعة $N\alpha$ـمفتوحة .

3 . إن المجموعات N^αـمفتوحة في الفضاء الثنائي ، تختلف عن المجموعات Nـمغلقة فيه ، انظر مثال (3.5.1) المجموعة $\{1,3\}$ هي مجموعة N ـمغلقة فيه ، لكنها ليست مجموعة N^αـمفتوحة .

مبرهنة $(6.5.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، عندئذ:

كل مجموعة غير خالية Nـمفتوحة وNـمغلقة في آن واحد فيه ، هي مجموعة N^αـمفتوحة .

البرهان : لنفترض أن A مجموعة غير خالية Nـمفتوحة وNـمغلقة في آن واحد ولنبرهن أنها مجموعةN^αـمفتوحة بما أن A مجموعةNـمفتوحة فانها مجموعة$N\alpha$ـمفتوحة حسب مبرهنة (3.2.1)، بما أن A مجموعة Nـمغلقة فان $A = N - clA$ ، ومن ثم توجد مجموعة $N\alpha$ ـمفتوحة A تحقق $N - clA \subseteq A$ ومن ثم فان A مجموعة N^αـمفتوحة .

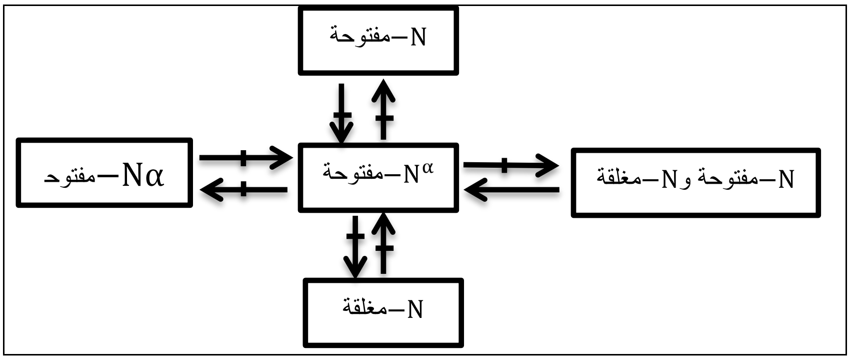
- العكس غير صحيح ، انظر مثال (3.5.1) المجموعة $\{1,3,4\}$ هي مجموعة N^αـمفتوحة ، لكنها ليست مجموعةNـمفتوحة وNـمغلقة في آن واحد فيه .
- عكس المبرهنة السابقة (6.5.1) يصبح صحيحاً بإضافة أحد الشرطين :

١) $\tau_1 \vee \tau_2 = P(X)$.

٢) $\tau_i = P(X)$ لأجل $i = 1$ أو $i = 2$.

مخطط توضيحي لبعض النتائج السابقة :

(حيث $\longrightarrow = \Leftarrow$ و $\nLeftarrow = \longleftarrow\!\!\!\!\!\!+$)



تعريف $(7.5.1)$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة N^α−مفتوحة وN^α−مغلقة في آن واحد في الفضاء التبولوجي الثنائي إذا كانت مجموعة N^α−مفتوحة وN^α−مغلقة فيه .

مثال $(8.5.1)$:

$$X = \{1,2,3\}, \tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}, \tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

المجموعاتN^α−مفتوحة وN^α−مغلقة في آن واحد في الفضاء التبولوجي الثنائي هي:

$X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$.

مبرهنة $(9.5.1)$:لتكن A مجموعة غير خالية من الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، عندئذ:

إذا كانت $N - int(A) = \emptyset$ فإن A لاتحوي مجموعة غير خالية $N\alpha$−مفتوحة .

البرهان :

لنفرض أن B مجموعة $N\alpha$−مفتوحة تحقق $B \subseteq A$ ، بما أن B مجموعة $N\alpha$−مفتوحة فإنه حسب مبرهنة (25.2.1) توجد مجموعة N−مفتوحة G تحقق$G \subseteq B \subseteq N - int(N - cl(G))$، ومنه $G \subseteq A$ ومنه $N - int(A) \neq \emptyset$ وهذا تناقض .

مبرهنة $(10.5.1)$: لتكن A مجموعة غير خالية من الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، عندئذ:

إذا كانت A مجموعة N^α−مفتوحة فإن $N - int(A) \neq \emptyset$.

البرهان :

لنفرض ان $N - int(A) = \emptyset$ ومنه حسب المبرهنة (9.5.1) فإن A لاتحوي مجموعة غير خالية $N\alpha$−مفتوحة، وهذا يعني ان A ليست مجموعة N^α−مفتوحة وهذا تناقض مع الفرض ومنه $N - int(A) \neq \emptyset$.

-العكس غير صحيح كما يوضح المثال الآتي :

مثال $(11.5.1)$:

$$X = \{1,2,3\}\,, \tau_1 = \{X\,, \emptyset\,, \{2,3\}\}, \tau_2 = \{X\,, \emptyset\,\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X\,, \emptyset\,, \{2,3\}\}$$

واضح أن (X,τ_1,τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا، ولتكن المجموعة $A = \{2,3\}$

ان $N - int(A) \neq \emptyset$ ، لكن A ليست N^{α}−مفتوحة فيه .

- عكس المبرهنة (10.5.1) غير صحيح كما وجدنا، لكن بإضافة بعض الشروط يصبح العكس صحيحاً، سنرى تلك الشروط بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة $(12.5.1)$:

ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً عندئذ :

اذا كانت $N - int(A) \neq \emptyset$ و A مجموعة N−مغلقة فإن A مجموعة N^{α}−مفتوحة .

البرهان :

لدينا $N - int(A) \subseteq A$ لذلك $N - cl(A) = A$ $N - cl\big(N - int(A)\big) \subseteq$ ،لنفرض ان $B = N - int(A)$ ، فتكون B مجموعة N−مفتوحة ومن ثم فانها مجموعة $N\alpha$−مفتوحة وغير خالية فرضاً ومن ثمA مجموعة N^{α}−مفتوحة.

مبرهنة $(13.5.1)$:

ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ، عندئذ :

إذا كانت $N - int(A) \neq \emptyset$ و A مجموعة مغلقة في أحد الفضائين (X,τ_i) لأجل

$i = 1$ أو $i = 2$ ، فإن A مجموعة N^{α}−مفتوحة .

البرهان :

بما أن A مجموعة مغلقة في أحد الفضائين (X,τ_i) لأجل $i = 1$ أو $i = 2$ فإن A مجموعة N−مغلقة . لدينا $N - int(A) \subseteq A$ لذلك:

$$N - cl\big(N - int(A)\big) \subseteq N - cl(A) = A$$

وبما أن $N - int(A)$ مجموعة N−مفتوحة ، فإنها مجموعة $N\alpha$−مفتوحة وغير خالية فرضاً ومن ثم A مجموعة N^{α}−مفتوحة.

مبرهنة $(14.5.1)$: لتكن A مجموعة غير خالية من الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، عندئذ:

إذا كان $N - int(A) = \emptyset$ فإن A ليست مجموعة N^{α}−مفتوحة .

البرهان : ينتج مباشرة عن المبرهنة (10.5.1) .

مبرهنة $(15.5.1)$: لتكن A مجموعة N−مغلقة من الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، عندئذ:

A مجموعة N^{α}−مفتوحة، إذا وفقط إذا ، كانت $N - int(A) \neq \emptyset$.

البرهان : ينتج مباشرة عن المبرهنتين (10.5.1) و (12.5.1).

مبرهنة (**16.5.1**) : ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ولتكن A مجموعة مغلقة في أحد الفضائين (X, τ_i) لأجل $i = 1$ أو $i = 2$ ، عندئذ:

A مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة، إذا وفقط إذا ، كانت $N - \mathrm{int}(A) \neq \emptyset$.

البرهان : ينتج مباشرة عن المبرهنتين (10.5.1) و (13.5.1) .

مبرهنة (**17.5.1**) : لتكن A مجموعة $N-$مغلقة و$N\alpha-$مفتوحة من الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، عندئذ: A مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة.

البرهان : بما أن A مجموعة $N-$مغلقة فإن $N - \mathrm{cl}(A) = A$ ومن ثم

$N - \mathrm{cl}(A) \subseteq A$ ومن ثم توجد مجموعة $N\alpha-$مفتوحةA تحقق $A \subseteq N - \mathrm{cl}(A)$ ومنه A مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة.

العكس غير صحيح كما يوضح المثال الآتي:

مثال (**18.5.1**):

$$X = \{1,2,3,4,5\} , \tau_1 = \{X , \emptyset , \{1\}\}, \tau_2 = \{X , \emptyset , \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X , \emptyset , \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

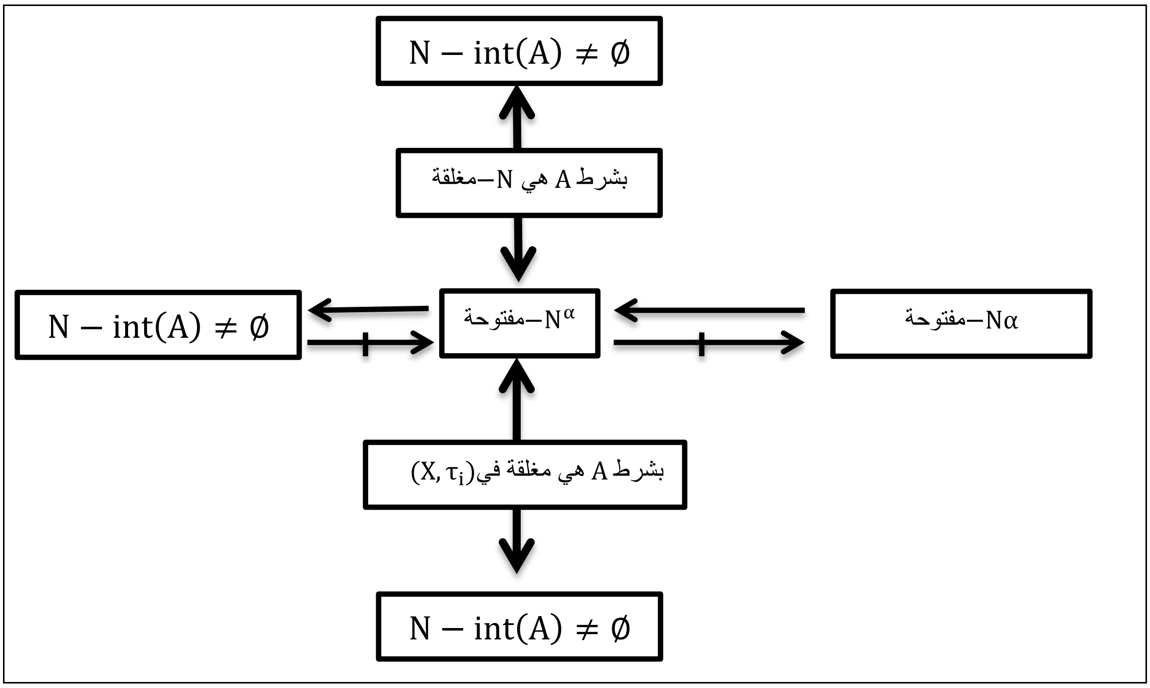
واضح أن كل من: (X, τ_1) , (X, τ_2) فضاءات تبولوجية لذلك فإن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً، إن$A = \{1,2,4,5\}$ مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة ، لكنها ليست مجموعة $N-$مغلقة و$N\alpha-$مفتوحة من الفضاء التبولوجي الثنائي .

- عكس المبرهنة السابقة (17.5.1) غير صحيح كما برهنا أعلاه ، لكنه يصبح صحيحاً بإضافة أحد الشرطين :

١) $\tau_1 \vee \tau_2 = P(X)$.

٢) $\tau_i = P(X)$ لأجل $i = 1$ أو $i = 2$.

مخطط توضيحي لبعض النتائج السابقة :



مبرهنة $(19.5.1)$: لتكن A مجموعة N^{α}–مفتوحة من الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، عندئذ: $N-cl(A)$ مجموعة N^{α}–مفتوحة.

البرهان : بما أن A مجموعة N^{α}–مفتوحة فإنه توجد مجموعة Nα–مفتوحة B تحقق $N-cl(B)\subseteq A$ ومن ثم $N-cl(B)\subseteq N-cl(A)$ ومنه $N-cl\big(N-cl(B)\big)=N-cl(B)\subseteq N-cl(A)$ ومن ثم $N-cl(A)$ مجموعة N^{α}–مفتوحة.

مبرهنة $(20.5.1)$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:

تقاطع أي أسرة من المجموعات المغلقة من النمط Nα هو مجموعة مغلقة من النمط Nα.

البرهان : لتكن $\{A_{\alpha}\ /\ \alpha\in I\}$ أسره منتهية من المجموعات المغلقة من النمط Nα، فيكون لأجل كل $\alpha\in I$, $(A_{\alpha})^{c}$ مجموعة مفتوحة من النمط Nα، لكن حسب المبرهنه (21.2.1) فإن أي اجتماع من مجموعات مفتوحة من النمط Nα هو مجموعة مفتوحة من النمط Nα، $\forall\alpha\in I$

ومنه $\cup\,[(A_{\alpha})^{c}]$ مجموعة مفتوحة من النمط Nα

ومنه $[\cup\,(A_{\alpha})^{c}]^{c}$ مجموعة مغلقة من النمط Nα

ومن ثم $\cap\,[(A_{\alpha})^{c}]^{c}=\cap\,A_{\alpha}$ مجموعة مغلقة من النمط Nα.

مبرهنة $(21.5.1)$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:

١) اجتماع عدد منته من مجموعات N^{α}–مفتوحة هو مجموعة N^{α}–مفتوحة .

٢) تقاطع عدد منته من مجموعات N^{α}–مفتوحة هو مجموعة N^{α}–مفتوحة .

البرهان :

١)

لتكن كلا من A_1, A_2 مجموعة N^{α}–مفتوحة ومن ثم يوجد مجموعتين B_1, B_2 كلا منهما مجموعة $N\alpha$–مفتوحة تحقق :

$N - cl\ (B_1) \subseteq A_1\ ,\ N - cl\ (B_2) \subseteq A_2$

ومنه $N - cl\ (B_1)\ \cup\ N - cl\ (B_2) \subseteq A_1 \cup A_2$

ومن ثم بما أن $N - cl\ (B_1)\ \cup\ N - cl\ (B_2) = N - cl(A_1 \cup A_2)$

نجد ان : $N - cl(B_1 \cup B_2) \subseteq A_1 \cup A_2$ ، لكن حسب مبرهنة (21.2.1) فإن $B_1 \cup B_2$ مجموعة $N\alpha$–مفتوحة ، ومن ثم $A_1 \cup A_2$ مجموعة N^{α}–مفتوحة .

٢)

لتكن كلا من A_1, A_2 مجموعة N^{α}–مفتوحة ومن ثم يوجد مجموعتين B_1, B_2 كلا منهما مجموعة $N\alpha$–مفتوحة تحقق : $N - cl\ (B_1) \subseteq A_1\ ,\ N - cl\ (B_2) \subseteq A_2$ ومنه

$N - cl\ (B_1)\ \cap\ N - cl\ (B_2) \subseteq A_1 \cap A_2$ ومن ثم بما أن

$N - cl\ (B_1)\ \cap\ N - cl\ (B_2) \supseteq N - cl(A_1 \cap A_2)$ ان :

$N - cl(B_1 \cap B_2) \subseteq A_1 \cap A_2$ ، لكن حسب مبرهنة (22.2.1) فإن $B_1 \cap B_2$ مجموعة $N\alpha$–مفتوحة ، ومن ثم $A_1 \cap A_2$ مجموعة N^{α}–مفتوحة .

مبرهنة ($\mathbf{22.5.1}$): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:

١) اجتماع عدد منته من مجموعات N^{α}–مغلقة هي مجموعة N^{α}–مغلقة .

٢) تقاطع عدد منته من مجموعات N^{α}–مغلقة هي مجموعة N^{α}–مغلقة .

البرهان :

١) لتكن $\{A_{\alpha}\ /\ \alpha \in I\}$ أسره منتهية من المجموعات N^{α}–مغلقة، فيكون لأجل كل , $(A_{\alpha})^c$ $\alpha \in I$ مجموعة N^{α}–مفتوحة، لكن حسب المبرهنه (21.5.1) فإن تقاطع عدد منته من مجموعات N^{α}–مفتوحة هو مجموعة N^{α}–مفتوحة ،

$\Leftarrow \cap\ [(A_{\alpha})^c]$ هو مجموعة N^{α}–مفتوحة

$\Leftarrow [\cap\ (A_{\alpha})^c]^c$ هو مجموعة N^{α}–مغلقة

$\Leftarrow \cup\ [(A_{\alpha})^c]^c = \cup\ A_{\alpha}$ هو مجموعة N^{α}–مغلقة .

٢) لتكن $\{A_\alpha \ / \ \alpha \in I\}$ أسره منتهية من المجموعات N^α–مغلقة، فيكون لأجل كل , $(A_\alpha)^c$ $\alpha \in I$ مجموعة N^α–مفتوحة، لكن حسب المبرهنه (21.5.1) فان اجتماع عدد منته من مجموعات N^α–مفتوحة هو مجموعة N^α–مفتوحة ،

$\Leftarrow \cup [(A_\alpha)^c]$ هو مجموعة N^α–مفتوحة

$\Leftarrow [\cup (A_\alpha)^c]^c$ هو مجموعة N^α–مغلقة

$\Leftarrow \cap [(A_\alpha)^c]^c = \cap A_\alpha$ هو مجموعة N^α–مغلقة .

مبرهنة $(\mathbf{23.5.1})$: ليكن كل من (X_1, τ_1, τ_2) و (X_2, T_1, T_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:
إذا كانت A_1, A_2 مجموعة $N\alpha$–مفتوحة في X_1, X_2 ، فإن $A_1 \times A_2$ مجموعة $N\alpha$–مفتوحة في $X_1 \times X_2$.

البرهان :لنتفرض أن A_1, A_2 مجموعة $N\alpha$–مفتوحة في X_1, X_2 ،ومنه

$$A_1 \subseteq N - int\Big(N - cl\big(N - int(A_1)\big)\Big), A_1 \subseteq N - int\Big(N - cl\big(N - int(A_2)\big)\Big)$$

ومنه :

$$A_1 \times A_2 \subseteq N - int(N - cl\big(N - int(A_2)\big)) \times N - int(N - cl\big(N - int(A_2)\big) \ldots (1)$$

لكن بما أن :

$$N - int\Big(N - cl\big(N - int(A_2)\big)\Big) \times N - int\Big(N - cl\big(N - int(A_2)\big)\Big)$$
$$= N - int\Big(N - cl\big(N - int(A_1 \times A_2)\big)\Big) \ldots (2)$$

ومن ثم من (2) و (1) نجد: $A_1 \times A_2 \subseteq N - int(N - cl\big(N - int(A_1 \times A_2)\big)$ ومنه $A_1 \times A_2$ مجموعة $N\alpha$–مفتوحة في $X_1 \times X_2$.

مبرهنة $(\mathbf{24.5.1})$: ليكن كل من (X_1, τ_1, τ_2) و (X_2, T_1, T_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:
إذا كانت A_1, A_2 مجموعة N^α–مفتوحة في X_1, X_2 ، فإن $A_1 \times A_2$ مجموعة N^α–مفتوحة في $X_1 \times X_2$.

البرهان :

لتكن كل من A_1, A_2 مجموعة N^α–مفتوحة في X_1, X_2 ومن ثم يوجد مجموعتان B_1, B_2 كلاً منهما مجموعة $N\alpha$ –مفتوحة تحقق :

$B_1 \subseteq N - cl\ (B_1) \subseteq A_1\ ,\ B_2 \subseteq N - cl\ (B_2) \subseteq A_2$ ومنه

$B_1 \times B_2 \subseteq N - cl\ (B_1) \times N - cl\ (B_2) \subseteq A_1 \times A_2$ ومن ثم بما أن

$N - cl\ (B_1) \times N - cl\ (B_2) = N - cl(B_1 \times B_2)$ ، فإن :

$B_1 \times B_2 \subseteq N - cl(B_1 \times B_2) \subseteq A_1 \times A_2$ ، لكن حسب مبرهنة (23.5.1) فإن $B_1 \times B_2$ مجموعة $N\alpha$ –مفتوحة ، ومن ثم $A_1 \times A_2$ مجموعة N^α–مفتوحة .

مبرهنة $(25.5.1)$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:
$\emptyset$ ليست مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة.
البرهان : بما أن $N-\mathrm{int}(\emptyset)=\emptyset$ فإن $\emptyset$ ليست مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة حسب مبرهنة (14.5.1) .
مبرهنة $(26.5.1)$: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً على X عندئذ:
المجموعات $N^{\alpha}-$مفتوحة لا تشكل تبولوجيا على X.
البرهان : حسب مبرهنة (25.5.1) .
ملاحظة $(27.5.1)$:
١) المجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) ليس بالضرورة مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة في أي من الفضائين (X,τ_i) حيث $i=1,2$.
٢) المجموعة $N^{\alpha}-$مغلقة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2) ليس بالضرورة مجموعة $N^{\alpha}-$مغلقة في أي من الفضائين (X,τ_i) حيث $i=1,2$.
كما يوضح المثال الآتي :
مثال $(28.5.1)$:
$$X=\{1,2,3\},\tau_1=\{X,\emptyset,\{1\}\},\tau_2=\{X,\emptyset,\{2\}\}\Rightarrow$$
$$\tau_1\vee\tau_2=\{X,\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$
واضح أن (X,τ_1,τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا، المجموعات $N\alpha-$ مفتوحة فيه هي:
$$N\alpha.O(X)=\tau_1\vee\tau_2$$
المجموعات $N^{\alpha}-$مفتوحة فيه هي: $N^{\alpha}.O(X)=\{\{1,3\},\{2,3\},X\}$
المجموعات $N^{\alpha}-$مغلقة في هذا الفضاء التبولوجي الثنائي هي:
$$N^{\alpha}.C(X)=\{\{2\},\{1\},\emptyset\}$$
المجموعة الوحيدة $N^{\alpha}-$مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ_1) و (X,τ_2) هي X ، ومن ثم المجموعة الوحيدة $N^{\alpha}-$مغلقة في الفضاء التبولوجي (X,τ_1) و (X,τ_2) هي $\emptyset$.
$\{1,3\}$مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي ، لكنها ليست مجموعة $N^{\alpha}-$مفتوحة في الفضاءات التبولوجية (X,τ_1) و (X,τ_2) .
$\{1\}$مجموعة $N^{\alpha}-$مغلقة في الفضاء التبولوجي الثنائي ، لكنها ليست مجموعة $N^{\alpha}-$مغلقة في الفضاءات التبولوجية (X,τ_1) و (X,τ_2) .

مبرهنة $(29.5.1)$:

١) كل مجموعة مغلقة في أي من الفضائين (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ و $N\alpha$ –مفتوحة في الفضاء الثنائي ، هي مجموعة N^{α} –مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2).

٢) كل مجموعة مفتوحة و مغلقة في أي من الفضائين (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ هي مجموعة N^{α} –مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2).

البرهان :

١) بما أن كل مجموعة A مغلقة في أي من الفضائين (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ ، هي مجموعة N –مغلقة، وبما أنها $N\alpha$ –مفتوحة في الفضاء الثنائي فرضاً، فإن A مجموعة N^{α} –مفتوحة حسب مبرهنة (17.5.1) .

٢) كل مجموعة مفتوحة و مغلقة في أي من الفضائين (X, τ_i) حيث $i = 1,2$ هي مجموعة N –مفتوحة و N –مغلقة في الفضاء التبولوجي الثنائي (X, τ_1, τ_2)، ومن ثم حسب مبرهنة (6.5.1) فإنها مجموعة N^{α} –مفتوحة فيه .

مبرهنة (30.5.1):

ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً عندئذ :

إذا كانت $N - int(A) \neq \emptyset$ فإن $N - cl(A)$ مجموعة N^{α} –مفتوحة .

البرهان :

لدينا $N - int(A) \subseteq A$ لذلك $N - cl(N - int(A)) \subseteq N - cl(A)$ وبما أن

$B = N - int(A) \neq \emptyset$ مجموعة N –مفتوحة ومن ثم فانها $N\alpha$ –مفتوحة وغير خالية فرضاً ومن ثم $N - cl(A)$ مجموعة N^{α} –مفتوحة.

مبرهنة (31.5.1): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ،

ولتكن $T^* = \{ A : A \text{ is } N^{\alpha} - \text{open}\}$

و $T = \{ A : A \text{ is } N - \text{open and } N - \text{closed} \}$ ، عندئذ: $T \subset T^*$.

البرهان : لتكن $A \in T$ ومنه A مجموعة N –مفتوحة و N –مغلقة ومنه حسب مبرهنة (6.5.1) فإن A مجموعة N^{α} – مفتوحة ، ومنه $A \in T^*$ ومن ثم : $T \subset T^*$.

