# Próba określenia miary jakości informacji na gruncie teorii grafów dla potrzeb dydaktyki

**Zbigniew Osiak**

E-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

http://vixra.org/author/zbigniew_osiak

**Streszczenie**
Zaproponowałem na gruncie teorii grafów miarę jakości informacji zawartej w danym komunikacie (haśle z programu nauczania) liczoną względem jego kontekstu oraz względem jego zakresu.

**Słowa kluczowe:** teoria grafów, program nauczania

## 1. Wprowadzenie
Z realizacji danego hasła z programu nauczania różni uczniowie osiągają różne korzyści w zależności od ich dotychczasowej wiedzy korespondującej z tym hasłem. Teoria grafów stwarza możliwość graficznej ilustracji struktury wiedzy ucznia i określenia miary jakości informacji związanej z przyswojeniem przez niego danego hasła.

## 2. Elementarne wiadomości z teorii grafów [1]
Pojęcia wprowadzone w tym paragrafie zostały zaczerpnięte z podręcznika Lucjana Szamkołowicza [1].

Istnieją trzy ekwiwalentne sposoby określania grafów: analityczny, geometryczny i macierzowy. Rozpatrzymy je kolejno.
Mówimy, że został określony graf, który będziemy oznaczali przez $G = \langle X, \vec{R} \rangle$, jeżeli został zadany zbiór dowolnych elementów X i dowolna relacja dwuargumentowa $\vec{R}$ określona na zbiorze X.
Jeżeli liczba elementów zbioru X jest liczbą skończoną, to graf nazywamy skończonym. Elementy zbioru X nazywamy wierzchołkami. Liczbę wierzchołków w grafie (rząd grafu) będziemy oznaczali przez $|G| = |\langle X, \vec{R} \rangle| = |X|$. Parę uporządkowaną $1 = [x, y]$ wierzchołków grafu, dla których mamy $x\vec{R}y$ nazywamy łukiem grafu. Jeżeli relacja $\vec{R}$ spełnia warunek: dla każdego $x \in X$ jest $\sim x\vec{R}x$ , to graf nazywamy grafem bez pętli. Jeżeli dla każdej pary $x, y \in X$ mamy: $x\vec{R}y \Rightarrow \sim y\vec{R}x$, to graf nazywamy ostro skierowanym.

Graf $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ można zilustrować graficznie, obrazując wierzchołki jako punkty w przestrzeni, a łuk $1 = [x_i, x_j]$ – linią ze strzałka skierowaną od $x_i$ do $x_j$.

Graf $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ można zadać w postaci zero jedynkowej macierzy kwadratowej A, zwanej macierzą relacji $\vec{R}$ grafu G.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad n = |X|$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x_i \vec{R} x_j \\ 0, \text{ gdy } \sim x_i \vec{R} x_j \end{cases}$$

Dwa łuki $l_1$, $l_2$ nazywamy kolejnymi, jeżeli koniec pierwszego jest początkiem drugiego, i piszemy $l_1 S l_2$.
Drogą nazywamy ciąg łuków $L = [l_1, l_2, \dots, l_m]$, dla których $l_i S l_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$.
Konturem nazywamy drogę, w której początek pierwszego łuku jest końcem ostatniego.
Graf G niezawierający konturów, nazywamy grafem bezkonturowym.
Niech x będzie dowolnym wierzchołkiem grafu $G = \langle X, \vec{R} \rangle$, przez $\Gamma_x$ oznaczymy zbiór tych wierzchołków $y \in X$, dla których $x \vec{R} y$, przez $\Gamma_x^{-1}$ – zbiór tych wierzchołków $z \in X$, dla których $z \vec{R} x$.

Mówimy, że graf $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ da się uporządkować, jeżeli zbiór $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, gdzie

1. $X_i \cap X_j = 0$ dla $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$,
2. $\forall x \in X_i : \left( x \vec{R} y \Rightarrow y \in X_j \right)$, $j > i$,
3. $\left( \Gamma_x^{-1} = 0 \wedge \Gamma_x \neq 0 \right) \Rightarrow x \in X_1$, $\Gamma_x = 0 \Rightarrow x \in X_m$. Tego warunku nie będziemy kategorycznie przestrzegać.

Podgrafem grafu $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ nazywamy dowolny graf $G' = \langle X', \vec{R}' \rangle$, gdzie $X' \subset X$, a relacja $\vec{R}'$ jest relacją ograniczoną do elementów zbioru $X'$.

Przytoczymy teraz kilka twierdzeń:
**Tw. 1.**
Każdy podgraf grafu bezkonturowego jest również grafem bezkonturowym.
**Tw. 2.**
Każdy graf bezkonturowy jest grafem ostro skierowanym bez pętli.
**Tw. 3.**
Jeżeli graf $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ da się uporządkować, to jest on grafem bezkonturowym.
**Tw. 4.**
Każdy graf $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ bezkonturowy da się uporządkować.

## 3. Graf