مبرهنة (32.5.1): ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ،

ولتكن $T^* = \{ A : A \text{ is } N^{\alpha} - \text{open}\}$

و $T^{**} = \{ A : A \text{ is } N\alpha - \text{open and } N - \text{closed} \}$ عندئذ: $T^{**} \subset T^*$.

البرهان : لتكن $A \in T^{**}$ ومنه A مجموعة $N\alpha$−مفتوحة و N−مغلقة ومنه حسب مبرهنة (17.5.1)فإن A مجموعة $N^{\alpha}-$ مفتوحة ، ومنه $A \in T^{*}$ ومن ثم : $T^{**} \subset T^{*}$.

نتيجة $(\mathbf{33.5.1})$: ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء تبولوجياً ثنائياً ، يحقق أحد الشرطين :

a) $\tau_1 \vee \tau_2 = P(X)$.

b) $\tau_i = P(X)$ لأجل بعض $i = 1, 2$.

عندئذ : $T^{*} = T^{**} = T$ (باستخدام رموز المبرهنتين (31.5.1) و (32.5.1) نفسها) .

البرهان :

حسب مبرهنة (31.5.1) نجد أن (1) ... $T \subset T^{*}$ الآن، إذا تحقق أحد الشرطين السابقين(a) أو (b) فإن كل مجموعة $N^{\alpha}-$ مفتوحة هي مجموعة N−مفتوحة و N−مغلقة ومنه (2) ... $T \supset T^{*}$ ،ومن ثم من (1) و (2) نجد أن $T = T^{*}$ ... i) .

أيضاً حسب مبرهنة (32.5.1) نجد أن (1) ... $T^{**} \subset T^{*}$ الآن ، إذا تحقق أحد الشرطين السابقين(a) أو (b) فإن كل مجموعة $N^{\alpha}-$ مفتوحة هي مجموعة $N\alpha$−مفتوحة و N−مغلقة ومنه (2) ... $T^{**} \supset T^{*}$ ،ومن ثم من (1) و (2) نجد أن $T^{**} = T^{*}$ ... ii) .

ومن ثم من i) , ii) نجد ان $T^{*} = T^{**} = T$.

2

الفصل الثاني

النقاط و المجموعات ومسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة الجديدة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة

مقدمة:

عمم F. Smarandache عام 1995 مفهوم المنطق الضبابي (Fuzzy) إلى المنطق النتروسوفيكي ، ثم ظهرت العديد من الأبحاث في هذا المنطق الجديد في شتى أنواع العلوم وخاصة في الرياضيات بجميع فروعها لا سيما في التبولوجيا حيث عُممت اغلب المفاهيم التبولوجية إلى المفاهيم التبولوجية النتروسوفيكية والنتروسوفيكية الهشة (للتوسع انظر [19] ,[21] ,[26] ,[27]).

إن العالم الذي يحيط بنا تتسم احداثه ووقائعة بالتناقض والغموض واللاتحديد حيث تفسح كل قضية مره بالصدق ومره بالكذب وأخرى باللاتحديد ...لذلك برزت حاجتنا لمنطق جديد يعكس حقيقة رؤيتنا النسبية لهذا الواقع ، هذا المنطق هو المنطق النتروسوفيكي الذي أسسة العالم الأمريكي Smarandache عام 1995 والذي يدرس ويهتم بالحياد(للتوسع انظر أبحاث البروفسور الأمريكي فلورنتن سمارنداكة [31] ,[32] ,[33])، بحيث يأخذ هذا المنطق الجديد بعين الاعتبار كل فكرة مع نقيضتها مع طيف الحياد ، حيث يأخذ هذا المنطق كل بيان بثلاث ابعاد هي الصح (T) بدرجات والخطأ (F) بدرجات والحياد (I) بدرجات ، ويمكننا أن نعبر عن ذلك بالشكل (T,I,F) وهذا يعطي وصفاً أدق من المنطق الضبابي والمنطق العادي ، ثم انبثق عن منطق النتروسوفيك نظرية المجموعات النتروسوفيكية الهشة كتطوير لنظرية المجموعات الكلاسيكية وفق هذا المنطق على يد البروفيسور المصري A.A. Salama وفريق من الباحثين عام 2014، حيث عرف A.A. Salama , F. Smarandache, V. Kromouv عام 2014 في[21] مفهوم الفضاء التوبولوجي النتروسوفيكي الهش كتعميم للفضاء التبولوجي المعروف وفقاً لمنطق النتروسوفيك (Neutrosophic Logic) كما عرفوا المجموعة النتروسوفيكية الهشة والعمليات عليها مثل التقاطع والاجتماع والمتممة، قبل ذلك عرف A.A.Salama ,S.A.alblowi عام 2012 مفهوم المجموعة النتروسوفيكية وعرفوا العمليات عليها، ومن ثم عرفوا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي في [26].

قدم البروفيسور المصري احمد سلامة عام 2013 في[25] دراسة حول مفهوم النقط النتروسوفيكية الهشة وعرف مفهوم انتماء عنصر ما لمجموعة نتروسوفيكية هشة.
عرفنا ودرسنا في هذا الفصل أنماط جديدة من النقاط في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش ، ومن ثم استعملنا المفهوم الجديد من النقاط ، في تعريف مسلمات فصل نتروسوفيكية هشة جديدة في هذا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش، لابد أن ننوه إلى أن مسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة لم تدرس سابقاً من قبل أي باحث ، ونحن أول من قام بدراستها وتعريفها.
كما عرفنا المجموعات النتروسوفيكية الهشة α–المغلقة في الفضاء النتروسوفيكي الهش، ودرسنا خصائصها الأساسية، ومن ثم استخدمنا هذا النوع الجديد من المجموعات النتروسوفيكية الهشة في تعريف الداخلية واللصاقة النتروسوفيكية الهشة من النمط α.

2 – 1 تعاريف ومفاهيم أساسية في النتروسوفيك الهش:

تعريف $(\mathbf{1.1.2})$:[19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ: المجموعة النتروسوفيكية الهشة A (التي يرمز لها أختصاراً NCS) هي ثلاثية مرتبة $A =< A_1, A_2, A_3 >$ ، حيث A_1, A_2, A_3 هي مجموعات جزئية من X.

تعريف $(\mathbf{2.1.2})$:[19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ:

١) تعرف المجموعة الخالية النتروسوفيكية الهشة (التي يرمز لها أختصاراً $\emptyset_N$) ، بأحد الأشكال :

- $\emptyset_N =< \emptyset, \emptyset, X >$ او
- $\emptyset_N =< \emptyset, X, X >$ او
- $\emptyset_N =< \emptyset, X, \emptyset >$ او
- $\emptyset_N =< \emptyset, \emptyset, \emptyset >$.

٢) تعرف المجموعة الشاملة النتروسوفيكية الهشة X_N ، بأحد الأشكال :

- $X_N =< X, \emptyset, \emptyset >$ او

- $X_N =< X, X, \emptyset >$ او
- $X_N =< X, \emptyset, X >$ او
- $X_N =< X, X, X >$.

تعريف $(\mathbf{3.1.2})$: [19] لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، تدعى المجموعة النتروسوفيكية الهشة (Neutrosophic crisp set) A التي لها الشكل $A =< A_1, A_2, A_3 >$ ، حيث A_1, A_2, A_3 هي مجموعات جزئية من X :

a) مجموعة نتروسوفيكية هشة من النمط الأول (التي يرمز لها أختصاراً $NCS - Taype1$) ، إذا حققت: $A_1 \cap A_2 = \emptyset \, , A_1 \cap A_3 = \emptyset \, , A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

b) مجموعة نتروسوفيكية هشة من النمط الثاني (التي يرمز لها أختصاراً $NCS - Taype2$) ، إذا حققت: $A_1 \cap A_2 = \emptyset \, , A_1 \cap A_3 = \emptyset \, , A_2 \cap A_3 = \emptyset \, , A_1 \cup A_2 \cup A_3 = X$.

c) مجموعة نتروسوفيكية هشة من النمط الثالث (التي يرمز لها أختصاراً $NCS - Taype3$) ، إذا حققت: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \, , A_1 \cup A_2 \cup A_3 = X$.

تعريف $(\mathbf{4.1.2})$:[19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ:

١) المجموعة الخالية النتروسوفيكية الهشة$\emptyset_{N1}$ من النمط الأول (التي يرمز لها أختصاراً $\emptyset_{N1}$) تعرف بأحد الأشكال :

- $\emptyset_{N1} =< \emptyset, \emptyset, X >$ (الشكل الأول).
- $\emptyset_{N1} =< \emptyset, X, \emptyset >$ (الشكل الثاني).
- $\emptyset_{N1} =< \emptyset, \emptyset, \emptyset >$ (الشكل الثالث).

٢) المجموعة النتروسوفيكية الهشة X_{N1} من النمط الأول (التي يرمز لها أختصاراً X_{N1}) تعرف بالشكل :

- $X_{N1} =< X, \emptyset, \emptyset >$ (الشكل الأول) .

تعريف $(\mathbf{5.1.2})$: [19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ:

١) المجموعة الخالية النتروسوفيكية الهشة$\emptyset_{N2}$ من النمط الثاني (التي يرمز لها أختصاراً $\emptyset_{N2}$) تعرف بأحد الشكلين :

- $\emptyset_{N2} =< \emptyset, \emptyset, X >$ (الشكل الأول).
- $\emptyset_{N2} =< \emptyset, X, \emptyset >$ (الشكل الثاني).

٢) المجموعة النتروسوفيكية الهشة X_{N2} من النمط الثاني (التي يرمز لها أختصاراً X_{N2}) تعرف بالشكل :

- $X_{N2} =< X, \emptyset, \emptyset >$ (الشكل الأول).

تعريف ($\mathbf{6.1.2}$): [19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ:

١) المجموعة الخالية النتروسوفيكية الهشة$\emptyset_{N3}$ من النمط الثالث (التي يرمز لها أختصاراً $\emptyset_{N3}$) تعرف بأحد الأشكال :

- $\emptyset_{N3} =< \emptyset, \emptyset, X >$ (الشكل الأول).
- $\emptyset_{N3} =< \emptyset, X, \emptyset >$ (الشكل الثاني).
- $\emptyset_{N3} =< \emptyset, X, X >$ (الشكل الثالث).

٢) المجموعة النتروسوفيكية الهشة X_{N3} من النمط الثالث (التي يرمز لها أختصاراً X_{N3}) تعرف بأحد الأشكال:

- $X_{N3} =< X, \emptyset, \emptyset >$ (الشكل الأول) .
- $\emptyset_{N3} =< X, X, \emptyset >$ (الشكل الثاني).
- $\emptyset_{N3} =< X, \emptyset, X >$ (الشكل الثالث).

تعريف ($\mathbf{7.1.2}$):[19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن A , B مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين من الشكل

$A =< A_1, A_2, A_3 >$ و $B =< B_1, B_2, B_3 >$ ، عندئذ:

، الاحتواء $A \subseteq B$ يعرف بأحد الشكلين :

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2, A_3 \supseteq B_3$.
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1 , A_2 \supseteq B_2 , A_3 \supseteq B_3$.

تعريف ($\mathbf{8.1.2}$):[19]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن A , B مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين من الشكل

$A =< A_1, A_2, A_3 >$ و $B =< B_1, B_2, B_3 >$ ، عندئذ:

a) التقاطع $A \cap B$ يعرف بأحد الشكلين :

- $A \cap B =< A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2, A_3 \cup B_3 >$.

- $A \cap B =< A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2, A_3 \cup B_3 >$.

b) الاجتماع $A \cup B$ يعرف بأحد الشكلين :

- $A \cup B =< A_1 \cup B_1, A_2 \cap B_2, A_3 \cap B_3 >$.

- $A \cup B =< A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2, A_3 \cap B_3 >$.

تعريف ($\mathbf{9.1.2}$):[21]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X (التي يرمز لها أختصاراً NCT) هي أسرة مجموعات نتروسوفيكية هشة Γ من X ، تحقق:

١) $\emptyset_N , X_N \in \Gamma$.

٢) $A \cap B \in \Gamma$ لأية مجموعتين A،B من Γ .

٣) $\bigcup_i A_i \in \Gamma$ لأية مجموعات A_i من Γ .

- ندعو في هذه الحالة (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً على X (أو أختصاراً NCTS) ، كل عنصر من Γ يدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو أختصاراً NCOS) ، وتدعى متممتها مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة (أو أختصاراً NCCS).

ملاحظة ($\mathbf{10.1.2}$):

١) إن الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش(NCTS)، هو تعميم للفضاء التبولوجي العادي وتعميم للفضاء التبولوجي الضبابي ، سنعطي امثلة في فقرة الفضاء النتروسوفيكي الهش الثنائي .

٢) عند التعامل مع المجموعات النتروسوفيكية الهشة، يمكن تثبيت شكلاً واحداً من تعريف المجموعة الخالية النتروسوفيكية الهشة والمجموعة الشاملة النتروسوفيكية الهشة وشكلا واحداً من التقاطع والاجتماع والمتممة والاحتواء، أو التعامل مع جميع الاشكال فيها.

تعريف $(\mathbf{11.1.2})$:[21]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن $A =< A_1, A_2, A_3 >$ مجموعة نتروسوفيكية هشة، عندئذ:

١) متممة المجموعة A يرمز له بالرمز $\grave{A}$ أو A^c وتعرف بأحد الأشكال :

- $A^c =< {A_1}^c, {A_2}^c, {A_3}^c >$.
- $A^c =< A_3, A_2, A_1 >$.
- $A^c =< A_3, {A_2}^c, A_1 >$.

٢) الداخلية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NCint(A)$ ، بالشكل :

$NCint(A) = \cup \{G : G \subseteq A$ and G is a NC- OS in $X\}$.

٣) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز NCcl(A) ، بالشكل:

$NCcl(A) = \cap \{G : G \supseteq A$ and G is a NC-CS in X $\}$.

تعريف $(\mathbf{12.1.2})$: [27] ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

١) A تدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (NC-P-OS) ، اذا تحقق $A \subseteq NCint(NCcl(A))$ متممتها تدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مغلقة (NC-P-CS).

٢) A تدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (NC-S-OS) ، اذا تحقق $A \subseteq NCcl(NCint(A))$ متممتها تدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مغلقة (NC-S-CS).

٣) A تدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة $\alpha-$مفتوحة (NC-α-OS) ، اذا تحقق $A \subseteq NCint(NCcl(NCint(A)))$ متممتها تدعى مجموعة نتروسوفيكية هشة $\alpha-$مغلقة (NC-α-CS) .

ملاحظة $(\mathbf{13.1.2})$:[27]

١) أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة P-مفتوحة (P-مغلقة) يرمز لها بالرمز NCPO (X) (NCPC (X)).

٢) أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة شبه المفتوحة (شبه المغلقة) يرمز لها بالرمز NCSO (X) (NCSC (X)).

٣) أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة $\alpha-$مفتوحة ($\alpha-$مغلقة) يرمز لها بالرمز NCαO(X) (NCαC(X)).

تعريف $(14.1.2)$: [27] ليكن(X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

١) نعرف الداخلية النتروسوفيكية الهشة من نمط P للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NCPint(A)$ ، بالشكل :

$$NCPint(A) = \cup \{G : G \subseteq A \text{ and } G \text{ is a NC-P-OS in } X \}.$$

٢) نعرف الداخلية النتروسوفيكية الهشة من نمط S للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NCSint(A)$ ، بالشكل :

$$NCSint(A) = \cup \{G : G \subseteq A \text{ and } G \text{ is a NC-S-OS in } X \}.$$

٣) نعرف الداخلية النتروسوفيكية الهشة من نمط α للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NC\alpha int(A)$ ، بالشكل :

$$NC\alpha int(A) = \cup \{G : G \subseteq A \text{ and } G \text{ is a NC-}\alpha\text{-OS in } X \}.$$

تعريف $(15.1.2)$: [27] ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

٤) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية الهشة من نمط P للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NCPcl(A)$ ، بالشكل :

$$NCPcl(A) = \cap \{G : G \supseteq A \text{ and } G \text{ is a NC-P-CS in } X \}.$$

٥) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية الهشة من نمط S للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NCScl(A)$ ، بالشكل :

$$NCScl(A) = \cap \{G : G \supseteq A \text{ and } G \text{ is a NC-S-CS in } X \}.$$

٦) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية الهشة من نمط α للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $NC\alpha cl(A)$ ، بالشكل :

$$NC\alpha cl(A) = \cap \{G : G \supseteq A \text{ and } G \text{ is a NC-}\alpha\text{-CS in } X \}.$$

مبرهنة$(16.1.2)$:[3] ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، عندئذ :

١) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة

α–مفتوحة (α–مغلقة).

٢) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة (α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (شبه مغلقة).

٣) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة (α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (P-مغلقة).

مبرهنة($\mathbf{2.1.17}$): [3] ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية هشة α– مفتوحة (α-مغلقة) ،إذا وفقط إذا كانت، A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (شبه مغلقة) و A مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (P-مغلقة).

ملاحظة($\mathbf{2.1.18}$): [3]

ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

١) $SNCint(NCcl(A)) = NCcl(NCint(NCcl(A)))$.

٢) إذا كانت A مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة، فإن $SNCcl(A) = NCint(NCcl(A))$.

البرهان : ينتج مباشرة من التعريف (12.1.2) والمبرهنة (16.1.2).

مبرهنة($\mathbf{2.1.19}$): [3] ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية هشة α– مفتوحة، إذا وفقط إذا ، كان يوجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحةH ، تحقق $H \subseteq A \subseteq NCint(NCcl(H))$.

مبرهنة($\mathbf{2.1.20}$): [3] ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

اجتماع أسرة مجموعات نتروسوفيكية هشة α– مفتوحة ، هو مجموعة نتروسوفيكية هشة α– مفتوحة.

تعريف($\mathbf{2.1.21}$) : [19] لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ:

ندعو $P =< \{p_1\},\{p_2\},\{p_3\} >$ نقطة نتروسوفيكية هشة، حيث $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \in X$.

تعريف($\mathbf{2.1.22}$): [25] لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن $A =< A_1, A_2, A_3 >$ مجموعة نتروسوفيكية هشة من X، ولتكن $P =< \{p_1\},\{p_2\},\{p_3\} >$ نقطة نتروسوفيكية هشة، عندئذ:

نعرف مفهوم أنتماء عنصر ما P للمجموعة النتروسوفيكية الهشة A ، ونرمز له بالرمز $P \in A$، بأحد الشكلين الآتيين :

– $Type\ 1 : \{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \subseteq A_2$ and $\{p_3\} \subseteq A_3$ (النمط الأول).

– $Type\ 2 : \{p_1\} \subseteq A_1, \{p_2\} \supseteq A_2$ and $\{p_3\} \subseteq A_3$ (النمط الثاني).

2 – 2 النقاط النتروسوفيكية الهشة :

قدم البروفيسور المصري احمد سلامة في [25] عام2013 وفي [19]تعريف النقطة النتروسوفيكية الهشة وعرف مفهوم أنتماء عنصر ما لمجموعة نتروسوفيكية هشة، أما نحن فقد عرفنا ودرسنا في هذا القسم من الفصل الثاني انماطاً جديدة من النقاط في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش ، ومن ثم استعملنا المفهوم الجديد من النقاط ، في تعريف مسلمات فصل جديدة في هذا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش، ومن ثم درسنا العلاقات بين مسلمات الفصل الجديدة ، وأوجدنا امثلة مناسبة عن كل من النقاط ومسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة الجديدة.

تعريف $(\mathbf{1.2.2})$: لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ :

لأجل كل عنصر x من X نعرف النقطة النتروسوفيكية الهشة، بالشكل :

- $x_{N_1} = <\{x\},\emptyset,\emptyset>$ النقطة النتروسوفيكية الهشة من النمط الأول فيX (أو أختصاراً NCP_{N_1})
- $x_{N_2} = <\emptyset,\{x\},\emptyset>$ النقطة النتروسوفيكية الهشة من النمط الثاني فيX (أو أختصاراً NCP_{N_2}).
- $x_{N_3} = <\emptyset,\emptyset,\{x\}>$ النقطة النتروسوفيكية الهشة من النمط الثالث فيX (أو أختصاراً NCP_{N_3}) .

– أسرة كل النقاط النتروسوفيكية الهشة $(NCP_{N_1}, NCP_{N_2}, NCP_{N_3})$ يرمز لها بالرمز NCP_N .

تعريف $(\mathbf{2.2.2})$:لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ :لأجل كل عنصر x من X

- نقول إن النقطة النتروسوفيكية الهشة من النمط الأول x_{N_1} فيX (NCP_{N_1}) تنتمي إلى المجموعة النتروسوفيكية الهشة $B=<B_1,B_2,B_3>$ من X ، ونرمز لذلك بالرمز $x_{N_1} \in B$ ، إذا كان $x \in B_1$. أيضاً نقول إن x_{N_1} لا تنتمي إلى المجموعة النتروسوفيكية الهشة $B=<B_1,B_2,B_3>$ من X ، ونرمز لذلك بالرمز $x_{N_1} \notin B$ إذا كان $x \notin B_1$.
- نقول إن النقطة النتروسوفيكية الهشة من النمط الثاني x_{N_2} فيX (NCP_{N_2}) تنتمي إلى المجموعة النتروسوفيكية الهشة $B=<B_1,B_2,B_3>$ من X ، ونرمز لذلك بالرمز $x_{N_2} \in B$ ، إذا كان $x \in B_2$. أيضاً نقول إن x_{N_2} لا تنتمي الى المجموعة النتروسوفيكية الهشة $B=<B_1,B_2,B_3>$ من X ، ونرمز لذلك بالرمز $x_{N_2} \notin B$ ، إذا كان $x \notin B_2$.

- نقول إن النقطة النتروسوفيكية الهشة من النمط الثالث x_{N_3} في X (NCP_{N_3}) تنتمي إلى المجموعة النتروسوفيكية الهشة $B=<B_1,B_2,B_3>$ من X ، ونرمز لذلك بالرمز $x_{N_3} \in B$، إذا كان $x \in B_3$. ايضاً نقول إن x_{N_3} لا تنتمي الى المجموعة النتروسوفيكية الهشة $B=<B_1,B_2,B_3>$ من X ، ونرمز لذلك بالرمز $x_{N_3} \notin B$، إذا كان $x \notin B_3$.

تعريف $(\mathbf{3.2.2})$: لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن $B=<B_1,B_2,B_3>$ مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ :

- $B \backslash x_{N_1} =< B_1 \setminus \{x\}, B_2, B_3 >$.
- $B \backslash x_{N_2} =< B_1, B_2 \setminus \{x\}, B_3 >$.
- $B \backslash x_{N_3} =< B_1, B_2, B_3 \setminus \{x\} >$.

تعريف $(\mathbf{4.2.2})$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن $B=<B_1,B_2,B_3>$ مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة من X، ولتكن $P \in NCP_N$ ، عندئذ :

نقول إن B جوار نتروسوفيكي هش مفتوح للنقطة P ، إذا كان $P \in B$.

تعريف $(\mathbf{5.2.2})$: ليكن(X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن $B=<B_1,B_2,B_3>$ مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، ولتكن $P \in NCP_N$ ، عندئذ :

نقول إن B جوار نتروسوفيكي هش للنقطة P ، إذا وجدت مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة $A =<A_1,A_2,A_3>$ تحقق $A \subseteq B$ ، حيث $P \in A$.

ملاحظة $(\mathbf{6.2.2})$: ليكن(X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن $B=<B_1,B_2,B_3>$ مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، ولتكن $P \in NCP_N$ ، عندئذ :

كل جوار نتروسوفيكي هش مفتوح للنقطة P، هو جوار نتروسوفيكي هش لها، لكن العكس غير صحيح بشكل عام، كما يوضح المثال الآتي :

مثال $(\mathbf{7.2.2})$:

$X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{T} = \{\mathcal{X}_N , \emptyset_N , A, B, G \}$
$A =<\{x\},\emptyset,\emptyset>$,$B =<\{y\},\emptyset,\emptyset>$, $G =<\{x, y\},\emptyset,\emptyset>$,$U =<\{x, y\},\{z\} ,\emptyset>$.

G مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة تحوي $P= x_{N_1} = <\{x\},\emptyset,\emptyset>$, $G \subseteq U$.
U جوار نتروسوفيكي هش للنقطة P , لكن U ليست جواراً نتروسوفيكياً هشاً مفتوحاً للنقطة P .

2 – 3 مسلمات فصل نتروسوفيكية هشة جديدة :

تعريف $(1.3.2)$: يدعى الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش (X,Γ) :

- $T_0 - N_1$–فضاء، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الأول مختلفتين $x_{N_1} \neq y_{N_1}$، يوجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة G تحوي إحدى النقطتين دون الأخرى .
- $T_0 - N_2$–فضاء، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الثاني مختلفتين $x_{N_2} \neq y_{N_2}$، يوجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة G تحوي إحدى النقطتين دون الأخرى .
- $T_0 - N_3$–فضاء، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الثالث مختلفتين $x_{N_3} \neq y_{N_3}$، يوجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة G تحوي إحدى النقطتين دون الأخرى .

تعريف $(2.3.2)$: يدعى الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش (X,Γ) :

- $T_1 - N_1$–فضاء، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الأول مختلفتين $x_{N_1} \neq y_{N_1}$، يوجد مجموعتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان G_1, G_2 تحققان : $x_{N_1} \in G_1, y_{N_1} \notin G_1$ and $x_{N_1} \notin G_2 , y_{N_1} \in G_2$.
- $T_1 - N_2$–فضاء، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الثاني مختلفتين $x_{N_2} \neq y_{N_2}$، يوجد مجموعتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان G_1, G_2 تحققان : $x_{N_2} \in G_1, y_{N_2} \notin G_1$ and $x_{N_2} \notin G_2 , y_{N_2} \in G_2$.
- $T_1 - N_3$–فضاء، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الثالث مختلفتين $x_{N_3} \neq y_{N_3}$، يوجد مجموعتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان G_1, G_2 تحققان : $x_{N_3} \in G_1, y_{N_3} \notin G_1$ and $x_{N_3} \notin G_2 , y_{N_3} \in G_2$.

تعريف $(3.3.2)$: يدعى الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش (X,Γ) :

- $T_2 - \mathrm{N}_1$–فضاء ، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الأول مختلفتين $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_1} \neq \mathrm{y}_{\mathrm{N}_1}$ ، يوجد مجموعتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان G_1, G_2 تحققان : $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_1} \in \mathrm{G}_1, \mathrm{y}_{\mathrm{N}_1} \notin \mathrm{G}_1$ and $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_1} \notin \mathrm{G}_2, \mathrm{y}_{\mathrm{N}_1} \in \mathrm{G}_2$ و $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
- $T_2 - \mathrm{N}_2$–فضاء ، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الثاني مختلفتين $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_2} \neq \mathrm{y}_{\mathrm{N}_2}$ ، يوجد مجموعتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان G_1, G_2 تحققان : $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_2} \in \mathrm{G}_1, \mathrm{y}_{\mathrm{N}_2} \notin \mathrm{G}_1$ and $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_2} \notin \mathrm{G}_2, \mathrm{y}_{\mathrm{N}_2} \in \mathrm{G}_2$ و $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
- $T_2 - \mathrm{N}_3$–فضاء ، إذا حقق الشرط : لأجل كل نقطتين نتروسوفيكيتين هشتين من النمط الثالث مختلفتين $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_3} \neq \mathrm{y}_{\mathrm{N}_3}$ ، يوجد مجموعتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان G_1, G_2 تحققان : $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_3} \in \mathrm{G}_1, \mathrm{y}_{\mathrm{N}_3} \notin \mathrm{G}_1$ and $\mathrm{x}_{\mathrm{N}_3} \notin \mathrm{G}_2, \mathrm{y}_{\mathrm{N}_3} \in \mathrm{G}_2$ و $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

تعريف ($\mathbf{4.3.2}$): يدعى الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش (X, Γ) :

- $T_0 - \mathrm{N}$–فضاء إذا كان الفضاء(X, Γ) $T_0 - \mathrm{N}_1$–فضاء و $T_0 - \mathrm{N}_2$–فضاء و $T_0 - \mathrm{N}_3$–فضاء .
- $T_1 - \mathrm{N}$–فضاء إذا كان الفضاء(X, Γ) $T_1 - \mathrm{N}_1$–فضاء و $T_1 - \mathrm{N}_2$–فضاء و $T_1 - \mathrm{N}_3$–فضاء .
- $T_2 - \mathrm{N}$–فضاء إذا كان الفضاء(X, Γ) $T_2 - \mathrm{N}_1$–فضاء و $T_2 - \mathrm{N}_2$–فضاء و $T_2 - \mathrm{N}_3$–فضاء .

ملاحظة ($\mathbf{5.3.2}$):

وجدنا في التعريف السابق ($\mathbf{4.3.2}$) أن :

- كل $T_0 - \mathrm{N}$–فضاء هو $T_0 - \mathrm{N}_1$–فضاء .
- كل $T_0 - \mathrm{N}$–فضاء هو $T_0 - \mathrm{N}_2$–فضاء .
- كل $T_0 - \mathrm{N}$–فضاء هو $T_0 - \mathrm{N}_3$–فضاء .

هل العكس صحيح؟

العكس لكل ماسبق غير صحيح بشكل عام ، كما يوضح المثال الآتي :

مثال $(6.3.2)$:

$X = \{x, y\}$, $\Gamma_1 = \{\mathcal{X}_N , \emptyset_N , A \}, \Gamma_2 = \{\mathcal{X}_N , \emptyset_N , B \}, \Gamma_3 = \{\mathcal{X}_N , \emptyset_N , G \}$
$A =<\{x\},\emptyset,\emptyset>$,$B =<\emptyset,\{y\},\emptyset>$, $G =<\emptyset,\emptyset,\{x\}>$.

عندئذ :

- (X, Γ_1) هو $T_0 - N_1$–فضاء ، لكن ليس $T_0 - N$–فضاء.
- (X, Γ_2)هو $T_0 - N_2$–فضاء ، لكن ليس $T_0 - N$–فضاء.
- (X, Γ_3)هو $T_0 - N_3$–فضاء ، لكن ليس $T_0 - N$–فضاء.

نتيجة $(7.3.2)$:

وجنا في التعريف السابق $(4.3.2)$ أن :

- كل $T_1 - N$–فضاء هو $T_1 - N_1$–فضاء .
- كل $T_1 - N$–فضاء هو $T_1 - N_2$–فضاء .
- كل $T_1 - N$–فضاء هو $T_1 - N_3$–فضاء .

هل العكس صحيح؟

العكس لكل ماسبق غير صحيح بشكل عام ، كما يوضح المثال الآتي :

مثال $(8.3.2)$:

$X = \{x, y\}$, $\Gamma_1 = \{\mathcal{X}_N , \emptyset_N , A, B \}, \Gamma_2 = \{\mathcal{X}_N , \emptyset_N , G, F \}$
$A =<\{x\},\{y\},\emptyset>$,$B =<\{y\},\{x\},\emptyset>$, $G =<\emptyset,\emptyset,\{x\}>$, $F =<\emptyset,\emptyset,\{y\}>$.

عندئذ :

- (X, Γ_1) هو $T_1 - N_1$–فضاء ، لكن ليس $T_1 - N$–فضاء.
- (X, Γ_1)هو $T_1 - N_2$–فضاء ، لكن ليس $T_1 - N$–فضاء.
- (X, Γ_2)هو $T_1 - N_3$–فضاء ، لكن ليس $T_1 - N$–فضاء.

ملاحظة $(9.3.2)$: ليكن الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش (X, Γ) ، عندئذ :

- كل $T_2 - N$–فضاء هو $T_2 - N_1$–فضاء .
- كل $T_2 - N$–فضاء هو $T_2 - N_2$–فضاء .
- كل $T_2 - N$–فضاء هو $T_2 - N_3$–فضاء .

العكس لكل ماسبق غير صحيح بشكل عام ، كما يوضح المثال (8.3.2) .

ملاحظة ($\mathbf{10.3.2}$):ليكن الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش (X, Γ) ، عندئذ :

- كل $\mathrm{N}-T_1$–فضاء هو $\mathrm{N}-T_0$–فضاء .
- كل $\mathrm{N}-T_2$–فضاء هو $\mathrm{N}-T_1$–فضاء .

العكس لكل ماسبق غير صحيح بشكل عام ، كما يوضح المثال الآتي .

مثال ($\mathbf{11.3.2}$):

$\mathrm{X}=\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$, $\Gamma=\{\mathcal{X}_{\mathrm{N}}, \emptyset_{\mathrm{N}}, \mathrm{A}, B, G\}$
$\mathrm{A}=<\{\mathrm{x}\},\emptyset,\emptyset>$,$\mathrm{B}=<\emptyset,\{y\},\emptyset>$, $\mathrm{G}=<\emptyset,\emptyset,\{x\}>$.

عندئذ :

- (X, Γ) هو $\mathrm{N}-T_0$–فضاء ، لكن ليس $\mathrm{N}-T_1$–فضاء.

2 – 4 المجموعات النتروسوفيكية الهشة شبه α –المغلقة في الفضاء النتروسوفيكي الهش

درسنا في هذا القسم من الفصل الثاني من أطروحتنا صفاً جديداً من المجموعات النتروسوفيكية المغلقة ، حيث عرفنا المجموعات النتروسوفيكية الهشة شبه α –المغلقة في الفضاء النتروسوفيكي الهش، ومن ثم درسنا خصائصها الأساسية، ومن ثم استخدمنا هذا النوع الجديد من المجموعات النتروسوفيكية الهشة في تعريف الداخلية واللصاقة النتروسوفيكية الهشة من النمط شبه α ، كما درسنا خصائصها الأساسية.

تعريف ($\mathbf{1.4.2}$) :ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α–مغلقة (NCSα-CS) ، إذا وجدت مجموعة H نتروسوفيكية هشة α–مغلقة في X ، تحقق $\mathrm{NCint(H)} \subseteq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{H}$.

- أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة الشبه α–مغلقة يرمز لها بالرمز NCSαC (X) .
- يمكن تعريف المجموعة النتروسوفيكية الهشة الشبه α–مغلقة وفق التعريف الآتي، المكافئ للتعريف السابق:

تعريف ($\mathbf{2.4.2}$) :ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$ مغلقة، إذا حققت $\mathrm{NCint}(\mathrm{NC}\alpha\mathrm{cl}(A)) \subseteq A$.

تعريف $(3.4.2)$: ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$مفتوحة (NCSα-OS) ، إذا وفقط إذا ،كانت متممها À مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$مغلقة (NCSα-CS) ،أسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة الشبه $\alpha-$مفتوحة يرمز لها بالرمز $\mathrm{NCS}\alpha\mathrm{O}\,(X)$.

- المبرهنة الآتية تعطي شرطاً مكافئاً للتعريف السابق:

مبرهنة$(4.4.2)$: ليكن(X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً هش ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$ مفتوحة، إذا وجدت مجموعة H نتروسوفيكية هشة $\alpha-$مفتوحة في X ، تحقق.$H \subseteq A \subseteq \mathrm{NCcl}(H)$.

مبرهنة$(5.4.2)$: ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، عندئذ :

١) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$مفتوحة (شبه $\alpha-$مغلقة).

٢) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة (α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$مفتوحة (شبه $\alpha-$مغلقة).

البرهان : ينتج عن مبرهنة (16.1.2).

ملاحظة$(6.4.2)$: إن عكس المبرهنة (5.4.2)، غير صحيح بشكل عام، كما يبين المثال الآتي :

مثال$(7.4.2)$: ليكن $X=\{p,q,r,s\},\ \mathrm{A}=\langle\{p\},\{q,s\},\{r\}\rangle, B=\langle\{p\},\{q\},\{r\}\rangle$ ، إن $\Gamma=\{\emptyset_N,\mathcal{A},\mathcal{B},X_N\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X .

١) لتكن $H=\langle\{p\},\{q,r,s\},\emptyset\rangle$. إن $\mathrm{A}\subseteq \mathrm{H}\subseteq NCcl(\mathrm{A})=X_N$، ومنه H مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة، لكنH ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة ، ومن ثم $\grave{H}=\langle\{q,r,s\},\{p\},X\rangle$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة، لكن$\grave{H}$ ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة.

٢) لتكن $\mathrm{B}=\langle\emptyset,\{q,r,s\},\{r,s\}\rangle$ ، إن $\mathrm{B}\nsubseteq \mathrm{NCint}(\mathrm{NCcl}(\mathrm{NCint}(B)))$ ، إن B مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة، لكنB ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة، ومن ثم $\grave{B}=\langle X,\{p\},\{p,q\}\rangle$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة، لكن$\grave{B}$ ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مغلقة.

ملاحظة$(8.4.2)$: ليكن(X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، عندئذ :

إن المجموعات النتروسوفيكية الهشة الشبه α-مفتوحة (α-مغلقة) ، تختلف عن المجموعات النتروسوفيكية الهشة P-مفتوحة (P-مغلقة) ، كما يبين المثالان الآتيان :

مثال(9.4.2) : ليكن $X = \{p, q, r, s\}, \mathrm{A} = \langle\{p\}, \{q\}, \{r\}\rangle, B = \langle\{r\}, \{q\}, \{s\}\rangle$. $, \mathrm{C} = \langle\{p, r\}, \{q\}, \emptyset\rangle, D = \langle\emptyset, \{q\}, \{r, s\}\rangle$

إن $\Gamma = \{\emptyset_N, A, B, C, D, X_N\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X .

لتكن $H = \langle\{r, s\}, \{p, q\}, \{s\}\rangle$.

إن $B \subseteq \mathrm{H} \subseteq NCcl(\mathrm{B}) = \langle\{r, s\}, \{q\}, \emptyset\rangle$ ، ومنه H مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة، لكن H ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة ، ومن ثم $\grave{H} = \langle\{s\}, \{p, q\}, \{r, s\}\rangle$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة، لكن $\grave{H}$ ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مغلقة.

مثال(10.4.2) : ليكن $X = \{p, q, r, s\}, \mathrm{A} = \langle\{p\}, \{q\}, \{r\}\rangle, B = \langle\{p\}, \{q, s\}, \{r\}\rangle$،

إن $\Gamma = \{\emptyset_N, A, B, X_N\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X .

لتكن $H = \langle\{p, q\}, \{r\}, \{s\}\rangle$، إن H مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة ، لكن H ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة ، ومن ثم $\grave{H} = \langle\{s\}, \{r\}, \{p, q\}\rangle$ مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مغلقة، لكن $\grave{H}$ ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة.

مبرهنة(11.4.2) : ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، عندئذ :

١) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في X و كل مجموعة نتروسوفيكية هشة ليست كثيفة في كل مكان في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في X ، فإن كل مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (شبه α-مغلقة) في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (مغلقة) في X.

٢) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في X، فإن كل مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (شبه α-مغلقة) في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة (α-مغلقة) في X.

البرهان : مشابه لحالة التبولوجيا العادية.

مبرهنة(12.4.2) : ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، عندئذ :

١) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (شبه مغلقة) و نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (P-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (شبه α-مغلقة).

٢) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة فيه ، فإن كل مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (شبه α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (P-مغلقة) .

٣) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة فيه فإن كل مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (شبه α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (شبه مغلقة).

البرهان :

١) لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (شبه مغلقة) و نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (P-مغلقة) ومنه حسب مبرهنة (17.1.2)، فإن A هي مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة (α-مغلقة) وحسب البند (2) من المبرهنة (5.4.2) فإن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (شبه α-مغلقة).

٢) لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (α-مغلقة) وحسب (2) من الملاحظة (11.4.2)، فإن A هي مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة (α- مغلقة) ومنه حسب (3) من المبرهنة (16.1.2)فإن A مجموعة نتروسوفيكية هشة P-مفتوحة (P-مغلقة).

٣) لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة (α-مغلقة) ومنه حسب (2) من الملاحظة (11.4.2)، فإن A هي مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة (α- مغلقة) ومنه حسب (2)من المبرهنة (16.1.2) فإن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه مفتوحة (شبه مغلقة).

مبرهنة($\mathbf{13.4.2}$) : ليكن(X,Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

٤) A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة.

٥) يوجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$.

٦) $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$.

البرهان :

$1)\Leftarrow 2)$: لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة D تحقق $D \subseteq A \subseteq NCcl(D)$ ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة H تحقق $H \subseteq D \subseteq NCint(NCcl(H))$حسب مبرهنة (19.1.2)،لذلك

$NCcl(H) \subseteq NCcl(D) \subseteq NCcl(NCint(NCcl(D)))$

ومنه $NCcl(D) \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$

وبالتالي$H \subseteq D \subseteq A \subseteq NCcl(D) \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$

ومنه $H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$.

$2)\Leftarrow 3)$: لنفرض أنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة H ، تحقق

$H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$ ، ولنبرهن أن :

$A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$.

نعلم أن $NCint(A) \subseteq A$ ، كما أن $H \subseteq NCint(A)$ (لأن $NCint(A)$ هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواه في A)، ومنه $NCcl(H) \subseteq NCcl(NCint(A))$ ،

ومن ثم $NCint(NCcl(H)) \subseteq NCint(NCcl(NCint(A)))$

لذلك $NCcl(NCint(NCcl(H))) \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$ ،
لكن $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$ (فرضاً) ، ومنه
$A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H))) \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$
ومنه $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$.

3)⇐1): لتكن $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$ ، ولنبرهن أن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة.
لنضع $D = NCint(A)$ ، نعلم أن $NCint(A) \subseteq A$ ، لبرهان أن $A \subseteq NCcl(NCint(A))$

بما أن $NCint(NCcl(NCint(A))) \subseteq NCcl(NCint(A))$ ، فإن
$NCcl(NCint(NCcl(NCint(A)))) \subseteq NCcl(NCcl(NCint(A))) = NCcl(NCint(A))$.
لكن $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$ (فرضاً) .
لذلك $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A)))) \subseteq NCcl(NCint(A))$
ومنه $A \subseteq NCcl(NCint(A))$ ، ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة D تحقق $D \subseteq A \subseteq NCcl(D)$ ، من جهة اخرى D مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة (لانها مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة) ومنه A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة .

مبرهنة(14.4.2) : ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

٤) A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة.
٥) توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة F، تحقق $NCint(NCcl(NCint(F))) \subseteq A \subseteq F$.
٦) $NCint(NCcl(NCint(NCcl(A)))) \subseteq A$.

البرهان :
1)⇐2) : لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة ومنه $\grave{A}$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه -αمفتوحة، ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة α-مفتوحة D تحقق
$D \subseteq \grave{A} \subseteq NCcl(NCint(NCcl(D)))$ حسب مبرهنة (13.4.2) ،لذلك
$\grave{D} \subseteq \grave{(A)} \subseteq \grave{(NCcl(NCint(NCcl(D))))}$ ومنه $NCint(NCcl(NCint(\grave{D}))) \subseteq A \subseteq \grave{D}$
وبالتالي $NCint(NCcl(NCint(\grave{D}))) \subseteq A \subseteq \grave{D}$ ، لنفرض أن $\grave{D} = F$ ومنه
$NCint(NCcl(NCint(F))) \subseteq A \subseteq F$ حيث F مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في X.
2)⇐3) : لنفرض أنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة F ، تحقق

$NCint(NCcl(NCint(F))) \subseteq A \subseteq F$، ولنبرهن أن $NCint(NCcl(NCint(NCcl(A)))) \subseteq A$.

لكن بما أن $NCcl(A)$ هي أصغر مجموعة نتروسوفيكية مغلقة تحوي A ، فإن $NCcl(A) \subseteq F$ ، ومنه

$NCint(NCcl(A)) \subseteq NCint(F)$ ومنه $NCcl\left(NCint(NCcl(A))\right) \subseteq NCcl(NCint(F))$

ومنه $NCint(NCcl(NCint(NCcl(A)))) \subseteq NCint(NCcl(NCint(F))) \subseteq A$ ومنه

$NCint(NCcl(NCint(NCcl(A)))) \subseteq A$.

(3⟸(1 : لتكن $NCint(NCcl(NCint(NCcl(A)))) \subseteq A$ ، ولبرهان أن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة ، يكفي برهان أن $\acute{A}$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة.

إن $\acute{A} \subseteq \acute{NCint(NCcl(NCint(NCcl(A))))} = NCcl(NCint(NCcl(NCint(\acute{A}))))$

ومنه $\acute{A} \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(\acute{A}))))$ ، ولذلك $\acute{A}$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة ، ومنه A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة .

مبرهنة(15.4.2) : ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش، عندئذ :

اجتماع أسرة مجموعات نتروسوفيكية هشة شبه α− مفتوحة، هو مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α− مفتوحة.

البرهان :

لتكن $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ أسرة مجموعات نتروسوفيكية هشة شبه α− مفتوحة . ولنبرهن على أن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α− مفتوحة ، بما أن $A_\lambda \in NCS\alpha O(X)$ ، فإنه توجد مجموعة نتروسوفيكية هشة α− مفتوحة B_λ تحقق $B_\lambda \subseteq A_\lambda \subseteq NCcl(B_\lambda)$ $\forall \lambda \in \Lambda$ ومنه

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} NCcl(B_\lambda) \subseteq NCcl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda).$$

لكن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda \in NC\alpha O(X)$ حسب مبرهنة (20.1.2)

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda \in NCS\alpha O(X).$$

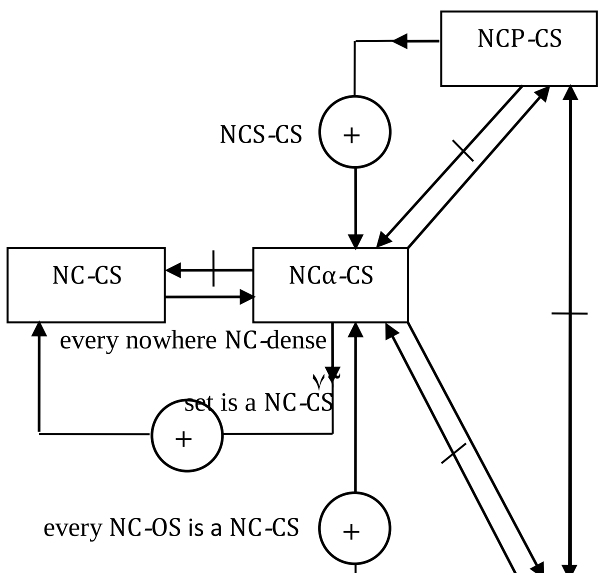
مبرهنة(16.4.2) : ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، عندئذ :

تقاطع أسرة مجموعات نتروسوفيكية هشة شبه α− مغلقة ، هو مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α− مغلقة.

البرهان : ينتج مباشرة من مبرهنة (15.4.2).

ملاحظة (17.4.2):

المخطط التالي يبين العلاقات بين أنواع المجموعات الجديدة النتروسوفيكية الهشة المغلقة التي درسناها



2 – 5 الداخلية واللصاقة النتروسوفيكية الهشة من نمط شبه α :

تعريف $(\mathbf{1.5.2})$: ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

١) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية الهشة من نمط شبه α للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $S\alpha NCcl(A)$ ، بالشكل :

$$S\alpha NCcl(A) = \cap \{B : B \supseteq A \text{ and } B \text{ is a } NCS\alpha\text{-}CS\}.$$

٢) نعرف الداخلية النتروسوفيكية الهشة من نمط شبه α للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $S\alpha NCint(A)$ ، بالشكل :

$$S\alpha NCint(A)= \cup\{B: B \subseteq A, B \text{ is a } NCS\alpha\text{-}OS\}.$$

مبرهنة $(\mathbf{2.5.2})$: ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

١) $S\alpha NCcl(A) = A \Leftrightarrow A \text{ is a } NCS\alpha\text{-}CS$.

٢) $S\alpha NCint(A) = A \Leftrightarrow A \text{ is a } NCS\alpha\text{-}OS$.

٣) $S\alpha NCcl(A)$ أصغر مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$ مغلقة تحوي A.

٤) $S\alpha NCint(A)$ أكبر مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$مفتوحة محتواه في A.

البرهان : ينتج مباشرة من تعريف $S\alpha NCcl(A)$ و $S\alpha NCint(A)$.

مبرهنة $(\mathbf{3.5.2})$: ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ:

١) $S\alpha NCint(X_N - A) = X_N - (S\alpha NCcl(A))$.

٢) $S\alpha NCcl(X_N - A) = X_N - (S\alpha NCint(A))$.

البرهان :

١) حسب التعريف ، $S\alpha NCcl(A) = \cap \{B : B \supseteq A \text{ and } B \text{ is a } NCS\alpha\text{-}CS\}$

$$X_N - (S\alpha NCcl(A)) = X_N - \cap \{B : B \supseteq A \text{ and } B \text{ is a } NCS\alpha - CS\}$$

$$= \cup\{X_N - B : X_N - B \subseteq X_N - A, X_N - B \text{ is a } NCS\alpha\text{-}OS\}$$ (حسب قانون دي مورغان)

$$= \cup\{H : H \subseteq X_N - A, H \text{ is a } NCS\alpha\text{-}OS\}$$
$$= S\alpha NCint(X_N - A).$$

٢) البرهان يتم بشكل مشابه لبرهان ١) .

مبرهنة $(4.5.2)$: ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A و B مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين في X، عندئذ:

١) $S\alpha NCcl(\emptyset_N) = \emptyset_N$، $S\alpha NCcl(X_N) = X_N$.

٢) $A \subseteq S\alpha NCcl(A)$.

٣) $A \subseteq B \Rightarrow S\alpha NCcl(A) \subseteq S\alpha NCcl(B)$.

٤) $S\alpha NCcl(A \cap B) \subseteq S\alpha NCcl(A) \cap S\alpha NCcl(B)$.

٥) $S\alpha NCcl(A) \cup S\alpha NCcl(B) \subseteq S\alpha NCcl(A \cup B)$.

٦) $S\alpha NCcl(S\alpha NCcl(A)) = S\alpha NCcl(A).$.

البرهان :

١) ينتج مباشرة عن تعريف $S\alpha NCcl(A)$.

٢) ينتج مباشرة عن تعريف $S\alpha NCcl(A)$.

٣) حسب (2) نجد $B \subseteq S\alpha NCcl(B)$، وبما أن $A \subseteq B$ نجد أن $A \subseteq S\alpha NCcl(B)$، لكن $S\alpha NCcl(\mathcal{B})$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$ مغلقة، ومنه $A \subseteq S\alpha NCcl(B)$ (لإن $S\alpha NCcl(A)$ أصغر مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$ مغلقة تحوي A) ، ومنه $S\alpha NCcl(A) \subseteq S\alpha NCcl(B)$.

٤) نعلم أن $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$ لذلك ينتج عن (3) أن :

$S\alpha NCcl(A \cap B) \subseteq S\alpha NCcl(A)$ و $S\alpha NCcl(A \cap B) \subseteq S\alpha NCcl(B)$ ومنه

$$S\alpha NCcl(A \cap B) \subseteq S\alpha NCcl(A) \cap S\alpha NCcl(B)$$

٥) نعلم أن $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ لذلك ينتج عن (3) أن :

$S\alpha NCcl(A) \subseteq S\alpha NCcl(A \cup B)$ و $S\alpha NCcl(B) \subseteq S\alpha NCcl(A \cup B)$ ومنه

$S\alpha NCcl(A) \cup S\alpha NCcl(B) \subseteq S\alpha NCcl(A \cup B)$.

٦) بما أن $S\alpha NCcl(\mathcal{B})$ مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه $\alpha-$ مغلقة، فإن

$S\alpha NCcl(S\alpha NCcl(A)) = S\alpha NCcl(A)$ حسب المبرهنة (2.2.4).

مبرهنة $(5.5.2)$: ليكن (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A و B مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين في X ، عندئذ :

١) $S\alpha NCint(\emptyset_N) = \emptyset_N$ ، $S\alpha NCint(X_N) = X_N$.

٢) $S\alpha NCint(A) \subseteq A$.

٣) $A \subseteq B \Rightarrow S\alpha NCint(A) \subseteq S\alpha NCint(B)$.

٤) $S\alpha NCint(A \cap B) \subseteq S\alpha NCint(A) \cap S\alpha NCint(B)$.

٥) $S\alpha NCint(A) \cup S\alpha NCint(B) \subseteq S\alpha NCint(A \cup B)$.

٦) $S\alpha NCint(S\alpha NCint(A)) = S\alpha NCint(A)$. .

البرهان: ينتج عن تعريف $S\alpha NCint(A)$.

مبرهنة$(6.5.2)$: ليكن(X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

١) A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة.

٢) $H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة مثلH.

٣) $H \subseteq A \subseteq SNCint(NCcl(H)))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة مثلH.

٤) $A \subseteq SNCint(NCcl(NCint(A)))$.

البرهان :

$1) \Leftarrow 2)$: لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة ومنه $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$.

ونعلم أن $NCint(A) \subseteq A$

ومنه $H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$ حيث $H = NCint(A)$ مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة.

$2) \Leftarrow 3)$: لنفرض أنه $H \subseteq A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(H)))$ حيث H مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة، لكن $SNCint\big(NCcl(H)\big) = NCcl(NCint(NCcl(H)))$ (حسب مبرهنة (18.1.2))،لذلك$H \subseteq A \subseteq SNCint(NCcl(H))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة مثل H .

$3) \Leftarrow 4)$: لتكن$H \subseteq A \subseteq SNCint(NCcl(H)))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة مثل H.

بما أن H مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة تحوي A فإن: $H \subseteq NCint(A)$ ومنه

ومنه $NCcl(H) \subseteq NCcl(NCint(A))$

لكن، $\mathrm{SNCint(NCcl(H))} \subseteq \mathrm{SNCint(NCcl(NCint(A)))}$

فرضاً $A \subseteq \mathrm{SNCint(NCcl(H))}$ ومنه

$.A \subseteq SNCint(NCcl(NCint(A)))$

4)⇐1) : لتكن $A \subseteq \mathrm{SNCint(NCcl(NCint(A)))}$.

إن $\mathrm{SNCint(NCcl(NCint(A)))} = \mathrm{NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))}$ (حسب مبرهنة (18.1.2)) ومنه $A \subseteq \mathrm{NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))}$ وبالتالي A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مفتوحة.

مبرهنة(7.5.2) : ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

١) A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة.

٢) $\mathrm{NCint(NCcl(NCint(F)))} \subseteq A \subseteq F$، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة مثلF.

٣) $\mathrm{SNCcl(NCint(F)))} \subseteq A \subseteq F$، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة مثلF.

٤) $\mathrm{SNCcl(NCint(NCcl(A))))} \subseteq A$.

البرهان :

1)⇐2) : لتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة ومنه

$\mathrm{NCint(NCcl(NCint(NCcl(A))))} \subseteq A$ وبما أن $A \subseteq \mathrm{NCcl(A)}$ فأن

$\mathrm{NCint(NCcl(NCint(NCcl(A))))} \subseteq A \subseteq \mathrm{NCcl(A)}$ ومنه

$\mathrm{NCint(NCcl(NCint(F)))} \subseteq A \subseteq F$ حيث $F \subseteq \mathrm{NCcl(A)}$.

2)⇐3) : لنفرض أن $\mathrm{NCint(NCcl(NCint(F)))} \subseteq A \subseteq F$ لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة مثلF .

لكن $\mathrm{NCint(NCcl(NCint(F)))} = \mathrm{SNCcl(NCint(F))}$ (حسب مبرهنة (18.1.2))

ومنه $\mathrm{SNCcl(NCint(F)))} \subseteq A \subseteq F$، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة مثلF.

3)⇐4) : لتكن $\mathrm{SNCcl(NCint(F)))} \subseteq A \subseteq F$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة مثلF.

بما أن $A \subseteq F$ فأن $\mathrm{NCcl(A)} \subseteq F$ ومنه $\mathrm{NCint(NCcl(A)} \subseteq \mathrm{NCint(F)}$ ومنه

$\mathrm{SNCcl(NCint(NCcl(A)))} \subseteq \mathrm{SNCcl(NCint(F))} \subseteq A$ ومنه

$\mathrm{SNCcl(NCint(NCcl(A))))} \subseteq A$.

4)⇐1) : لتكن $\mathrm{SNCcl(NCint(NCcl(A))))} \subseteq A$.

بما أن $SNCcl(NCint(NCcl(A))) = NCint(NCcl(NCint(NCcl(A))))$ (حسب مبرهنة (18.1.2))، ومنه $NCint(NCcl(NCint(NCcl(A)))) \subseteq A$ ومنه
A مجموعة نتروسوفيكية هشة شبه α-مغلقة.

3

الفصل الثالث

دراسة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة الثنائية، وتعميمها، و أنماط جديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة

مقدمة:

عمم J. C. Kelly مفهوم الفضاء التبولوجي في عام 1963، حيث أدخل مفهوم الفضاء التبولوجي الثنائي في [13].

عرف Mrsevic و I. L. Reilly في عام 1996 المجموعات المفتوحة من النمط S، والمجموعات المغلقة من النمط S (S-open sets ,S-closed sets) في الفضاء التبولوجي الثنائي في [15].

أيضاً عرف N. A. Jabbar و A. I. Nasir في عام 2010 في [12] المجموعات المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي.

أيضاً عرف R. KH. AlHamido و Q. Imran عام 2017 في [2] المجموعات المفتوحة من النمط N لكن في الفضاء التبولوجي الثلاثي .

A. A. Salama and F. Smarandache , and Valeri Kroumov عام 2014 عرفوا مفهوم الفضاء التوبولوجي النتروسوفيكي الهش كما عرفوا المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة والعمليات عليها في [21] .

أما نحن فقد عرفنا وأوجدنا في هذا الفصل مفهوم الفضاء التوبولوجي الثنائي والثلاثي النتروسوفيكي الهش، كتعميم وتمديد للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش كما أوجدنا مفهوم $\Gamma_1 \vee \Gamma_2$ التبولوجي النتروسوفيكي الهش الأعظمي الذي يحوي كلاً من التبولوجيين النتروسوفيكيين الهشين Γ_1, Γ_2. ثم

استخدمنا هذا المفهوم الجديد للتبولوجيا في تعريف المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR (بشكل مشابه لتعريف المجموعة المفتوحة من النمط N في التبولوجيا العامة)، كما عرفنا العديد من الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثنائية والثلاثية النتروسوفيكية الهشة، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة ، ثم عرفنا الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكي الهش ، ثم عممنا النتائج في هذا الفضاء.

3 – 1 الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي:

عممJ. C. Kelly عام 1963 مفهوم الفضاء التبولوجي، إلى الفضاء التبولوجي الثنائي، أما نحن فقد أدخلنا وأوجدنا مفهوم الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي(X,Γ_1,Γ_2)، كتعميم للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش، كما عرفنا أنماط جديدة من المجموعات الثنائية المفتوحة والمغلقة نتروسوفيكية هشة في هذه الفضاءات ، مثل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط R (بشكل مشابه لتعريف المجموعة المفتوحة من النمط N في التبولوجيا العامة)، المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة المفتوحة والمغلقة، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة، ثم عرفنا الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ومن ثم عممنا ومددنا نتائجنا في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي إلى هذا الفضاء.

تعريف $(\mathbf{3.1.1})$: لتكن X مجموعة ما غير خالية، وليكن كلاً من Γ_1,Γ_2 تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X، عندئذ:

ندعو (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي على X (أو أختصاراً Bi-NCTS).

مثال $(\mathbf{3.1.2})$:

$$X=\{1,2,3,4\},\ \Gamma_1=\{\emptyset_N,X_N,D,C\},\Gamma_2=\{\emptyset_N,X_N,A,B\}$$
$$A=<\{1\},\{2,4\},\{3\}>=C\ ,B=<\{1\},\{2\},\{3,4\}>,D=<\{1\},\{2\},\{3\}>$$

إن كلاً من (X,Γ_2) , (X,Γ_1) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش، وبالتالي فإن (X,Γ_1,Γ_2) هو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي.

تعريف $(\mathbf{3.1.3})$: ليكن(X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً، عندئذ:

- تدعى المجموعة الجزئية A من $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو أختصاراً Bi-NCOS).
- تدعى مكملتها(متممتها)À مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة (أو أختصاراً Bi-NCCS).
- أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة في X نرمز لها بالرمز Bi-NCOS(X) .
- أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة في X نرمز لها بالرمز Bi-NCCS(X) .

مثال $(\mathbf{4.1.3})$: في المثال (2.1.3) أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة هي :

$$\text{Bi-NCOS(X)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{\emptyset_N , X_N , A, B, C, D\}$$

أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة هي :

$$\text{Bi-NCCS(X)} = \{\emptyset_N , X_N , A_1, B_1, C_1, D_1\} ;$$

$$A_1 = <\{2,3,4\},\{1,3\},\{1,2,4\}>= C_1,\ B_1 = <\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2\}>,$$

$$D_1 = <\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\}>$$

ملاحظة $(\mathbf{5.1.3})$: كل فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي(X,Γ_1,Γ_2) يحتوي فضائين نتروسوفيكيين هشين هما (X,Γ_1) و (X,Γ_2) .

ملاحظة $(\mathbf{6.1.3})$: إذا كان(X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً، فإن (X,Γ,Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي .

ملاحظة $(\mathbf{7.1.3})$: ليكن(X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً (Bi-NCTS) ، عندئذ: اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين(مغلقتين) ، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة(مغلقة) .

كما يبين المثال الآتي :

مثال $(\mathbf{8.1.3})$: لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن

$$\Gamma_1 = \{\emptyset_N , X_N , A\}, \Gamma_1 = \{\emptyset_N , X_N , D, C\}, A = <\{3\},\{2,4\},\{1\}>$$

$$, \qquad D = <\{1\},\{2\},\{3\}> C = <\{1\},\{2,4\},\{3\}>$$

بسهولة نجد أن كلاً من (X,Γ_1) , (X,Γ_2) هو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش، ومنه (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي .

A,D مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين لكن اجتماعهما

$A\cup D=<\{1,3\},\{2,4\},\Phi>$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة .

$A^c = < \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,3,4\} >, D^c = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\} >$
مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مغلقتين، لكن اجتماعهما

$A^c \cup D^c = < X, \{1,3\}, \{2,4\} >$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة .

ملاحظة $(\mathbf{9.1.3})$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

تقاطع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين(مغلقتين) ، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة(مغلقة).

كما يبين المثال الآتي :

مثال $(\mathbf{10.1.3})$: لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن

$$\Gamma_1 = \{\emptyset_N, X_N, A\}, \Gamma_2 = \{\emptyset_N, X_N, D, C\}, A = < \{3\}, \{2,4\}, \{1\} >$$

$$, D = < \{1\}, \{2\}, \{3\} > \text{ و } C = < \{1\}, \{2,4\}, \{3\} >$$

بسهولة نجد أن كلاً من (X, Γ_2) , (X, Γ_1) هو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش، ومنه

(X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي .

A, D مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين لكن تقاطعهما

$A \cap D = < \Phi, \{2\}, \{1,3\} >$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة .

$A^c = < \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,3,4\} >, D^c = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\} >$
مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مغلقتين ، لكن تقاطعهما $A^c \cap D^c = < \{2,4\}, \{1,3\}, X >$

ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة .

نتيجة$(\mathbf{11.1.3})$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

لا تشكل أسره المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة، تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

البرهان : ينتج عن المثال $(10.1.3)$.

3 – 2 الداخلية و اللصاقة لمجموعة نتروسوفيكية هشة :

في هذا الجزء من الفصل الثالث نستخدم النمط الجديد من المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة في تعريف الداخلية واللصاقة لمجموعة نتروسوفيكية هشة، كما سندرس الخصائص الأساسية للداخلية واللصاقة .

تعريف $(1.2.3)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:
اجتماع كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة المحتواه في المجموعة النتروسوفيكية الهشة A، تدعى الداخلية الثنائية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة النتروسوفيكية الهشة A، ويرمز لها بالرمز ($NC^{Bi}Int(A)$)، أي :

$NC^{Bi}Int(A) = \cup$ {B : B⊆A ; مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة B} .

ملاحظة $(2.2.3)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياًعلى X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X، عندئذ:

1) $NC^{Bi}Int(A) \subseteq A$.
2) $NC^{Bi}Int(A)$ ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة.

البرهان :
1 - ينتج البرهان من كون الداخلية الثنائية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة النتروسوفيكية الهشة A ، هي اجتماع اي أسرة من المجموعات الثنائية الهشة المفتوحة المحتواه في A .
2- ينتج البرهان من كون اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين ، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة .

مبرهنة $(3.2.3)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياًعلى X، وليكن كلاً من A, B مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ،عندئذ:

$$A \subset B \Longrightarrow NC^{Bi}int(A) \subset NC^{Bi}int(B).$$

تعريف $(4.2.3)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:
تقاطع كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة التي تحوي المجموعة النتروسوفيكية الهشة A، تدعى اللصاقة الثنائية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A، ويرمز لها بالرمز ($NC^{Bi}Cl(A)$)، أي :

$NC^{Bi}cl(A) = \cap$ {B : B⊇A ; مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة B}

مبرهنة $(5.2.3)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X، عندئذ:

1. $A \subseteq NC^{Bi}Cl(A)$.
2. $NC^{Bi}Cl(A)$ ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة.

البرهان :

1 - ينتج البرهان من كون اللصاقة الثنائية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة النتروسوفيكية الهشة A ، هي تقاطع أي أسرة من المجموعات الثنائية الهشة المغلقة، التي تحوي المجموعة A.

2- ينتج البرهان من كون تقاطع مجموعتين ثنائيتين هشتين مغلقتين، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة.

3 – 3 المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط S :

أدخلنا في هذا الجزء من الفصل الثالث تعريف المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط S (أو اختصاراً $S - NCOS$) ، ومتمماتها المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط S (أو اختصاراً $S - NCCS$) ، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة الجديدة المفتوحة والمغلقة، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة الجديدة وبين الأنماط الأخرى من المجموعات النتروسوفيكية الهشة.
تعريف$(1.3.3)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

تدعى المجموعة الجزئية A من X، مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطS

$(S - NCOS)$ ، إذا كانت مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة فقط في أحد الفضائين التبولوجيين النتروسوفيكيين الهشين (X, τ_1) أو (X, τ_2) .

- تدعى متممة المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطS $(S - NCOS)$، مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطS $(S - NCCS)$.
- يرمز لأسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطS بالرمز $S - NCOS(X)$.
- يرمز لأسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطS بالرمز

.$S-\mathrm{NCCS}(X)$

مثال $(2.3.3)$: في المثال (2.1.3) إن كلاً من B ,D مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمط S.

ملاحظة $(3.3.3)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

١) كل مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطS، هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (Bi-NCOS).

٢) كل مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطS، هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة (Bi-NCCS).

ملاحظة $(4.3.3)$: عكس الملاحظة (3.3.3) غير صحيح ، كما يوضح المثال الآتي .

مثال $(5.3.3)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

- $\emptyset_N$, X_N مجموعتان ثنائيتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان (Bi-NCOS) ، لكنهما ليستا مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين من النمطS.
- $\emptyset_N$, X_N مجموعتان ثنائيتان نتروسوفيكيتان هشتان مغلقتان (Bi-NCCS) ، لكنهما ليستا مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مغلقتين من النمطS.

ملاحظة $(6.3.3)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

١) اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين من النمطS، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطS.

٢) اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مغلقتين من النمطS، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطS.

كما يوضح المثال الآتي .

مثال $(7.3.3)$: ليكن $X=\{1,2,3,4\}\,,\Gamma_1=\{\emptyset_N\,,X_N\,,A\}$

$$\Gamma_2=\{\emptyset_N\,,X_N\,,D,C\}\,,A=<\{3\},\{2,4\},\{1\}>$$
$$,D=<\{1\},\{2\},\{3\}>,C=<\{1\},\{2,4\},\{3\}>$$

واضح أن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي فيه:

A, D مجموعتان ثنائيتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان من النمط S ، لكن

$A \cup D = < \{1,3\}, \{2,4\}, \emptyset >$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطS.

أيضاً $A^c = < \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,3,4\} >$, $D^c = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\} >$

مجموعتان ثنائيتان نتروسوفيكيتان هشتان مغلقتان من النمط S، لكن

$A^c \cup D^c = < X, \{1,3\}, \{2,4\} >$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطS.

ملاحظة $(\mathbf{8.3.3})$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

١) تقاطع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين من النمطS، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطS.

٢) تقاطع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مغلقتين من النمطS، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطS.

كما يوضح المثال الآتي .

مثال $(\mathbf{9.3.3})$: في مثال (7.3.3)

A, D مجموعتان ثنائيتان نتروسوفيكيتان هشتان مفتوحتان من النمط S، لكن

$A \cap D = < \emptyset, \{2\}, \{1,3\} >$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطS.

أيضاً $A^c = < \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,3,4\} >$, $D^c = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\} >$

مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مغلقتين من النمط S ، لكن

$A^c \cap D^c = < \{2,4\}, \{1,3\}, X >$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمط S.

نتيجة$(\mathbf{10.3.3})$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

لا تشكل أسره المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطS، تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X (أنظر مثال (9.3.3)) .

3 – 4 المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط R:

في هذا الجزء من الفصل الثالث عرفنا نوعاً جديداً من المجموعات النتروسوفيكية الهشة في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي، حيث عرفنا المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR ($\mathrm{Bi-RNCOS}$)، كما عرفنا المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطR ($\mathrm{Bi-RNCCS}$)، التي تعد متممة للمجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR ، ثم درسنا علاقتها مع المجموعات النتروسوفيكية الهشة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة، وبرهنا أن أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR ، تشكل تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

- في التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR هي نفس المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطN في التبولوجيا العامة كما ذكرت في مقدمة الفصل الثالث.

تعريف$(\mathbf{1.4.3})$: لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، وليكن كلاً من Γ_1, Γ_2 تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X ، عندئذ:

$\Gamma_1 \vee \Gamma_2$ التبولوجي النتروسوفيكي الهش الأعظمي الذي يحوي كلاً من Γ_1, Γ_2

. ($\Gamma_1 \vee \Gamma_2$: is the supremum Neutrosophic topology crisp Spaces on X contains Γ_1, Γ_2)

- ندعو في هذه الحالة $(X, \Gamma_1 \vee \Gamma_2)$الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الأعظمي الذي يحوي كلاً من Γ_1, Γ_2.

تعريف$(\mathbf{2.4.3})$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطR ($\mathrm{Bi-RNCOS}$) ، إذا كانت مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الأعظمي الذي يحوي كلاً من Γ_1, Γ_2.

- تدعى متممة المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR، مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطR ($\mathrm{Bi-RNCCS}$).

- يرمز لأسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR بالرمز $\mathrm{Bi} - \mathrm{RNCOS}(\mathrm{X})$.

- يرمز لأسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطR بالرمز $\mathrm{Bi} - \mathrm{RNCCS}(\mathrm{X})$.

مثال $(\mathbf{3.4.3})$:

$$\mathrm{X} = \{1,2,3,4\}\,, \Gamma_2 = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}, \Gamma_1 = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{D}, \mathrm{C}\}\,, \mathrm{A} = \ C = < \{1\}, \{2,4\}, \{3\} > \\ , \mathrm{B} = < \{1\}, \{2\}, \{3,4\} > , \mathrm{D} = < \{1\}, \{2\}, \{3\} >$$

واضح أن : $(\mathrm{X}\,, \Gamma_2)$، $(\mathrm{X}\,, \Gamma_1)$ فضاءان تبولوجيان نتروسوفيكيان هشتان، لانهما يحققان جميع شروط التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة الثلاث .

المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR، هي :

$$\mathrm{Bi} - \mathrm{RNCOS}(\mathrm{X}) = \ \Gamma_1 \vee \Gamma_2 = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$$

المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمطR، هي :

$$\mathrm{Bi} - \mathrm{RNCCS}(\mathrm{X}) = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{D}_1\}$$

حيث :

$$\mathrm{A}_1 = < \{2,3,4\}, \{1,3\}, \{1,2,4\} > \\ , \mathrm{B}_1 = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2\} > , \mathrm{D}_1 = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\} >$$

مثال$(\mathbf{4.4.3})$:

$$\mathrm{X} = \{1,2,3,4\}\,, \Gamma_1 = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{A}\}, \Gamma_2 = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{D}, \mathrm{C}\}\,, \mathrm{A} = < \{3\}, \{2,4\}, \{1\} > \\ , \ \mathrm{D} = < \{1\}, \{2\}, \{3\} >, \mathrm{C} = < \{1\}, \{2,4\}, \{3\} >$$

واضح أن : $(\mathrm{X}\,, \Gamma_2)$, $(\mathrm{X}\,, \Gamma_1)$ فضاءان تبولوجيان نتروسوفيكيان هشتان لأنهما يحققان جميع شروط التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة الثلاث، المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط R هي :

$$Bi - RNCOS(X) = \ \Gamma_1 \vee \Gamma_2 = \{\emptyset_N\,, \mathrm{X}_N\,, \mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{C}, \mathrm{A} \cup \mathrm{D}, \mathrm{A} \cup \mathrm{C}, \mathrm{A} \cap \mathrm{D}, \mathrm{A} \cap \mathrm{C}\}$$

$$A \cup D = < \{1,3\}, \{2\}, \emptyset >, A \cup C = < \{1,3\}, \{2,4\}, \emptyset >$$
$$, A \cap D = < \emptyset, \{2\}, \{1,3\} >, A \cap C = < \emptyset, \{2,4\}, \{1,3\} >$$

ملاحظة($5.4.3$): ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

- كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في أحد الفضائين $(X, \Gamma_2), (X, \Gamma_1)$ ، هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطR لكن العكس غير صحيح بشكل عام، على سبيل المثال $V = A \cup D = < \{1,3\}, \{2\}, \emptyset >$ في المثال(4.4.3) هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمط R ، لكنها ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في أحد الفضائين النتروسوفيكيين الهشين $(X, \Gamma_1), (X, \Gamma_2)$.
- كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في أحد الفضائين $(X, \Gamma_2), (X, \Gamma_1)$ ، هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطR لكن العكس غير صحيح بشكل عام. على سبيل المثال $U = < \{2,4\}, \{1,3,4\}, X >$ في المثال (4.4.3)هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطR ، لكنها ليست مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في أحد الفضائين النتروسوفيكيين الهشين $(X, \Gamma_1), (X, \Gamma_2)$.

ملاحظة($6.4.3$): ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (أو مغلقتين) من النمطR ، هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمطR.

نتيجة($7.4.3$): ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

اجتماع أي أسرة من المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة (المغلقة) من النمطR، هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمط R.

ملاحظة($8.4.3$): ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

تقاطع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (أو مغلقتين) من النمطR، هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمطR.

نتيجة$(9.4.3)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

كلاً من X_N , $\emptyset_N$ هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمطR.

نتيجة$(10.4.3)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

تشكل أسره المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR، تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

البرهان : ينتج عن ملاحظة (8.4.3) و ملاحظة(7.4.3) و نتيجة(9.4.3).

3 – 5 المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية:

عرفنا في هذا الجزء من الفصل الثالث المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية (أو اختصاراً $\mathrm{Bi-S.NCOS}$) ، ومتممتها المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة القوية (أو اختصاراً $\mathrm{Bi-S.NCCS}$)، ثم درسنا العلاقة بينها وبين المجموعات النتروسوفيكية الهشة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة من جهة، وبينها وبين المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR من جهة أخرى، كما قمنا ببرهان أن أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية، تشكل تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

تعريف$(1.5.3)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

يدعى كل عنصر من $\Gamma_1\cap\Gamma_2$، مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة قوية (أو اختصاراً $\mathrm{Bi-S.NCOS}$)، وتدعى متممتها مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة قوية(أو اختصاراً $\mathrm{Bi-S.NCCS}$).

- يرمز لأسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية بالرمز $\mathrm{Bi-S.NCOS(X)}$
- يرمز لأسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة القوية بالرمز $\mathrm{Bi-S.NCCS(X)}$.

مثال $(2.5.3)$: في المثال (3.4.3) المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية هي :

$$\mathrm{Bi-S.NCOS(X)}=\Gamma_1\cap\Gamma_2=\{\emptyset_N\,,X_N\,,A\}$$

المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المغلقة القوية هي :

$$Bi-S.NCCS(X)=\{\emptyset_N , X_N , A_1\}$$

حيث : $A_1 = <\{2,3,4\},\{1,3\},\{1,2,4\}>$.

ملاحظة ($3.5.3$): ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

١) كل مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة قوية هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في كلّ من الفضائين $(X,\Gamma_1),(X,\Gamma_2)$.

٢) كل مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة قوية هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في كلّ من الفضائين $(X,\Gamma_1),(X,\Gamma_2)$.

البرهان : ينتج عن التعريف(1.5.3).

مبرهنة($4.5.3$): ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (أومغلقتين) قويتين، هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أومغلقة) قوية.

مبرهنة($5.5.3$): ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

تقاطع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (أو مغلقتين) قويتين، هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) قوية.

نتيجة($6.5.3$): ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

كلاً من $\emptyset_N , X_N$ هو مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) قوية .

نتيجة($7.5.3$): ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X ، عندئذ:

تشكل أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية ، تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

البرهان : ينتج عن نتيجة (4.5.3) و نتيجة(6.5.3) و مبرهنة(5.5.3).

ملاحظة($8.5.3$): ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً هشاً ثنائياً على X، عندئذ:

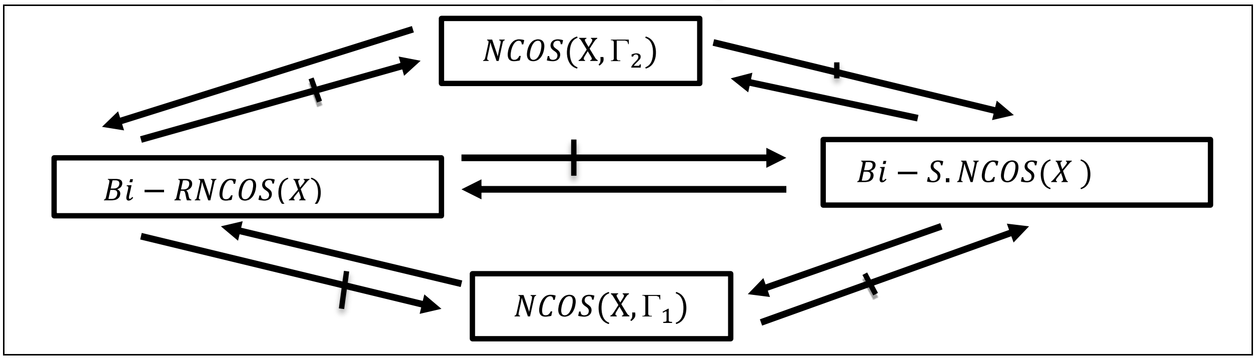
- كل مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة قوية، هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطR لكن العكس غير صحيح بشكل عام، على سبيل المثال

$B = < \{1\},\{2\},\{3,4\} >$ في المثال (3.4.3) هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمطR، لكن ليست مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مفتوحة قوية .

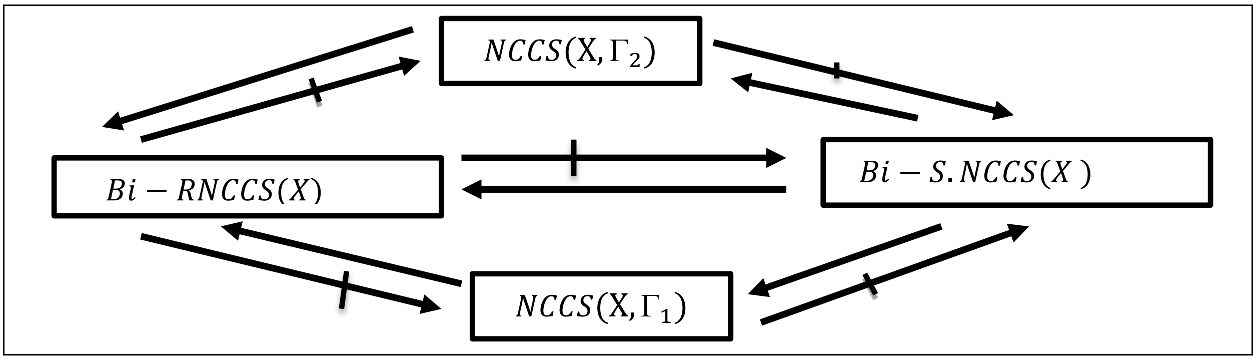
- كل مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة قوية ، هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطR لكن العكس غير صحيح بشكل عام، على سبيل المثال $B_1 = < \{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2\} >$ في المثال (3.4.3) هي مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطR، لكن ليست مجموعة ثنائية نتروسوفيكية هشة مغلقة قوية.

مخطط توضيحي لبعض النتائج السابقة حول الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة :

(حيث $\longleftarrow$ = $\Leftarrow$ و $\not\longleftarrow$ = $\not\Leftarrow$)



مخطط توضيحي لبعض النتائج السابقة حول الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة :



3 – 6 الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة و أنماط جديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة:

عممنا نتائجنا السابقة في بداية هذا الفصل، من الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش إلى الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، حيث عرفنا ودرسنا في هذا الجزء من الفصل الثالث مفهوم الفضاءات متعددة التبولوجية النتروسوفيكية الهشة بطريقتين إحداهما بوصفها تمديداً للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي (حيث توصلنا إلى نتائج تعد تعميم لنتائجنا في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي) وهي ماسوف نتوسع في دراستها في هذا القسم من الفصل الثالث، والأخرى بطريقة جديدة سندرسها بشكل موسع في الفصل الرابع، كما عرفنا العديد من الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة في الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة ، وتوصلنا الى العديد من النتائج، التي يتم البرهان عليها بشكل مشابه لمثيلاتها في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي، لذلك لم نذكر البرهان عليها، تجنبا للإطالة والتكرار.

تعريف$(\mathbf{1.6.3})$: لتكن X مجموعة ما غير خالية، وليكن كلاً من$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X، عندئذ:

ندعو $(\mathrm{X}, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X (n-NCTS).

- تدعى المجموعة الجزئية A من $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$ مجموعة $n-$ نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو أختصاراً n-NCOS).
- تدعى مكملتها (متممتها) $\grave{\mathrm{A}}$ مجموعة $\mathrm{n}-$نتروسوفيكية هشة مغلقة (أو أختصاراً n-NCCS).
- أسرة المجموعات $n-$النتروسوفيكية الهشة المفتوحة في X نرمز لها بالرمز n-NCOS(X) .
- أسرة المجموعات $n-$النتروسوفيكية الهشة المغلقة في X نرمز لها بالرمز n-NCCS(X) .

ملاحظة $(\mathbf{2.6.3})$: في التعريف (1.6.3) :

- إذا كانت n=2 يدعى $(\mathrm{X}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ الفضاء النتروسوفيكي الهش الثنائي (Bi-NCTS)، المجموعات $2-$النتروسوفيكية الهشة المفتوحة فيه هي نفسها المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة (2-NCOS=Bi-NCOS) التي درسناها في الفصل الثاني.
- إذا كانت n=3 يدعى $(\mathrm{X}, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ الفضاء النتروسوفيكي الهش الثلاثي (Tri-NCTS) ، المجموعات $3-$النتروسوفيكية الهشة المفتوحة فيه هي نفسها المجموعات الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة (3-NCOS=Tri-NCOS).

في الحقيقة قمنا بدراسة هذا الفضاء النتروسوفيكي الهش الثلاثي بشكل موسع ، وعرفنا أنماطاً جديدة من المجموعات الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة فيه، إلا اننا لم نذكر منها إلا جزءً بسيطاً،

لأنها تعد تعميم للدراسة في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي وحالة خاصة لدراستنا في الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة.

مثال $(3.6.3)$:

$X=\{1,2,3,4\}, \Gamma_1 = \{\emptyset_N , X_N , D, C\} , \ \Gamma_2 = \{\emptyset_N , X_N , A\} , \Gamma_3 = \{\emptyset_N , X_N , B\}$
$A = < \{1\}, \{2,4\}, \{3\} >= C \ \ , B = < \{1\}, \{2\}, \{3,4\} > , D = < \{1\}, \{2\}, \{3\} >$

إن كلاً من(X , Γ_3) , (X , Γ_1) ,(X , Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش، وبالتالي فإن $(X, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ هو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثلاثي.

أسرة المجموعات الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة هي :

Tri-NCOS(X) = 3-NCOS(X) = $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \{\emptyset_N , X_N , A, B, C, D\}$

أسرة المجموعات الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المغلقة هي :

Tri-NCCS(X) = 3-NCCS(X) = $\{\emptyset_N , X_N , A_1, B_2, C_2, D_2\}$,

حيث :

$$A_1 = < \{2,3,4\}, \{1,3\}, \{1,2,4\} >= C_1$$
$$, B_1 = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2\} > ,$$
$$D_1 = < \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\} >$$

ملاحظة $(4.6.3)$: ليكن $(X, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

اجتماع مجموعتين $n-$نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (مغلقتين) ، ليس بالضرورة مجموعة $n-$ نتروسوفيكية هشة مفتوحة (مغلقة).

ملاحظة $(5.6.3)$: ليكن $(X, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

تقاطع مجموعتين $n-$نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (مغلقتين) ، ليس بالضرورة مجموعة $n-$ نتروسوفيكية هشة مفتوحة (مغلقة).

- يمكن أيضاً تعميم تعريف الداخلية واللصاقة لمجموعة نتروسوفيكية هشة ودراسة خصائصها الأساسية في الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، كالآتي :

تعريف $(6.6.3)$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

اجتماع كل مجموعات n–نتروسوفيكية هشة مفتوحة محتواه في المجموعة النتروسوفيكية الهشة A، تدعى داخلية n–نتروسوفيكية هشة للمجموعة النتروسوفيكية الهشة A ، ويرمز لها بالرمز $(NC^n Int(A))$، اي :

. $NC^n Int(A)= \cup$ {B : B⊆A ; نتروسوفيكية هشة مفتوحة–n مجموعة B}

مبرهنة $(7.6.3)$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، وليكن كلّ من A,B مجموعة نتروسوفيكية هشة من X ، عندئذ:

$A \subset B \Longrightarrow NC^n int(A) \subset NC^n int(B).$

تعريف $(8.6.3)$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

تقاطع كل مجموعات n–نتروسوفيكية هشة مغلقة، تحوي المجموعة النتروسوفيكية الهشة A، تدعى لصاقة n–نتروسوفيكية هشة للمجموعة A ، ويرمز لها بالرمز ($NC^n Cl(A)$) ، أي :

.$NC^n cl(A)= \cap$ {B : B⊇A ; نتروسوفيكية هشة مغلقة–nمجموعة B}

مبرهنة $(9.6.3)$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة من X، عندئذ:

1) $A \subseteq NC^n Cl(A)$.
2) $NC^n Cl(A)$. مجموعة ليس بالضرورة n–نتروسوفيكية هشة مغلقة

- سنعرف الآن المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط $n.S$ (أو أختصاراً $n.S-$ NCOS) ، ومتمماتها المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط $n.S$ (أو أختصاراً $n.S-$ NCCS)، إلى الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة.

تعريف$(10.6.3)$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X ، عندئذ:

تدعى المجموعة الجزئية A من X مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمط$n.S$

$(n.S-NCOS)$ ، إذا كانت مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة فقط في أحد الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة (X,τ_1) أو (X,τ_2) أو… أو (X,τ_n).

- تدعى متممة المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.S$ ($\mathrm{n.S-NCOS}$)، مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمط$n.S$ ($\mathrm{n.S-NCCS}$).
- يرمز لأسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.S$ بالرمز $\mathrm{n.S-NCOS(X)}$.
- يرمز لأسرة المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط$n.S$ بالرمز $\mathrm{n.S-NCCS(X)}$.
- سنعمم تعريف المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمطR، من الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي إلى حالة الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة.

تعريف($\mathbf{11.6.3}$): لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، وليكن كل من $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X ، عندئذ:

$\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \dots \vee \Gamma_n$ التبولوجي النتروسوفيكي الهش الأعظمي الذي يحوي كلاً من $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

تعريف($\mathbf{12.6.3}$): ليكن $(\mathrm{X}, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mathrm{n})$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

تدعى المجموعة الجزئية A من X، مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمط$n.R$

($\mathrm{n-RNCOS}$) ، إذا كانت مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش $(\mathrm{X}, \Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \dots \vee \Gamma_n)$.

- تدعى متممة المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.R$ ($\mathrm{n-RNCOS}$)، مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمط$n.R$ ($\mathrm{n-RNCCS}$).
- يرمز لأسرة كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.R$ بالرمز $\mathrm{n-RNCOS(X)}$.

- يرمز لأسرة كل المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط $n.R$ بالرمز $\mathrm{n}-\mathrm{RNCCS(X)}$.

- حالات خاصة:

١) في حالة n=2 : المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط $2.R$ هي نفسها المجموعة الثنائية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط R $(Bi-RNCOS)$، (وهي مادرسناه في بداية هذا الفصل الثالث) .

٢) في حالة n=3 : المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط $3.R$ هي المجموعة الثلاثية النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط R $(Tri-RNCOS)$.

مثال $(\mathbf{13.6.3})$:

$$\mathrm{X}=\{1,2,3,4\}, \Gamma_1=\{\emptyset_N, \mathrm{X}_N, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}, \Gamma_2=\{\emptyset_N, \mathrm{X}_N, \mathrm{D}, \mathrm{C}\}, \Gamma_3=\{\emptyset_N, \mathrm{X}_N\}$$

$$\mathrm{A}= C=<\{1\},\{2,4\},\{3\}>, \mathrm{B}=<\{1\},\{2\},\{3,4\}>, \mathrm{D}=<\{1\},\{2\},\{3\}>$$

واضح أن كلاً من : (X, Γ_1)، $(\mathrm{X}, \Gamma_2), (\mathrm{X}, \Gamma_3)$ فضاءات تبولوجية نتروسوفيكية هشة لأنها تحقق جميع شروط التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة الثلاث.

المجموعة النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط $3.R$ هي :

$$Tri-RNCOS(X)=3-RNCOS(X)= \Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \Gamma_3=\{\emptyset_N, \mathrm{X}_N, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}\}$$

المجموعة النتروسوفيكية الهشة المغلقة من النمط $3.R$ هي :

$$Tri-RNCCS(X)=3-RNCCS(X)=\{\emptyset_N, \mathrm{X}_N, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{D}_1\}$$

حيث :

$$\mathrm{A}_1=<\{2,3,4\},\{1,3\},\{1,2,4\}>$$
$$, \mathrm{B}_1=<\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2\}>, \mathrm{D}_1=<\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\}>$$

ملاحظة$(\mathbf{14.6.3})$: ليكن $(\mathrm{X}, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\mathrm{n}})$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

١) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة في أحد الفضاءات

$(X,\Gamma_1),(X,\Gamma_2),\dots,(X,\Gamma_n)$ ، هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة من النمط$n.R$ لكن العكس غير صحيح بشكل عام.

٢) كل مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة في أحد الفضاءات

$(X,\Gamma_1),(X,\Gamma_2),\dots,(X,\Gamma_n)$ ، هي مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة من النمطnR لكن العكس غير صحيح بشكل عام.

مبرهنة$(\mathbf{15.6.3})$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

اجتماع مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (أو مغلقتين) من النمط$n.R$، هو مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمط$n.R$.

نتيجة$(\mathbf{16.6.3})$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X، عندئذ:

اجتماع أي أسرة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط$n.R$، هو مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمط$n.R$.

مبرهنة$(\mathbf{17.6.3})$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X ، عندئذ:

تقاطع مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين مفتوحتين (أو مغلقتين) من النمط$n.R$، هو مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمط$n.R$.

نتيجة$(\mathbf{18.6.3})$: ليكن $(X,\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X ، عندئذ:

كل من X_N , $\emptyset_N$ هو مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة (أو مغلقة) من النمط$n.R$.

نتيجة($19.6.3$): ليكن $(X, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X ، عندئذ:

أسره المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة من النمط $n.R$ تشكل تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X.

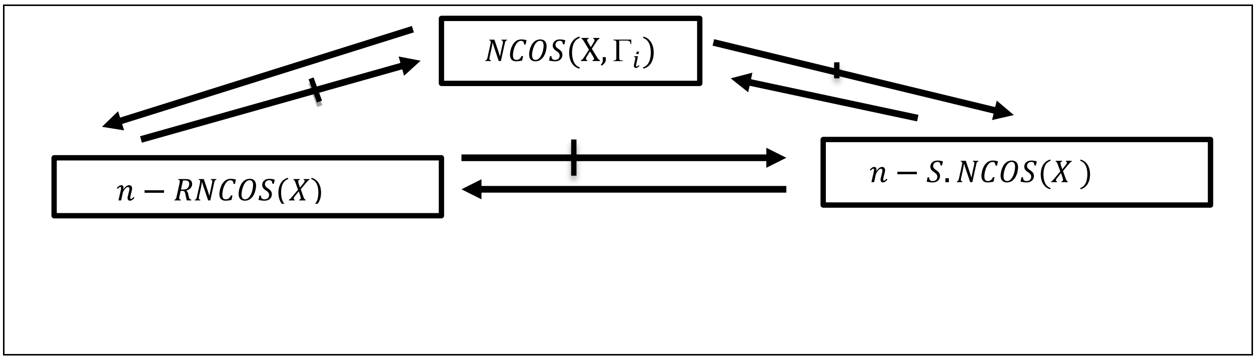
- سنعمم تعريف المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية $(\mathrm{Bi} - \mathrm{S.NCOS})$ ، إلى الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، كالآتي :

تعريف($20.6.3$): ليكن $(X, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة على X ، عندئذ:

يدعى كل عنصر من $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_n$ مجموعة نتروسوفيكية هشة مفتوحة قوية (أو اختصاراً $n - \mathrm{S.NCOS}$) ، وتدعى متممتها مجموعة نتروسوفيكية هشة مغلقة قوية (أو اختصاراً $n - \mathrm{S.NCCS}$).

- يرمز لأسرة كل المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة القوية بالرمز $n - \mathrm{S.NCOS(X)}$
- يرمز لأسرة كل المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة القوية بالرمز $n - \mathrm{S.NCCS(X)}$.

مخطط توضيحي لبعض النتائج السابقة حول الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة :



4

الفصل الرابع

الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة بمنظور جديد

لقد قدم الباحثون M. Lellis Thivagar, V. Ramesh, M. D. Arockia في عام 2016 تعريفاً للفضاء متعدد التبولوجيا بطريقة مبتكرة وجديدة في [37]، حيث مددوا تعريف الفضاء التبولوجي الى الفضاء متعدد التبولوجيا (N-topological space) ، كما في تعريفهم الآتي :

تعريف : [37] لتكن كل من $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ تبولوجيا على X ، عندئذ :

$$N\tau = \{G \subseteq X \ : G = (\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \cup (\bigcap_{i=1}^{N} B_i) \qquad , \quad A_i, B_i \in \tau_i\}$$

تدعى تبولوجيا على X (N-topology) ، إذا كانت تحقق الشروط الثلاث المعروفة للتبولوجيا.

في هذه الحالة $(X, N\tau)$ يدعى فضاء متعدد التبولوجيا (N-topological spaces)

- كل مجموعة من $N\tau$ تدعى مجموعة $N-$مفتوحة متممتها تدعى $N-$مغلقة .

أيضا قدموا تعريف العديد من المجموعات الجديدة المفتوحة والمغلقة فيه.

ندرس ونعرف في هذا القسم من رسالتنا مفهوم الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة (N_{nc}-topological spaces) كتمديد أو تعميم للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش من جهة أولى، و كتمديد أو تعميم للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي من جهة أخرى، وذلك بطريقة ثانية تختلف عن الطريقة السابقة في الفصل الثالث (التي عرفنا فيها الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية

الهشة ، على أنه مجموعة غير خالية X مزودة بالعديد من التبولوجيات النتروسوفيكية الهشة) ، حيث عرفنا في هذا الفصل الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة بطريقة جديدة ومبتكرة ، إذ اننا لم نكتف بتزويد المجموعة X بالعديد من التبولوجيات النتروسوفيكية الهشة بل دمجنا هذه التبولوجيات النتروسوفيكية الهشة لنحصل على تبولوجيا نتروسوفيكية هشة، ايضا قمنا بتعريف العديد من المجموعات الجديدة فيه ، مثل : المجموعة N_{nc}-مفتوحة (N_{nc}-مغلقة) ، المجموعة $P\text{-}N_{nc}$-مفتوحة ($P\text{-}N_{nc}$-مغلقة) والمجموعة $S\text{-}N_{nc}$- مفتوحة ($S\text{-}N_{nc}$- مغلقة) والمجموعة $\alpha\text{-}N_{nc}$-مفتوحة ($\alpha\text{-}N_{nc}$-مغلقة)، ودرسنا العلاقات بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الهشة الجديدة.

4 – 1 الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة بطريقة ثانية :

تعريف (1.1.4): لتكن كل من $_{nc}\tau_1, {}_{nc}\tau_2, \ldots, {}_{nc}\tau_N$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X، عندئذ :

الأسرة $N_{nc}\tau = \{G \subseteq X \ : G = (\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \cup (\bigcap_{i=1}^{N} B_i) \quad , \quad A_i, B_i \in_{nc} \tau_i\}$

تدعى تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X (N_{nc}-topology)، إذا كانت تحقق الشروط الثلاث المعروفة للتبولوجيا النتروسوفيكية الهشة.

- في هذه الحالة $(X, N_{nc}\tau)$ يدعى فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة (N_{nc}-topological spaces on X).
- كل مجموعة من $N_{nc}\tau$ تدعى مجموعة N_{nc}- مفتوحة (N_{nc}-open set) ، متممتها تدعى N_{nc}-مغلقة (N_{nc}-closed set) .
- أسرة المجموعات N_{nc}- مفتوحة، يرمز لها بالرمز N_{nc}- OS .
- أسرة المجموعات N_{nc}–مغلقة ، يرمز لها بالرمز N_{nc}- SC .

ملاحظة (2.1.4):

في التعريف (1.1.4) :

- بفرض $N = 2$ ، نحصل على تعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي$(X, 2_{nc}\tau)$.
- بفرض $N = 3$ ، نحصل على تعريف الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثلاثي$(X, 3_{nc}\tau)$.

مثال (3.1.4):

$$X = \{1,2,3,4\}, \quad {}_{nc}\tau_1 = \{\phi_N, X_N, \mathrm{A}\}, \quad {}_{nc}\tau_2 = \{\phi_N, X_N, \mathrm{B}\}, {}_{nc}\tau_3 = \{\phi_N, X_N\}$$
$$\mathrm{A} = <\{3\},\{2,4\},\{1\}>, B = <\{1\},\{2\},\{2,3\}>,$$

ومنه $3_{nc}\tau=\{\varnothing_N, X_N, A, B, A\cup B, A\cap B\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X، حيث :

$A\cup B=<\{1,3\},\{2,4\},\varnothing>, A\cap B=<\varnothing,\{2\},\{1,2,3\}>,$

ومنه $(X, 3_{nc}\tau)$ فضاء تبولوجي نتروسوفي هش ثلاثي.

مثال $(4.1.4)$:

$X=\{1,2,3,4\},\quad {}_{nc}\tau_1=\{\phi_N, X_N, \mathrm{A}\},\quad {}_{nc}\tau_2=\{\phi_N, X_N, \mathrm{B}\}$

$\mathrm{A}=<\{3\},\{2,4\},\{1\}>, B=<\{1\},\{2\},\{2,3\}>,$

ومنه $2_{nc}\tau=\{\varnothing_N, X_N, A, B, A\cup B, A\cap B\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية هشة على X ، حيث :

$A\cup B=<\{1,3\},\{2,4\},\varnothing>, A\cap B=<\varnothing,\{2\},\{1,2,3\}>,$

ومنه $(X, 2_{nc}\tau)$ فضاء تبولوجي نتروسوفي هش ثنائي .

تعريف $(5.1.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

٤) نعرف الداخلية النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $N_{nc}int(A)$ ، بالشكل :

$N_{nc}int(A) = \cup \{G : G\subseteq A ;$ مجموعة N_{nc}- مفتوحة $G\}.$

٥) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية الهشة للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $N_{nc}cl(A)$ ، بالشكل :

$N_{nc}cl(A) = \cap \{F : A\subseteq F ;$ مجموعة N_{nc}- مغلقة $F\}.$

ملاحظة$(6.1.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ولتكن A و B مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين في X، عندئذ :

1) $A \subseteq N_{nc}cl(A).$
2) $A \subseteq B \Rightarrow N_{nc}cl(A) \subseteq N_{nc}cl(B).$
3) $N_{nc}cl(A \cup B) = N_{nc}cl(A) \cup N_{nc}cl(B).$

البرهان :

١) ينتج عن كون $N_{nc}cl(A) = \cap\{G : A \subseteq G ;$ مجموعة G N_{nc}- مغلقة $\}$.

٢) بما أن $A \subseteq B$ فإن :

$N_{nc}cl(A) = \cap\{G : A \subseteq G ;$ مجموعة G N_{nc}- مغلقة $\} \subseteq$

$\cap\{G : B \subseteq G ;$ مجموعة G N_{nc}- مغلقة $\} = N_{nc}cl(B)$.

٣)

$N_{nc}cl(A \cup B) = \cap\{G : A\cup B \subseteq G ;$ مجموعة G N_{nc}- مغلقة $\}$

$= [\cap\{G : A \subseteq G ;$ مجموعة G N_{nc}- مغلقة $\}] \cup$

$[\cap\{G : B \subseteq G ;$ مجموعة G N_{nc}- مغلقة $\}]$

$= N_{nc}cl(A) \cup N_{nc}cl(B).$

$\Rightarrow N_{nc}cl(A \cup B) = N_{nc}cl(A) \cup N_{nc}cl(B).$

مبرهنة(7.1.4) : ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ولتكن A و B مجموعتين نتروسوفيكيتين هشتين في X، عندئذ :

1) $N_{nc}int(A) \subseteq A.$

2) $A \subseteq B \Rightarrow N_{nc}int(A) \subseteq N_{nc}int(B).$

3) $N_{nc}int(A \cap B) = N_{nc}int(A) \cap N_{nc}int(B).$

4) $(N_{nc}cl(A))^c = N_{nc}int(A)^c.$

5) $(N_{nc}int(A))^c = N_{nc}cl(A)^c.$

البرهان :

١) ينتج عن كون $N_{nc}int(A) = \cup\{G : G \subseteq A ;$ مجموعة G N_{nc}- مفتوحة $\}$.

٢) بما أن $A \subseteq B$ فإن :

$N_{nc}int(A) = \cup\{G : G \subseteq A;$ مجموعة G N_{nc}- مفتوحة $\} \subseteq$

$\cup\{G : G \subseteq B;$ مجموعة G N_{nc}- مفتوحة $\} = N_{nc}int(B)$

٣)

$N_{nc}int(A\cap B) = \cup\{G : G \subseteq A\cap B ;$ مجموعة G N_{nc}- مفتوحة $\}$

$= [\cup\{G : G \subseteq A$; مفتوحة -N_{nc} مجموعة G $\}] \cap$
$[\cup\{G : G \subseteq B$; مفتوحة -N_{nc} مجموعة G $\}]$
$= N_{nc}int(A) \cup N_{nc}int(B)$.

$\Rightarrow N_{nc}int(A \cap B) = N_{nc}int(A) \cap N_{nc}int(B)$.

٤) بما أن $\{$ G مجموعة N_{nc}- مغلقة ; $N_{nc}cl(A) = \cap\{G : A \subseteq G$ فإن:

$(N_{nc}cl(A))^c = \cup\{ G^c : A^c \supseteq G^c$; مفتوحة -N_{nc} مجموعة G^c $\}= N_{nc}int(A)^c$.

ومنه : $(N_{nc}cl(A))^c = N_{nc}int(A)^c$.

٥) بما أن :

$N_{nc}int(A) = \cup\{G : G \subseteq A$; مفتوحة -N_{nc} مجموعة G $\}$

فإن : $(N_{nc}int(A))^c = \cap\{ G^c : A^c \subseteq G^c$; مغلقة -N_{nc} مجموعة G^c $\}= N_{nc}cl(A)^c$.

ومنه : $(N_{nc}int(A))^c = N_{nc}cl(A)^c$.

مبرهنة(8.1.4) : ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

1) $N_{nc}cl(A) = A \Leftrightarrow$ مغلقة -N_{nc} مجموعة A.

2) $N_{nc}int(A) = A \Leftrightarrow$ مفتوحة -N_{nc} مجموعة A.

3) $N_{nc}cl(A)$ هي أصغر مجموعة N_{nc}- مغلقة تحوي A.

4) $N_{nc}int(A)$ هي أكبر مجموعة N_{nc}- مفتوحة محتواه في A.

البرهان : ينتج مباشرة عن تعريف الداخلية واللصاقة لمجموعة نتروسوفيكية هشة.

4 – 2 أنماط جديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة في الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة :

تعريف (1.2.4): ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

١) A تدعى مجموعة N_{nc}-P-مفتوحة (N_{nc}-P-OS) ، إذا حققت $A\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(A))$ ، متممتها تدعى مجموعة N_{nc} -P- مغلقة (N_{nc} -P-CS).

٢) A تدعى مجموعة N_{nc} - شبه مفتوحة(N_{nc} -S- مفتوحة)(N_{nc}-S-OS) ، إذا حققت $A\subseteq N_{nc}cl(N_{nc}int(A))$ ، متممتها تدعى مجموعة N_{nc} - شبه مغلقة (N_{nc} -S- مغلقة) .(N_{nc}-S-CS)

٣) A تدعى مجموعة N_{nc}- α-مفتوحة(N_{nc}-α-OS) ، إذا حققت $A\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(N_{nc}int(A)))$ متممتها تدعى مجموعة N_{nc}- α-مغلقة (N_{nc}-α-CS) .

ملاحظة (**2.2.4**): في التعريف (1.2.4) :

٤) أسرة المجموعات N_{nc} -P- مفتوحة (N_{nc}-P- مغلقة) يرمز لها بالرمز $N_{nc}POS(X)$ ($N_{nc}PCS(X)$).

٥) أسرة المجموعات N_{nc}-شبه مفتوحة (N_{nc}- شبه مغلقة) يرمز لها بالرمز $N_{nc}SOS(X)$ ($N_{nc}SCS(X)$).

٦) أسرة المجموعات N_{nc}- α-مفتوحة (N_{nc}- α-مغلقة) يرمز لها بالرمز N_{nc}-α-OS(X) (N_{nc}-α-CS(X)).

مثال (**3.2.4**): ليكن $_{nc}\tau_1=\{\phi_N, X_N, A\}$, $_{nc}\tau_2=\{\phi_N, X_N, B\}$ حيث $X=\{a,b,c,d\}$:

$A=<\{a\},\{b\},\{c\}>, B=<\{a\},\{b,d\},\{c\}>$, وبالتالي ، $2_{nc}\tau=\{\varnothing_N, X_N, A, B\}$.

إن $(X, 2_{nc}\tau)$ فضاء تبولوجي نتروسوفيكي هش ثنائي ، بسهولة نجد أن $H=<\{a,b\},\{c\},\{d\}>$ مجموعة $N_{nc}-P-$مفتوحة ، لكن H ليست مجموعة $N_{nc}-\alpha-$مفتوحة، وبالتالي H^c مجموعة $N_{nc}-P-$مغلقة ، لكن H^c ليست مجموعة $N_{nc}-\alpha-$مغلقة.

أيضاً بسهولة نجد أن A^c مجموعة $N_{nc}-S-$مغلقة ، A مجموعة $N_{nc}-\alpha-$مفتوحة، وبالتالي A^c مجموعة $N_{nc}-\alpha-$مغلقة.

تعريف (**4.2.4**): ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

١) N_{nc}-P-int(A) = ∪{G : G ⊆ A ; مفتوحة -P- N_{nc}مجموعة G }.

٢) N_{nc}-P-cl(A) = ∩{ F : A ⊆ F; مغلقة -P- N_{nc}مجموعة F }.

٣) N_{nc}-S-int(A) = ∪{G : G ⊆ A ; مفتوحة -S- N_{nc}مجموعة G }.

٤) N_{nc}-S-cl(A) = ∩{ F : A ⊆ F; مغلقة -S- N_{nc}مجموعة F }.

٥) N_{nc}-α-int(A) = ∪{G : G ⊆ A ; مفتوحة -α- N_{nc}مجموعة G }.

٦) N_{nc}-α-cl(A) = ∩{ F : A ⊆ F; مغلقة -α- N_{nc}مجموعة F }.

ملاحظة(**5.2.4**): في المبرهنتين (6.2.4) و(7.2.4) الرمز N_{nc}-k-cl(A)(N_{nc}-k-int(A)) يعني N_{nc}-P-cl(A)(N_{nc}-P-int(A)) عندما k = p ، و يعني N_{nc}-S-cl(A)(N_{nc}-S-int(A)) عندما

$k = S$ ، ويعني N_{nc}-α-cl(A)(N_{nc}-α-int(A)) عندما $k = \alpha$.

مبرهنة (6.2.4): ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X، عندئذ :

1) $A \subseteq N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A)$.

2) $N_{nc}\text{-}k\text{-}int(A) \subseteq A$.

3) $A \subseteq B \Rightarrow N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A) \subseteq N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(B)$.

4) $A \subseteq B \Rightarrow N_{nc}\text{-}k\text{-}int(A) \subseteq N_{nc}\text{-}k\text{-}int(B)$.

5) $N_{nc}\text{-}k\text{-}cl\ (A \cup B) = N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A) \cup N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(B)$.

6) $N_{nc}\text{-}k\text{-}int\ (A \cap B) = N_{nc}\text{-}k\text{-}int(A) \cap N_{nc}\text{-}k\text{-}int(B)$.

7) $(N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A))^c = N_{nc}\text{-}k\text{-}int(A)^c$.

8) $(N_{nc}\text{-}k\text{-}int(A))^c = N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A)^c$.

مبرهنة(7.2.4) : ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

1) $N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A) = A \Leftrightarrow$ مغلقة− $k\text{-}N_{nc}$ مجموعة A.

2) $N_{nc}\text{-}k\text{-}int(A) = A \Leftrightarrow$ مفتوحة- $k\text{-}N_{nc}$ مجموعة A.

3) A تحوي مغلقة - $k\text{-}N_{nc}$ هي أصغر مجموعة $N_{nc}\text{-}k\text{-}cl(A)$.

4) A هي أكبر مجموعة $k-N_{nc}$ -مفتوحة محتواه في N_{nc}-k-int(A).

مبرهنة$(8.2.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، عندئذ :

٤) كل مجموعة N_{nc}− مفتوحة (N_{nc}−مغلقة) هي مجموعة $\alpha-N_{nc}$− مفتوحة ($\alpha-N_{nc}$−مغلقة).

٥) كل مجموعة α -N_{nc}-مفتوحة (α -N_{nc}−مغلقة) هي مجموعة $S-N_{nc}$− مفتوحة ($S-N_{nc}$−مغلقة).

٦) كل مجموعة $\alpha-N_{nc}$−مفتوحة (α -N_{nc}-مغلقة) هي مجموعة $P-N_{nc}$− مفتوحة ($P-N_{nc}$− مغلقة).

مبرهنة $(9.2.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، عندئذ :

١) كل مجموعة N_{nc}− مفتوحة (N_{nc}−مغلقة) هي مجموعة $S-N_{nc}$− مفتوحة (S-N_{nc}-مغلقة).

٢) كل مجموعة N_{nc}− مفتوحة (N_{nc}−مغلقة) هي مجموعة P-N_{nc}- مفتوحة (P-N_{nc}-مغلقة).

البرهان :

١) لنفرض أن A مجموعةN_{nc}− مفتوحة ومنه $A=N_{nc}int(A)$ ، لذلك:
$A\subseteq N_{nc}cl(A)= N_{nc}cl(N_{nc}int(A))$ ، ومنه A مجموعة S-N_{nc}- مفتوحة.

٢) لنفرض أن A مجموعةN_{nc}− مفتوحة ومنه $A=N_{nc}int(A)$ ، بما أن : $A\subseteq N_{nc}cl(A)$ ، فإن :
$A=N_{nc}int(A) \subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(A))$ ومنه A مجموعة $P-N_{nc}$ - مفتوحة.

مبرهنة $(10.2.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

A مجموعة $\alpha-N_{nc}$− مفتوحة ($\alpha-N_{nc}$−مغلقة) إذا وفقط إذا ، كانت A مجموعة S-N_{nc}- مفتوحة(S-N_{nc}-مغلقة) وP-N_{nc}- مفتوحة (P-N_{nc}-مغلقة).

البرهان :

$\Leftarrow$: ينتج مباشرة عن التعريف(1.2.4).

$\Rightarrow$: لنفرض أن A مجموعة P-N_{nc} - مفتوحة و S-N_{nc}- مفتوحة في نفس الوقت ومنه $A\subseteq N_{nc}cl(N_{nc}int(A))$ ومنه :

$$N_{nc}cl(A)\subseteq N_{nc}cl(N_{nc}cl(N_{nc}int(A)))= N_{nc}cl(N_{nc}int(A)).$$

وبالتالي $N_{nc}int(N_{nc}cl(A))\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(N_{nc}int(A)))$ ، لكن $A\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(A))$ ومنه $A\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(A))\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(N_{nc}int(A)))$ وبالتالي $A\subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl(N_{nc}int(A)))$ وبالتالي A مجموعة α-N_{nc}- مفتوحة.

مبرهنة$(11.2.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، ولتكن B مجموعة $S\text{-}N_{nc}$- مفتوحة تحقق :

$B \subseteq A \subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl\ (B))$ ، عندئذ : A مجموعة $-\alpha-N_{nc}$ مفتوحة.

البرهان :

بما أن B مجموعة $S\text{-}N_{nc}$-مفتوحة ، فأن $B \subseteq N_{nc}cl(N_{nc}int\ (B))$ ، ومنه

$$A \subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl\ (B)) \subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl\ (N_{nc}cl\ (N_{nc}int(\ (B)))) \subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl\ (N_{nc}int(\ (B)))) \subseteq N_{nc}int(N_{nc}cl\ (N_{nc}int(\ (A))))$$

وبالتالي A مجموعة $N_{nc}-\alpha-$مفتوحة.

مبرهنة$(12.2.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية هشة في X ، عندئذ :

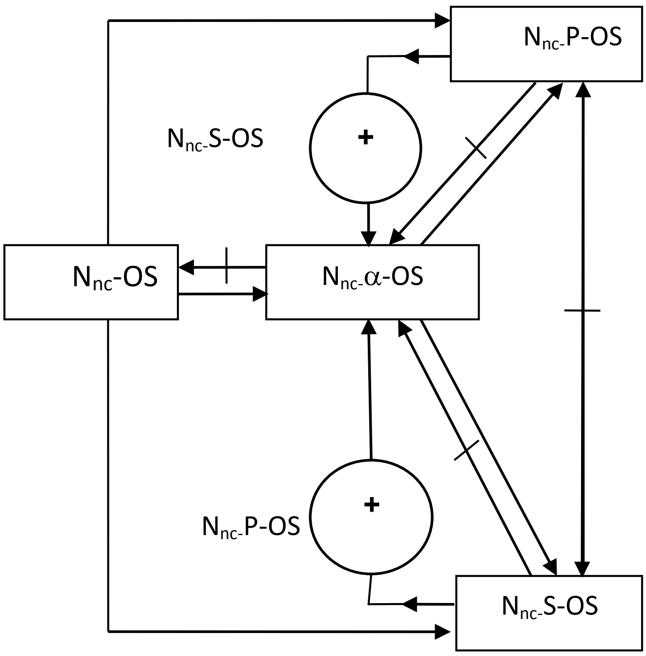
$A \in N_{nc}\alpha OS(X)$ ، إذا وفقط إذا ، وجدت مجموعة مجموعة H نتروسوفيكية هشة في X تحقق $H \subseteq A \subseteq N_{nc}int\ (N_{nc}cl\ (A))$.

مبرهنة $(13.2.4)$: ليكن $(X, N_{nc}\tau)$ فضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة ، عندئذ :

اجتماع اي أسرة من المجموعات $N_{nc}-\alpha-$ مفتوحة هي مجموعة $N_{nc}-\alpha-$ مفتوحة .

البرهان : ينتج مباشرة من تعريف المجموعات $N_{nc}-\alpha-$ مفتوحة .

مخطط توضيحي للعلاقات بين الأنماط المختلفة من المجموعات الجديدة في الفضاء متعدد التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة :



5

الفصل الخامس

الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الثنائية،و أنماط جديدة من المجموعات النتروسوفيكية

مقدمة:

عمم L.A. Zadeh مفهوم الفضاء التبولوجي في عام 1965، حيث أدخل مفهوم الفضاء التبولوجي الضبابي ، بعد أن عرف المجموعات الضبابية في [39]، بعد أن أدخل درجة العضوية لكل عنصر، ثم أدخل في عام K.Atanassov 1983 درجة اللاعضوية لكل عنصر.

عمم F. Smarandache عام 1995 مفهوم المنطق الضبابي (الفازي) إلى المنطق النتروسوفيكي ، هذا المنطق الذي يدرس ويهتم بالحياد(للتوسع انظر أبحاث البروفسور الأمريكي فلورنتن سمارنداكة)، منطق النتروسوفيك يعطي وصفاً أدق من المنطق الضبابي والمنطق العادي ثم ظهرت العديد من الأبحاث في هذا المنطق الجديد في الرياضيات بجميع فروعها لا سيما في التبولوجيا حيث عُممت اغلب المفاهيم التبولوجية إلى المفاهيم التبولوجية النتروسوفيكية ، حيث عرف A.A.Salama ,S.A.alblowi عام 2012 مفهوم المجموعة النتروسوفيكية وعرفوا العمليات عليها، ومن ثم عرفوا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي في [26].

أما نحن فقد عرفنا وأوجدنا في هذا الفصل مفهوم الفضاء التوبولوجي الثنائي النتروسوفيكي، كتعميم وتمديد للفضاء التبولوجي النتروسوفيكي، كما عرفنا العديد من الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثنائية النتروسوفيكية، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الجديدة.

$5-1$ تعاريف ومفاهيم أساسية في النتروسوفيك:

تعريف $(\mathbf{1.1.5})$:[26]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ: المجموعة النتروسوفيكية (التي يرمز لها أختصاراً NS)

$A = \{ < x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \gamma_A(x) >: x \in X \}$ ، حيث $\mu_A(x)$ هي تابع درجة العضوية، $\gamma_A(x)$ هي تابع درجة اللاعضوية، $\sigma_A(x)$ هي تابع درجة الحياد، لكل عنصر $x \in X$.

ملاحظة $(\mathbf{2.1.5})$:[26]

سنرمز أختصاراً للمجموعة النتروسوفيكية (التي يرمز لها أختصاراً NS) بالرمز

$A =< x, \mu_A, \sigma_A, \gamma_A >$ بدلاً من الرمز $A = \{ < x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \gamma_A(x) >: x \in X \}$.

تعريف $(\mathbf{3.1.5})$:[26] لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، عندئذ:

٣) تعرف المجموعة الخالية النتروسوفيكية (التي يرمز لها أختصاراً 0_N) ، بأحد الأشكال :

- $0_N = \{ < x, 0, 0,1 >: x \in X \}$ أو
- $0_N = \{ < x, 0, 1,1 >: x \in X \}$ أو
- $0_N = \{ < x, 0, 1,0 >: x \in X \}$ أو
- $0_N = \{ < x, 0, 0,0 >: x \in X \}$.

٤) تعرف المجموعة النتروسوفيكية 1_N ، بأحد الأشكال :

- $1_N = \{<x, 1, 0,0>: x \in X\}$ أو

- $1_N = \{<x, 1, 0,1>: x \in X\}$ أو

- $1_N = \{<x, 1, 1,0>: x \in X\}$ أو

- $1_N = \{<x, 1, 1,1>: x \in X\}$.

تعريف ($\mathbf{4.1.5}$):[26]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن $A = \{<x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \gamma_A(x)>: x \in X\}$ مجموعة نتروسوفيكية، عندئذ:

متممة المجموعة A يرمز لها بالرمز $\grave{A}$ أو A^c وتعرف بأحد الأشكال :

- $\grave{A} = \{<x, 1-\mu_A(x), 1-\sigma_A(x), 1-\gamma_A(x)>: x \in X\}$.

- $\grave{A} = \{<x, \gamma_A(x), \sigma_A(x), \mu_A(x)>: x \in X\}$.

- $\grave{A} = \{<x, \gamma_A(x), 1-\sigma_A(x), \mu_A(x)>: x \in X\}$.

تعريف ($\mathbf{5.1.5}$):[26]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن A , B مجموعتين نتروسوفيكيتين من الشكل

$$A = \{<x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \gamma_A(x)>: x \in X\}$$

و$B = \{<x, \mu_B(x), \sigma_B(x), \gamma_B(x)>: x \in X\}$، عندئذ، الاحتواء $A \subseteq B$ يعرف بأحد الشكلين :

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \gamma_A(x) \geq \gamma_B(x), \text{and } \sigma_A(x) \leq \sigma_B(x)$.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \gamma_A(x) \geq \gamma_B(x), \text{and } \sigma_A(x) \geq \sigma_B(x)$.

ملاحظة ($\mathbf{6.1.5}$):[26]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية ، عندئذ :

- $0_N \subseteq A$, $0_N \subseteq 0_N$.

- $A \subseteq 1_N$, $1_N \subseteq 1_N$.

تعريف (7.1.5):[26]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، ولتكن A , B مجموعتين نتروسوفيكيتين من الشكل

$A = \{ < x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \gamma_A(x) >: x \in X \}$ و

$B = \{ < x, \mu_B(x), \sigma_B(x), \gamma_B(x) >: x \in X \}$، عندئذ:

c) التقاطع $A \cap B$ يعرف بأحد الشكلين :

- $A \cap B = \{< x, \mu_A(x).\mu_B(x), \sigma_A(x).\sigma_B(x), \gamma_A(x).\gamma_B(x) >: x \in X\}$
- $A \cap B = \{< x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x), \gamma_A(x) \vee \gamma_B(x) : x \in X\}$
- $A \cap B = \{< x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \gamma_A(x) \vee \gamma_B(x): x \in X\}$.

d) الاجتماع $A \cup B$ يعرف بأحد الشكلين :

- $A \cup B = \{< x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \gamma_A(x) \wedge \gamma_B(x) >: x \in X\}$.
- $A \cup B = \{< x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x), \gamma_A(x) \wedge \gamma_B(x) >: x \in X\}$.
- $A \cup B = \{< x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \gamma_A(x) \vee \gamma_B(x) >: x \in X\}$.

تعريف (8.1.5):[26]

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، نسمي تبولوجيا نتروسوفيكية على X (التي يرمز لها أختصاراً NT) كل أسرة مجموعات نتروسوفيكية Γمن X، تحقق:

٤) $0_N , 1_N \in \Gamma$.

٥) $A \cap B \in \Gamma$ لأية مجموعتين A،B من Γ.

٦) $\Gamma\ni \bigcup_i A_i$ لأية مجموعات A_i من Γ.

- ندعو في هذه الحالة (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً على X (أو أختصاراً NTS) ، كل عنصر من Γ يدعى مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة (أو أختصاراً NOS) ، وتدعى متممتها مجموعة نتروسوفيكية مغلقة (أو أختصاراً NCS).

ملاحظة ($\mathbf{9.1.5}$):

إن الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي (NTS) ، هو تعميم للفضاء التبولوجي العادي وتعميم للفضاء التبولوجي الضبابي.

مثال ($\mathbf{10.1.5}$):

لتكن $X=\{x\}$ مجموعة ما، ولتكن

$A=\{<x,0.5,0.5,0.4>: x\in X\}$ و $B=\{<x,0.4,0.6,0.8>: x\in X\}$،

$D=\{<x,0.5,0.6,0.4>: x\in X\}$ و $C=\{<x,0.4,0.5,0.8>: x\in X\}$،

ولتكن $\Gamma=\{0_N\ ,1_N\ ,A,B,C,D\}$ عندئذ يكون (X,Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً.

المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة هي $\Gamma=\{0_N\ ,1_N\ ,A,B,C,D\}$.

المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة هي $\{0_N\ ,1_N\ ,\grave{A},\grave{B},\grave{C},\grave{D}\}$ حيث :

$\grave{A}=\{<x,0.5,0.5,0.6>: x\in X\}$ و $\grave{B}=\{<x,0.6,0.4,0.2>: x\in X\}$،

$\grave{D}=\{<x,0.5,0.4,0.6>: x\in X\}$ و $\grave{C}=\{<x,0.6,0.5,0.2>: x\in X\}$،

تعريف ($\mathbf{11.1.5}$): ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً على X ، عندئذ:

اجتماع اجتماع كل المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة المحتواه في المجموعة النتروسوفيكية A، تدعى الداخلية النتروسوفيكية للمجموعة النتروسوفيكية A، ويرمز لها بالرمز((NInt(A))، أي:

NInt(A)= ∪ {B : B⊆A ; مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة B} .

ملاحظة $(12.1.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً على X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ:

3) $NInt(A) \subseteq A$.

4) $NInt(A)$ مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة.

البرهان:

1 - ينتج البرهان من كون الداخلية النتروسوفيكية للمجموعة النتروسوفيكية A، هي اجتماع اي أسرة من المجموعات المفتوحة المحتواه في A .

2− ينتج البرهان من كون اجتماع أي أسرة من المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة، هو مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة.

مبرهنة $(13.1.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً على X، وليكن كلاً من A, B مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ:

$$A \subseteq B \Longrightarrow \text{Nint}(A) \subseteq \text{Nint}(B).$$

تعريف $(14.1.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً على X ، عندئذ:

تقاطع كل المجموعات النتروسوفيكية المغلقة التي تحوي المجموعة النتروسوفيكية A، تدعى اللصاقة النتروسوفيكية للمجموعة A، ويرمز لها بالرمز ($NCl(A)$)، أي :

$NCl(A)= \cap$ {B : B⊇A ; مجموعة نتروسوفيكية مغلقة B}

نتيجة $(15.1.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً على X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ:

3. $A \subseteq NCl(A)$.

4. $NCl(A)$ مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مغلقة.

تعريف $(16.1.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X ، عندئذ :

٤) A تدعى مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة (NP-OS)، [38] اذا تحقق $A \subseteq Nint(Ncl(A))$ متممتها تدعى مجموعة نتروسوفيكية P-مغلقة (NP-CS).

٥) A تدعى مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة (NS-OS) ، [10] اذا تحقق $A \subseteq Ncl(Nint(A))$ و متممتها تدعى مجموعة نتروسوفيكية شبه مغلقة (NS-CS).

٦) A تدعى مجموعة نتروسوفيكية α–مفتوحة (Nα-OS) ، [5] اذا تحقق $A \subseteq Nint(Ncl(Nint(A)))$ و متممتها تدعى مجموعة نتروسوفيكية شبه مغلقة(Nα-CS) .

ملاحظة $(\mathbf{17.1.5})$:

٧) أسرة المجموعات النتروسوفيكية P-مفتوحة (P-مغلقة) يرمز لها بالرمز NPO (X) (NPC (X)). [38]

٨) أسرة المجموعات النتروسوفيكية شبه المفتوحة (شبه المغلقة) يرمز لها بالرمز NSO (X) (NSC (X)).[10]

٩) أسرة المجموعات النتروسوفيكية α–مفتوحة (α–مغلقة) يرمز لها بالرمز NαO(X) (NαC(X)).[5]

تعريف $(\mathbf{18.1.5})$: ليكن(X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X ، عندئذ :

٦) نعرف الداخلية النتروسوفيكية من نمط P للمجموعة A [38] والتي نرمز لها بالرمز $NPint(A)$ ، بالشكل :

$$NPint(A) = \cup \{G : G \subseteq A \text{ and } G \text{ is a NP-OS in } X \}.$$

٧) نعرف الداخلية النتروسوفيكية من نمط S للمجموعة A [10] والتي نرمز لها بالرمز $NSint(A)$ ، بالشكل :

$$NSint(A) = \cup \{G : G \subseteq A \text{ and } G \text{ is a NS-OS in } X \}.$$

٨) نعرف الداخلية النتروسوفيكية من نمط α للمجموعة A [5] والتي نرمز لها بالرمز $N\alpha int(A)$ ، بالشكل :

$$N\alpha int(A) = \cup \{G : G \subseteq A \text{ and } G \text{ is a } N\alpha\text{-OS in } X \}.$$

تعريف $(\mathbf{19.1.5})$: [3] ليكن (X, Γ) فضاءً تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X، عندئذ :

١) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية من نمط P للمجموعة A [38] والتي نرمز لها بالرمز NPcl(A) ، بالشكل :

$$NPcl(A) = \cap \{G : G \supseteq A \text{ and } G \text{ is a NP-CS in } X\}.$$

٢) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية من نمط S للمجموعة A [10] والتي نرمز لها بالرمز $NScl(A)$ ، بالشكل :

$$NScl(A) = \cap \{G : G \supseteq A \text{ and } G \text{ is a NS-CS in } X\}.$$

٣) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية من نمط α للمجموعة A [5] والتي نرمز لها بالرمز $N\alpha cl(A)$ ، بالشكل :

$$N\alpha cl(A) = \cap \{G : G \supseteq A \text{ and } G \text{ is a } N\alpha\text{-CS in } X\}.$$

مبرهنة$(\mathbf{20.1.5})$:[38] ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، عندئذ :

٧) كل مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة (مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية $\alpha-$مفتوحة($\alpha-$مغلقة).
٨) كل مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة (α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة (شبه مغلقة).
٩) كل مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة (α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة (P-مغلقة).

مبرهنة$(\mathbf{21.1.5})$:[38] ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية $\alpha-$ مفتوحة ($\alpha-$مغلقة) ،إذا وفقط إذا كانت، A مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة (شبه مغلقة) و A مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة (P-مغلقة).

مبرهنة$(\mathbf{22.1.5})$:

ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X، عندئذ :

٣) $SNint(Ncl(A)) = Ncl(Nint(Ncl(A)))$.

٤) إذا كانت A مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة، فإن $SNcl(A) = Nint(Ncl(A))$.

البرهان : ينتج مباشرة من التعريف (16.1.5) والمبرهنة (20.1.5).

5 – 2 الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الثنائي:

عمم J. C. Kelly عام 1963 مفهوم الفضاء التبولوجي، إلى الفضاء التبولوجي الثنائي، أما نحن فقد أدخلنا وأوجدنا مفهوم الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الثنائي(X, Γ_1, Γ_2)، كتعميم للفضاء التبولوجي

النتروسوفيكي، كما عرفنا أنماطاً جديدة من المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المفتوحة والمغلقة في هذه الفضاءات، وأوجدنا الخصائص الأساسية لهذه المجموعات النتروسوفيكية الجديدة المفتوحة والمغلقة، كما درسنا العلاقات الأساسية بين هذه المجموعات النتروسوفيكية الجديدة.

تعريف $(\mathbf{1.2.5})$: لتكن X مجموعة ما غير خالية، وليكن كلاً من Γ_1, Γ_2 تبولوجيا نتروسوفيكية على X، عندئذ:

ندعو (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي ثنائي على X (أو أختصاراً Bi-NTS).

مثال $(\mathbf{2.2.5})$:

X={x},Γ_1={0_n,1_n,V},Γ_2={0_n,1_n,A,B,C,D},A=<x,0.5,0.5,0.4>,B=<x,0.4,0.6,0.8> , C=<x,0.4,0.5,0.8> , D=<x,0.5,0.6,0.4> , V=<x,0.5,0.7,0.6>.

إن كلاً من (X, Γ_1) , (X, Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي، وبالتالي فإن (X, Γ_1, Γ_2) هو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي ثنائي.

تعريف $(\mathbf{3.2.5})$: ليكن(X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً، عندئذ:

- تدعى المجموعة الجزئية A من $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة (أو أختصاراً Bi-NOS).
- تدعى مكملتها(متممتها)À مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مغلقة (أو أختصاراً Bi-NCS).
- أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المفتوحة في X نرمز لها بالرمز Bi-NOS(X) .
- أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المغلقة في X نرمز لها بالرمز Bi-NCS(X) .

مثال $(\mathbf{4.2.5})$: في المثال (2.2.5) أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المفتوحة هي :

Bi-NOS(X) = $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$={0_n , 1_n ,A ,B ,C ,D,V}

أسرة المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المغلقة هي :

Bi-NCS(X) = {0_n,1_n,A^c,B^c,C^c,D^c,V^c} ;

A^c=<x,0.4,0.5,0.5>,B^c=<x,0.8,0.6,0.4>,C^c=<x,0.8,0.5,0.4>, D^c=<x,0.4,0.6,0.5> , V^c=<x,0.6,0.7,0.5>.

ملاحظة $(\mathbf{5.2.5})$: إذا كان(X, Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي، فإن (X, Γ, Γ) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي ثنائي .

ملاحظة $(\mathbf{6.2.5})$: ليكن(X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً (Bi-NTS) ، عندئذ:

اجتماع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين مفتوحتين(مغلقتين) ، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة(مغلقة) .

كما يبين المثال الآتي :

مثال $(7.2.5)$: لتكن $X=\{x\}$ ولتكن

$\Gamma_1=\{0_n,1_n,V\},\Gamma_2=\{0_n,1_n ,A ,B ,C ,D\},A=\langle x,0.5,0.5,0.4\rangle$, $B=\langle x,0.4,0.6,0.8\rangle$, $C=\langle x,0.4,0.5,0.8\rangle$, $D=\langle x,0.5,0.6,0.4\rangle$, $V=\langle x,0.3,0.4,0.3\rangle$.

بسهولة نجد أن كلاً من $(X,\Gamma_1),(X,\Gamma_2)$ هو فضاء تبولوجي نتروسوفيكي، ومنه

(X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجي نتروسوفيكي ثنائي .

إن A,V مجموعتان ثنائيتان نتروسوفيكيتان مفتوحتان لكن اجتماعهما

$A\cup V=\langle x,0.5,0.5,0.3\rangle$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة .

إن $A^c=\langle x,0.5,0.5,0.6\rangle,V^c=\langle x,0.7,0.4,0.7\rangle$ مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين مغلقتين، لكن اجتماعهما $A^c\cup V^c=\langle x,0.7,0.5,0.6\rangle$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مغلقة.

ملاحظة $(8.2.5)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً على X ، عندئذ:

تقاطع مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين مفتوحتين(مغلقتين) ، ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة(مغلقة).

كما يبين المثال الآتي :

مثال $(9.2.5)$: في المثال(7.2.5)

A,V مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين مفتوحتين لكن تقاطعهما

$A\cap V=\langle x,0.3,0.4,0.4\rangle$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة.

$A^c=\langle x,0.5,0.5,0.6\rangle,V^c=\langle x,0.7,0.4,0.7\rangle$ مجموعتين ثنائيتين نتروسوفيكيتين مغلقتين، لكن تقاطعهما $A^c\cap V^c=\langle x,0.5,0.4,0.7\rangle$ ليس مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مغلقة.

نتيجة$(10.2.5)$: ليكن (X,Γ_1,Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً على X، عندئذ:

لا تشكل أسره المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المفتوحة، تبولوجيا نتروسوفيكية على X.

البرهان : ينتج عن المثال (9.2.5).

5 – 3 الداخلية و اللصاقة للمجموعات النتروسوفيكية :

في هذا القسم نستخدم النمط الجديد من المجموعات الثنائية النتروسوفيكية في تعريف الداخلية واللصاقة لمجموعة نتروسوفيكية، كما سندرس خصائصهما.

تعريف $(1.3.5)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً على X ، عندئذ:
اجتماع أسرة كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المفتوحة المحتواه في المجموعة النتروسوفيكية A، تدعى الداخلية الثنائية النتروسوفيكية للمجموعة النتروسوفيكية A، ويرمز لها بالرمز ($N^{Bi}Int(A)$)،أي :

$N^{Bi}Int(A) = \cup \{B : B \subseteq A$; مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة $B\}$.

– ينتج عن التعريف الخواص الآتية :

ملاحظة $(2.3.5)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياًعلى X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ ينتج عن التعريف السابق :

1) $N^{Bi}Int(A) \subseteq A$.
2) $N^{Bi}Int(A)$ ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مفتوحة.

ملاحظة $(3.3.5)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياًعلى X، وليكن كلاً من A, B مجموعة نتروسوفيكية من X ،عندئذ:

$$A \subset B \Longrightarrow N^{Bi}int(A) \subset N^{Bi}int(B).$$

تعريف $(4.3.5)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً على X ، عندئذ:
تقاطع أسرة كل المجموعات الثنائية النتروسوفيكية المغلقة التي تحوي المجموعة النتروسوفيكية A، تدعى اللصاقة الثنائية النتروسوفيكية للمجموعة A، ويرمز لها بالرمز ($N^{Bi}Cl(A)$)، أي :

$N^{Bi}cl(A) = \cap \{B : B \supseteq A$; مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مغلقة $B\}$

ملاحظة $(5.3.5)$: ليكن (X, Γ_1, Γ_2) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ثنائياً على X، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ:

1. $A \subseteq N^{Bi}Cl(A)$.
2. $N^{Bi}Cl(A)$ ليس بالضرورة مجموعة ثنائية نتروسوفيكية مغلقة.

5 – 4 المجموعات النتروسوفيكية الشبه α –المفتوحة في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي

درسنا في هذا القسم من أطروحتنا المجموعات النتروسوفيكية الشبه α –المفتوحة في الفضاء النتروسوفيكي، ومن ثم درسنا خصائصها الأساسية، ومن ثم استخدمنا هذا النوع الجديد من المجموعات النتروسوفيكية في تعريف الداخلية واللصاقة النتروسوفيكية من النمط شبه α ، كما درسنا خصائصها الأساسية.

تعريف $(1.4.5)$: ليكن(X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية شبه α– مفتوحة، إذا وجدت مجموعة H نتروسوفيكية α–مفتوحة في X ، تحقق.$H \subseteq A \subseteq Ncl(H)$. أو بشكل مكافئ :

A مجموعة نتروسوفيكية شبه α– مفتوحة، إذا، تحقق.$A \subseteq Ncl(N\alpha int(A))$.

- أسرة المجموعات النتروسوفيكية الشبه α–مفتوحة يرمز لها بالرمز$NS\alpha O\ (X)$.

تعريف $(2.4.5)$: ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X ، عندئذ :

A مجموعة نتروسوفيكية شبه α–مغلقة (NSα-CS) ، إذا وفقط إذا ،كانت متممها À مجموعة نتروسوفيكية شبه α–مفتوحة (NSα-OS) .

- أسرة المجموعات النتروسوفيكية الشبه α–مغلقة يرمز لها بالرمز$NS\alpha C\ (X)$.

مبرهنة$(3.4.5)$: ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، عندئذ :

٣) كل مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة (مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية شبه α–مفتوحة (شبه α–مغلقة).

٤) كل مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة (α-مغلقة) هي مجموعة نتروسوفيكية شبه α–مفتوحة (شبه α–مغلقة).

ملاحظة$(4.4.5)$: إن عكس المبرهنة (3.4.5)، غير صحيح بشكل عام، كما يبين المثال الآتي :

مثال$(5.4.5)$: ليكن $X = \{x\}, A = \{\langle x, 0.5,0.5,0.4\rangle, x \in X\},$

$$B = \{\langle x, 0.4,0.5,0.8\rangle, x \in X\}, C = \{\langle x, 0.5,0.6,0.4\rangle, x \in X\},$$
$$D = \{\langle x, 0.4,0.6,0.8\rangle, x \in X\}$$

$\Gamma = \{0_N, A, B, C, D, 1_N\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية على X .

لتكن$\mathrm{H}=\{\langle x,0.5,0.1,0.3\rangle,x\in X\}$.

$\{\langle x,0.6,0.4,0.2\rangle,x\in X\}=NCcl(\mathrm{A})\subseteq\mathrm{H}\subseteq\mathrm{A}$ ومنه H مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة، لكن H ليست مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة، ومنه

$\grave{H}=\{\langle x,0.5,0.9,0.7\rangle,x\in X\}$ مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة، لكن $\grave{H}$ ليست مجموعة نتروسوفيكية مغلقة.

لتكن $\mathrm{K}=\{\langle x,0.5,0.1,0.2\rangle,x\in X\}$، إن

$\{\langle x,0.6,0.4,0.2\rangle,x\in X\}=NCcl(\mathrm{A})\subseteq\mathrm{K}\subseteq\mathrm{A}$، ومنه K مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

$$\mathrm{K}\nsubseteq\mathrm{NCint}\Big(\mathrm{NCcl}\big(\mathrm{NCint}(\mathrm{K})\big)\Big)=\mathrm{NCint}\big(\mathrm{NCcl}(\langle x,0.5,0.5,0.4\rangle)\big)=$$

$\mathrm{NCint}(\langle x,0.6,0.4,0.2\rangle)=\langle x,0.5,0.5,0.4\rangle$، ومنه K ليست مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة، وبالتالي $\grave{K}=\{\langle x,0.5,0.9,0.8\rangle,x\in X\}$ مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة، لكنها ليست مجموعة نتروسوفيكية α-مغلقة.

ملاحظة(5 .4 .6) : ليكن(X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، عندئذ :

إن المجموعات النتروسوفيكية الشبه α-مفتوحة ، تختلف عن المجموعات النتروسوفيكية P-مفتوحة ، كما يبين المثالان الآتيان :

مثال(5 .4 .7) : في المثال(**5 .4 .5**) $\mathrm{M}=\{\langle x,0.5,0.1,0.3\rangle,x\in X\}$ مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة، لكن M ليست مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة، لأن

$\mathrm{M}\nsubseteq\mathrm{NCint}\big(\mathrm{NCcl}(\mathrm{M})\big)=\mathrm{NCint}(\langle x,0.6,0.4,0.2\rangle)=\langle x,0.5,0.5,0.4\rangle$.

مثال(5 .4 .8) : ليكن $X=\{a,b\},\mathrm{A}=\{\langle a,0.4,0.8,0.9\rangle,\langle b,0.7,0.5,0.3\rangle\}$,

$$\mathrm{B}=\{\langle a,0.5,0.8,0.6\rangle,\langle b,0.8,0.4,0.3\rangle\},\mathrm{C}=\{\langle a,0.4,0.7,0.9\rangle,\langle b,0.6,0.4,0.4\rangle\}$$
$$\mathrm{A}=\{\langle a,0.5,0.7,0.5\rangle,\langle b,0.8,0.4,0.6\rangle\}$$

$\Gamma=\{0_N,A,B,C,D,1_N\}$ تبولوجيا نتروسوفيكية على X .

لتكن$H=\{\langle a,1,1,0.3\rangle,\langle b,0.7,0.3,0.6\rangle\}$، إن H مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة ، لكنH ليست مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

مبرهنة(5 .4 .9) : ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، عندئذ :

٣) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية مغلقة في X و كل مجموعة نتروسوفيكية ليست كثيفة في كل مكان في X هي مجموعة نتروسوفيكية مغلقة في X ، فإن كل مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة في X.

٤) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية مغلقة في X، فإن كل مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة في X.

البرهان : يتم بشكل مشابه لحالة التبولوجيا العامة.

مبرهنة($\mathbf{10.4.5}$) : ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، عندئذ :

٤) كل مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة و نتروسوفيكية P–مفتوحة هي مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

٥) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية مغلقة فيه، فإن كل مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة هي مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة.

٦) إذا كانت كل مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة في X هي مجموعة نتروسوفيكية مغلقة فيه،فإن كل مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة هي مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة.

البرهان :

٤) لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة و نتروسوفيكية P-مفتوحة ومنه حسب مبرهنة (21.1.5)، فإن A هي مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة ومنه حسب المبرهنة ($\mathbf{3.4.5}$) فإن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

٥) لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة ومنه حسب (2) من الملاحظة (9.4.5)، فإن A هي مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة ومنه حسب (3) من المبرهنة (20.1.5)فإن A مجموعة نتروسوفيكية P-مفتوحة.

٦) لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة ومنه حسب (2) من الملاحظة (9.4.5)، فإن A هي مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة ومنه حسب (2) من المبرهنة (20.1.5) فإن A مجموعة نتروسوفيكية شبه مفتوحة (شبه مغلقة).

مبرهنة($\mathbf{11.4.5}$) : ليكن(X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X ، عندئذ:

Aمجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة، إذا وفقط إذا، كانت توجدمجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(H))$.

البرهان :

لتكن A مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة ومنه$A \subseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(H)))$ ، لنضع $H = Nint(A)$ ، نعلم أن $Nint(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(H)))$ ، ومنه توجدمجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(H))$.

$\Rightarrow$: لنفرض أنه توجدمجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(H))$.

لبرهان أن A مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة، نعلم أن $H \subseteq Nint(A)$ ، (لأن $Nint(A)$ هي أكبر مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة محتواه في A)، بما أن $Ncl(H) \subseteq Ncl(Nint(A))$ ،

ومنه $Nint(Ncl(H)) \subseteq Nint(Ncl(Nint(A)))$ ، لكن فرضاً $H \subseteq A \subseteq Nint(Ncl(H)))$
ومنه $A \subseteq Nint(Ncl(Nint(A)))$ ومنه A مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة.

مبرهنة(12.4.5) : ليكن(X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X ، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

٧) A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

٨) يوجد مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H ، تحقق $H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$.

٩) $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$.

البرهان :

1)$\Leftarrow$2) : لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة D تحقق $D \subseteq A \subseteq Ncl(D)$ ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H تحقق $H \subseteq D \subseteq Nint(Ncl(H))$حسب مبرهنة (11.4.5)،لذلك

$$Ncl(H) \subseteq Ncl(D) \subseteq Ncl(Nint(Ncl(D)))$$

ومنه $Ncl(D) \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$

وبالتالي$H \subseteq D \subseteq A \subseteq Ncl(D) \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$

ومنه $H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$.

2)$\Leftarrow$3) : لنفرض أنه توجد مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة H، تحقق

$H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$ ، ولنبرهن أن $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$.

نعلم أن $Nint(A) \subseteq A$ ، كما أن $H \subseteq Nint(A)$ (لأن $Nint(A)$ هي أكبر مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة محتواه في A)، ومنه $Ncl(H) \subseteq Ncl(Nint(A))$ ،

ومن ثم $Nint(Ncl(H)) \subseteq Nint(Ncl(Nint(A)))$

لذلك$Ncl(Nint(Ncl(H))) \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$ ،

لكن $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$ (فرضاً) ، ومنه

$$A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H))) \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$$

ومنه$A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$.

3)$\Leftarrow$1) :لتكن $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$ ، ولنبرهن أن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

لنضع $D = Nint(A)$ ، نعلم أن $Nint(A) \subseteq A$ ، لبرهان أن $A \subseteq Ncl(Nint(A))$

بما أن $Nint(Ncl(Nint(A))) \subseteq Ncl(Nint(A))$ ، فإن

$$Ncl(Nint(Ncl(Nint(A)))) \subseteq Ncl(Ncl(Nint(A)))) = Ncl(Nint(A)) .$$

لكن $A \subseteq NCcl(NCint(NCcl(NCint(A))))$ (فرضاً) .

لذلك $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A)))) \subseteq Ncl(Nint(A))$

ومنه $A \subseteq \mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(A))$ ، ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة D تحقق $D \subseteq A \subseteq \mathrm{Ncl}(D)$ ، من جهة اخرى D مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة (لانها مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة) ومنه A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة .

نتيجة$(\mathbf{13.4.5})$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

٧) A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة.

٨) يوجد مجموعة نتروسوفيكية مغلقة F، تحقق $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(F))) \subseteq A \subseteq F$.

٩) $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A)))) \subseteq A$.

البرهان :

$1)\Rightarrow 2)$: لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة ومنه $\grave{A}$ مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة، ومنه توجد مجموعة نتروسوفيكية α-مفتوحة D تحقق $D \subseteq \grave{A} \subseteq \mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(D)))$ حسب مبرهنة (12.4.5) ،لذلك $(Ncl(Nint(Ncl(D))))\grave{} \subseteq (\grave{A})\grave{} \subseteq \grave{D}$ ومنه $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\grave{D}))) \subseteq A \subseteq \grave{D}$ ، لنفرض أن $\grave{D} = F$ ومنه $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(F))) \subseteq A \subseteq F$ حيث F مجموعة نتروسوفيكية مغلقة في X.

$2)\Rightarrow 3)$: لنفرض أنه توجد مجموعة نتروسوفيكية مغلقة F ، تحقق

$\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{NCint}(F))) \subseteq A \subseteq F$، ولنبرهن أن $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A)))) \subseteq A$.

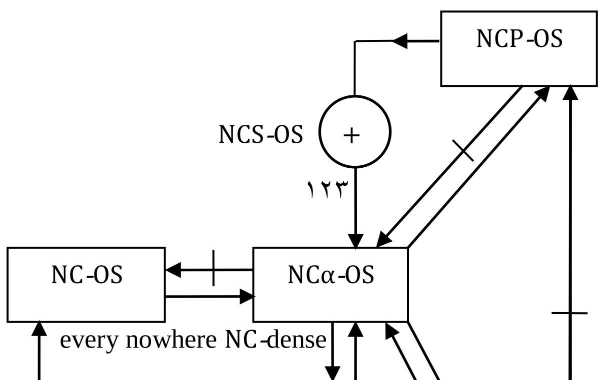
لكن بما أن $\mathrm{Ncl}(A)$ هي أصغر مجموعة نتروسوفيكية مغلقة تحوي A ، فإن $\mathrm{Ncl}(A) \subseteq F$ ، ومنه $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A)) \subseteq \mathrm{Nint}(F)$ ومنه $\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(F)) \supseteq \mathrm{Ncl}\left(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A))\right)$ ومنه $A \supseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(F))) \supseteq \mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A))))$ ومنه $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A)))) \subseteq A$.

$3)\Rightarrow 1)$: لتكن $\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A)))) \subseteq A$ ، ولبرهان أن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة، يكفي برهان أن $\grave{A}$ مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

إن $\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\grave{A})))) = (\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(A)))))\grave{} \supseteq \grave{A}$ ومنه $\grave{A} \subseteq \mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\mathrm{Ncl}(\mathrm{Nint}(\grave{A}))))$ ، ولذلك $\grave{A}$ مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة ، ومنه A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة .

ملاحظة $(\mathbf{14.4.5})$:

المخطط التالي يبين العلاقات بين أنواع المجموعات الجديدة النتروسوفيكية المغلقة التي درسناها في هذا الفصل الخامس



$5-5$ الداخلية واللصاقة النتروسوفيكية من نمط شبه α :

تعريف $(1.5.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X ، عندئذ :

٣) نعرف اللصاقة النتروسوفيكية من نمط شبه α للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $S\alpha Ncl(A)$ ، بالشكل :

$$S\alpha Ncl(A) = \cap \{B : B \supseteq A \text{ and } B \text{ is a } NS\alpha\text{-}CS \}.$$

٤) نعرف الداخلية النتروسوفيكية من نمط شبه α للمجموعة A والتي نرمز لها بالرمز $S\alpha Nint(A)$ ، بالشكل :

$$S\alpha Nint(A)= \cup\{B: B \subseteq A, B \text{ is a } NS\alpha\text{-}OS\}.$$

مبرهنة $(2.5.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X، عندئذ :

٥) $S\alpha Ncl(A) = A \Leftrightarrow A$ is a $NS\alpha$-CS.

٦) $S\alpha Nint(A) = A \Leftrightarrow A$ is a $NS\alpha$-OS .

٧) $S\alpha Ncl(A)$ أصغر مجموعة نتروسوفيكية شبه $\alpha-$ مغلقة تحوي A.

٨) $S\alpha Nint(A)$ أكبر مجموعة نتروسوفيكية شبه $\alpha-$ مفتوحة محتواه A.

البرهان : ينتج مباشرة من تعريف $S\alpha Ncl(A)$ و $S\alpha Nint(A)$.

مبرهنة $(3.5.5)$: ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية في X، عندئذ:

٣) $S\alpha Nint(1_N - A) = 1_N - (S\alpha Ncl(A))$.

٤) $S\alpha Ncl(1_N - A) = 1_N - (S\alpha Nint(A))$.

البرهان :

٣) حسب التعريف ، $S\alpha Ncl(A) = \cap \{B : B \supseteq A \text{ and } B \text{ is a } NS\alpha\text{-}CS\}$

$$1_N - (S\alpha Ncl(A)) = 1_N - \cap \{B : B \supseteq A \text{ and B is a } NCS\alpha - CS\}$$
$$= \cup\{1_N - B : 1_N - B \subseteq 1_N - A, 1_N - B \text{ is a } NS\alpha\text{-}OS\}$$
$$= \cup\{H : H \subseteq 1_N - A, H \text{ is a } NS\alpha\text{-}OS\}$$
$$= S\alpha Nint(1_N - A).$$

٤) البرهان يتم بشكل مشابه لبرهان ١) .

مبرهنة $(4.5.5)$: ليكن (X, Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A و B مجموعتين نتروسوفيكيتين في X، عندئذ:

٧) $S\alpha NCcl(1_N) = 1_N$، $S\alpha NCcl(0_N) = 0_N$.

٨) $A \subseteq S\alpha Ncl(A)$.

٩) $A \subseteq B \Rightarrow S\alpha Ncl(A) \subseteq S\alpha Ncl(B)$.

١٠) $S\alpha Ncl(A \cap B) \subseteq S\alpha Ncl(A) \cap S\alpha Ncl(B)$.

١١) $S\alpha Ncl(A) \cup S\alpha Ncl(B) \subseteq S\alpha Ncl(A \cup B)$.

١٢) $S\alpha Ncl(S\alpha Ncl(A)) = S\alpha Ncl(A)$.

البرهان :

٧) ينتج مباشرة عن تعريف $S\alpha Ncl(A)$.

٨) ينتج مباشرة عن تعريف $S\alpha Ncl(A)$ وعن كون $A \subseteq B$.

٩) حسب (2) نجد $B \subseteq S\alpha Ncl(B)$، وبما أن $A \subseteq B$ نجد أن $A \subseteq S\alpha Ncl(B)$، لكن $S\alpha Ncl(\mathcal{B})$ مجموعة نتروسوفيكية شبه $\alpha-$ مغلقة، ومنه $A \subseteq S\alpha Ncl(B)$ (لإن $S\alpha Ncl(A)$ أصغر مجموعة نتروسوفيكية شبه $\alpha-$ مغلقة تحوي A) ، ومنه $S\alpha Ncl(A) \subseteq S\alpha Ncl(B)$.

١٠) نعلم أن $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$ فإنه ينتج عن (3) أن :
$S\alpha Ncl(A \cap B) \subseteq S\alpha Ncl(A)$ و $S\alpha Ncl(A \cap B) \subseteq S\alpha Ncl(B)$ ومنه
$S\alpha Ncl(A \cap B) \subseteq S\alpha Ncl(A) \cap S\alpha Ncl(B)$

١١) نعلم أن $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ فإنه ينتج عن (3) أن :
$S\alpha Ncl(A) \subseteq S\alpha Ncl(A \cup B)$ و $S\alpha Ncl(B) \subseteq S\alpha Ncl(A \cup B)$ ومنه
$S\alpha Ncl(A) \cup S\alpha Ncl(B) \subseteq S\alpha Ncl(A \cup B)$.

١٢) بما أن $S\alpha Ncl(\mathcal{B})$ مجموعة نتروسوفيكية شبه $\alpha-$ مغلقة، فإن
$S\alpha Ncl(S\alpha Ncl(A)) = S\alpha Ncl(A)$ حسب المبرهنة (2.5.5).

مبرهنة ($5.5.5$): ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A و B مجموعتين نتروسوفيكيتين في X ، عندئذ :

٧) $S\alpha Nint(0_N) = 0_N$، $S\alpha Nint(1_N) = 1_N)$.

٨) $S\alpha Nint(A) \subseteq A$.

٩) $A \subseteq B \Rightarrow S\alpha Nint(A) \subseteq S\alpha Nint(B)$.

١٠) $S\alpha Nint(A \cap B) \subseteq S\alpha Nint(A) \cap S\alpha Nint(B)$.

١١) $S\alpha Nint(A) \cup S\alpha Nint(B) \subseteq S\alpha Nint(A \cup B)$.

١٢) $S\alpha Nint(S\alpha Nint(A)) = S\alpha Nint(A)$.

مبرهنة($6.5.5$) : ليكن(X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

٥) A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

٦) $H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة مثلH.

٧) $H \subseteq A \subseteq SNint(Ncl(H)))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة مثلH.

٨) $A \subseteq SNint(Ncl(Nint(A)))$.

البرهان :

1)$\Leftarrow$2) : لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة ومنه $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$، ونعلم أن $Nint(A) \subseteq A$ ومنه $H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$ حيث $H = Nint(A)$ مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة.

2)$\Leftarrow$3) : لنفرض أنه $H \subseteq A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(H)))$ حيث H مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة، لكن $SNint(Ncl(H)) = Ncl(Nint(Ncl(H)))$ (حسب مبرهنة (22.1.5))،لذلك$H \subseteq A \subseteq SNint(Ncl(H))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة مثلH .

3)$\Leftarrow$4) : لتكن$H \subseteq A \subseteq SNint(Ncl(H)))$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة مثلH.

بما أن H مجموعة نتروسوفيكية مفتوحة تحوي A فإن: $H \subseteq Nint(A)$ومنه $Ncl(H) \subseteq Ncl(Nint(A))$ ومنه $SNint(Ncl(H)) \subseteq SNint(Ncl(Nint(A)))$، لكن فرضاً$A \subseteq SNint(Ncl(H))$ومنه$A \subseteq SNint(Ncl(Nint(A)))$.

4)$\Leftarrow$1) : لتكن$A \subseteq SNint(Ncl(Nint(A)))$.

إن $SNint(Ncl(Nint(A))) = Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$ (حسب مبرهنة (22.1.5)) ومنه $A \subseteq Ncl(Nint(Ncl(Nint(A))))$ وبالتالي A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مفتوحة.

مبرهنة($7.5.5$) : ليكن (X,Γ) فضاء تبولوجياً نتروسوفيكياً ، ولتكن A مجموعة نتروسوفيكية من X، عندئذ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة :

٥) A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة.

٦) $Nint(Ncl(Nint(F))) \subseteq A \subseteq F$، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المغلقة مثلF.

٧) $SNcl(Nint(F))) \subseteq A \subseteq F$، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المغلقة مثلF.

٨) $SNcl(Nint(Ncl(A)))) \subseteq A$.

البرهان :

$1)\Leftarrow 2)$: لتكن A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة ومنه

$Nint(Ncl(Nint(Ncl(A)))) \subseteq A$ وبما أن$A \subseteq Ncl(A)$ فأن

$Nint(Ncl(Nint(Ncl(A)))) \subseteq A \subseteq Ncl(A)$ ومنه

$Nint(Ncl(Nint(F))) \subseteq A \subseteq F$ حيث$F \subseteq Ncl(A)$.

$2)\Leftarrow 3)$: لنفرض أن$Nint(Ncl(Nint(F))) \subseteq A \subseteq F$ لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المغلقة مثلF .

لكن $SNcl(Nint(F)) = Nint(Ncl(Nint(F)))$ (حسب مبرهنة (22.1.5))

ومنه $SNcl(Nint(F))) \subseteq A \subseteq F$، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المغلقة مثلF.

$3)\Leftarrow 4)$: لتكن$SNcl(Nint(F))) \subseteq A \subseteq F$ ، لأجل بعض المجموعات النتروسوفيكية المغلقة مثلF.

بما أن $A \subseteq F$ فأن $Ncl(A) \subseteq F$ ومنه $Nint(Ncl(A) \subseteq Nint(F)$ ومنه

$SNcl(Nint(Ncl(A))) \subseteq SNcl(Nint(F)) \subseteq A$ ومنه

$SNcl(Nint(Ncl(A)))) \subseteq A$.

$4)\Leftarrow 1)$: لتكن $SNcl(Nint(Ncl(A)))) \subseteq A$.

بما أن $Nint(Ncl(Nint(Ncl(A)))) = SNcl(Nint(Ncl(A)))$ (حسب مبرهنة (22.1.5))، ومنه $Nint(Ncl(Nint(Ncl(A)))) \subseteq A$ ومنه

A مجموعة نتروسوفيكية شبه α-مغلقة.

ملخّص الأطروحة

يُناقش موضوع الأطروحة: **دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجيا**، وهو عمل أعدّ لنيل درجة الدّكتوراه في الرّياضيّات البحتة.

تقع دراستنا هذه في خمسة فصول تتضمّن دراسة الفضاءات التبولوجية الثنائية والثلاثية ومجموعاتها المفتوحة والمغلقة وتعميماتها، ومن ثم توسيع الدراسة الى الفضاءات متعددة التبولوجيا ودراسة وإيجاد أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها، ودرسنا خصائصها الأساسية، ودرسنا العلاقات بين هذه الأنماط الجديدة من المجموعات.

كما تضمّنت دراستنا التعريف بمنطق عالمي جديد هو منطق النتروسوفيك، حيث تعد أطروحتنا الدراسة الأولى من نوعها في سوريا التي تدرس المفاهيم التبولوجية وفقاً لمنطق النتروسوفيك، حيث درسنا وعرفنا الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الثنائي، والفضاء التبولوجي النتروسوفيكي الهش الثنائي والثلاثي، كما عرفنا الفضاءات متعددة التبولوجيا النتروسوفيكية الهشة بطريقتين مختلفتين جديدتين ومبتكرتين، كما أوجدنا أنماط جديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المفتوحة والمغلقة فيها، ودرسنا العلاقات بين هذه الأنماط الجديدة من المجموعات النتروسوفيكية الهشة.

قمنا ايضا بدراسة وتعريف مسلمات فصل نتروسوفيكية هشة جديدة (لأول مرة تتم دراستها على مستوى العالم في أطروحتنا هذه)، بالاعتماد على الأنماط الجديده من النقاط النتروسوفيكية الهشة، التي

تم تعريفها في دراستناهذه أيضاً.

قمنا أيضا بدراسة صف جديد وهام من المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة، حيث عرفنا المجموعات النتروسوفيكية الهشة الشبه α –المغلقة في الفضاء النتروسوفيكي الهش، ومن ثم درسنا خصائصها الأساسية، ومن ثم درسنا علاقتها مع المجموعات النتروسوفيكية الهشة المغلقة.

أيضا درسنا صف جديد وهام من المجموعات النتروسوفيكية المفتوحة، حيث عرفنا المجموعات النتروسوفيكية الشبه α –المفتوحة في الفضاء التبولوجي النتروسوفيكي، ومن ثم درسنا خصائصها الأساسية، ومن ثم درسنا علاقتها مع المجموعات النتروسوفيكية المغلقة.

كما أدخلنا تعريف داخلية ولصاقة مجموعة وفقاً لكل نوع من هذه الانواع الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة، كما اوجدنا خصائصهما الأساسية.

Thesis Summary

The Subject of the thesis deals with: **A Study of Multi - Topological Spaces**, A work prepared for obtaining the degree of doctorate in pure mathematics.

Our study is based on five chapters include the study of Bi-Topological and Tri-Topological spaces, and its open and closed sets and its generalized. Then we study Multi - Topological Spaces and its open and closed sets, we introduced new types of open and closed sets in Multi - Topological Spaces, and we studied the basic properties of these new types of sets, as the we have created the relationship between this new types of open and closed sets in Multi - Topological Spaces.

Our study includid the defintion of a new world logic, which called neutrosophic logic, where our study is the first study of its kind in Syria, which

studies the topological concept according to the neutrosophic logic.where we define and introduce the neutrosophic Bi-topological spaces, the neutrosophic crisp Bi-topological spaces, the neutrosophic crisp Tri-topological spaces, and the neutrosophic crisp Multi - Topological Spaces and we introduce new types of open and closed sets in this spaces. as the we have created the relationship between this new types of neutrosophic crisp open and closed sets in this Spaces.

We also define and introduce the neutrosophic crisp separation axioms(

in neutrosophic crisp topological space by using a new types of neutrosophic crisp points in neutrosophic crisp topological space which namely [NCP_N].

we presented another concept of neutrosophic crisp closed sets called neutrosophic crisp semi-α-closed sets and studied their fundamental properties in neutrosophic crisp topological spaces, as the we have created the relationship between this new types of neutrosophic crisp open and closed sets in this Spaces.

we also presented another concept of neutrosophic open sets called neutrosophic semi-α-open sets and studied their fundamental properties in neutrosophic topological spaces, as the we have created the relationship between this new types of neutrosophic open and open sets in this Spaces.

We also use this new concept of open and closed sets in the definition of closure and interior set, where we know the closure and interior set by relying on these new varieties of open and closed sets, we also found the basic properties of closure and the interior.

المقترحات و التوصيات

لقد قمنا بدراسة الفضاءات التبولوجية الثنائية والثلاثية ومتعددة التبولوجيا وفقاً للمنطق العادي ووفقاً لمنطق النتروسوفيك ذلك المنطق الجديد عالمياً والأعم من المنطق الضبابي، كما أوجدنا أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في هذه الفضاءات، نوصي بدراسة :

١) التوابع في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة الثنائية والثلاثية.

٢) التراص في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة الثنائية والثلاثية.

٣) مسلمات الفصل النتروسوفيكية الهشة في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الهشة الثنائية والثلاثية.

٤) مسلمات الفصل النتروسوفيكية في الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية وفي الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الثنائية والثلاثية.

٥) مسلمات الفصل حسب الأنماط الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثنائية والثلاثية.

٦) دراسة الفضاءات التبولوجية النتروسوفيكية الثنائية والثلاثية ومتعددة التبولوجيا، بشكل مشابة لدراستنا في هذه الأطروحة.

٧) تطبيقات النتروسوفيك في التبولوجيا ومختلف فروع الرياضيات.

المراجع العلميّة

[1]. S. A. Alblowi, A. A. Salama, and M. Eisa. 2013, "New concepts of neutrosophic sets". *International Journal of Mathematics and Computer Applications Research (IJMCAR)* 3, 95-102.

[2]. R. Kh. AlHamido and Q. H. Imran, 2017," N-Open Sets and S-Open Sets in Tri-topological Spaces", *University of Babylon* J. for Pure & Appl. Sci., Vol.25, No.5.

[3]. W. Al-Omeri. 2016, "Neutrosophic crisp Sets via Neutrosophic crisp Topological Spaces NCTS", Neutrosophic Sets and Systems, Vol.13, pp.96-104

[4]. K. Atanassov. 1986, "intuitionistic fuzzy sets", fuzzy sets and systems 20, 87-96.

[5]. I. Arokiarani, R. Dhavaseelan, S. Jafari and M. Parimala. 2017,"On Some New Notions and Functions in Neutrosophic Topological Spaces", Neutrosophic Sets and Systems, Vol.16, pp.16-19.

[6]. K. Atanassov. 1983, "intuitionistic fuzzy sets". in V.Sgurev, ed., Vii ITKRS Session, Sofia (June 1983 central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences.
[7]. K. Atanassov. 1984, "intuitionistic fuzzy sets", Sofia central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences .
[8]. I. M. Hanafy, A. A. Salama, and K. M. Mahfouz. 2013, "Neutrosophic Crisp Events and Its Probability". International Journal of Mathematics and Computer Applications Research (IJMCAR), Vol. 3, Issue 1, 171-178.
[9].I. Hanafy, A.A. Salama and K. Mahfouz,2012, "Correlation of neutrosophic Data",International Refereed Journal of Engineering and Science (IRJES), Vol.(1), Issue 2 , 39-43.
[10].P. Iswarya, K. Bageerathi. 2016,"On Neutrosophic Semi-Open sets in Neutrosophic Topological Spaces", International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT), Vol.37, No.3, pp.214-223.
[11]. N. a. Jabbar and Al-Tabatabai, N. M. 2015, "$N^{\alpha}-$Open Sets And $N^{\alpha}-$Regularity In Topological Spaces", International Journal of Advanced Scientific and Technical Research., Vol. 3, No.5.
[12]. N. A. Jabbar and A. I. Nasir, 2010, "Some Types of Compactness in Bitopological Spaces", Ibn AL-Haitham J. For Pure & Appl. Sci., Vol.23, (1), 321-327.
[13]. J. C. Kelly, 1963, "Bitopological spaces", Proc. London Math. Soc.,13, 71-89.
[14]. Martin M. Kovar, 2000, "On 3-Topological Version Of q-Regularity", Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol.23, No.6, 393-398.
[15]. Mrsevic and I. L. Reilly, 1996, "Covering and Connectedness Properties of a Topological Space and it is Associated Topology of α-subsets", *Indian J. Pure Appl*. Math., 27(10), 995-1004.
[16]. O. Njastad, 1965, "On some classes of nearly open Sets", *Pacific Journal of math*., Vol.15, No.3, 961-970.
[17]. T. Noiri, 1988, "Characterizations of extremally disconnected spaces", Indian J. Pure Appl. Math., Vol.19, No.4, 325-329.
[18]. A. A Salama and F. Smarandache, 2013,"Filters via Neutrosophic Crisp Sets". Neutrosophic Sets and Systems 1, 34-38.
[19]. A. A Salama, F.Smarandache, 2015,"Neutrosophic crisp Set and Theory", Educational Publisher Columbus.
[20]. A. A. Salama and F. Smarandache , 2013, " Intuitionistic Fuzzy Ideals Topological Spaces " . Advances in Fuzzy Mathematics, Volume 7, Number 1, 51-60.
[21]. A. A. Salama and F. Smarandache , and Valeri Kroumov 2014, " Neutrosophic crisp Sets & Neutrosophic crisp Topological Spaces" . Neutrosophic Sets and Systems, Vlo. 2, 25-30.
[22]. A. A. Salama, 2015,"Basic Structure of Some Classes of Neutrosophic

Crisp Nearly Open Sets and Possible Application to GIS Topology". *Neutrosophic Sets and Systems* 7, 18-22.
[23]. A. A. Salama and S. A. Alblowi, 2012,Generalized Neutrosophic Set and Generalized Neutrousophic Topological Spaces. Journal computer Sci. Engineering 2, 29-32.
[24]. A. A. Salama and S. A. Alblowi, 2012,"Intuitionistic Fuzzy Ideals Topological Spaces". Advances in Fuzzy Mathematics 7, 51- 60.
[25]. A. A. Salama, 2013,"Neutrosophic Crisp Points and Neutrosophic Crisp Ideals". *Neutrosophic Sets and Systems* 1, 50-54.
[26]. A. A. Salama and S. A. Alblowi, 2012,"Neutrosophic set and neutrosophic topological space". ISORJ, Mathematics 3, 31-35.
[27]. A. A. Salama, 2015, " Basic Structure of Some Classes of Neutrosophic Crisp Nearly Open Sets & Possible Application to GIS Topology " . Neutrosophic Sets and Systems Vol. 7, 18-22.22
[28]. A. A. Salama, and H. Elagamy, 2013,"Neutrosophic Filters". *International Journal of Computer Science Engineering and Information Technology Reseearch* (IJCSEITR) 3, 307-312.
[29]. D. Sarker, 1997,"Fuzzy ideal theory, Fuzzy local function and generated fuzzy topology". *Fuzzy Sets and Systems* 87, 117-123.
[30]. F. Smarandache, 2002, "Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics", University of New Mexico, NM 87301, USA.
[31]. F. Smarandache, 1999,"A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set", *Neutrosophic Probability. American Research Press*, Rehoboth, NM.
[32]. F. Smarandache, 2011,"An introduction to the Neutrosophy probability applid in Quntum Physics". International Conference on introducation Neutrosoph Physics, Neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics, University of New Mexico, Gallup, NM 87301, USA2-4 December.
[33]. F. Smarandache, 2011,"An introduction to the Neutrosophy probability applid in Quntum Physics". International Conference on introducation Neutrosoph Physics, Neutrosophic Logic, Set, ProbaTrility, and Statistics, University of New Mexico, Gallup, NM 87301, USA2-4 December.
[34]. F. Smarandache, 2002,Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics, University of New Mexico, NM 87301, USA.
[35]. F. Smarandache. 1999, "A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability". American Research Press, Rehoboth, NM.
[36]. M. L. Thivagar, S. Jafari, V. Antonysamy and V.Sutha Devi, 2018,"The Ingenuity of Neutrosophic Topology via N-Topology", Neutrosophic Sets and Systems, Vlo.19, pp. 91-100.

[37]. M. L. Thivagar, V. Ramesh, M. D. Arockia, "On new structure of N – topology", 2016,Cogent Mathematics (Taylor and Francis),3,1204104.
[37]. V. Venkateswara Rao and Y. Srinivasa Rao, 2017,"Neutrosophic Pre-open Sets and Pre-closed Sets in Neutrosophic Topology", International Journal of ChemTech Research, Vol.10, No.10, pp.449-458.

[39]. L.A. Zadeh, 1965, "Fuzzy Sets" , Inform and Control 8, 338-353.

Syrian Arab Republic
Al- Baath University
Faculty of Sciences
Department Of Mathematics

Study of Multi - Topological Spaces

Dissertation prepared for a PhD degree in Pure Mathematics

Submitted by:
Riad Khider Alhamido

Supervision by:
Dr. Taleb Ghareba
Professor in Department of mathematics
Faculty of Sciences - Al- Baath University

Academic year

2019 – 2018 م - 1440 هـ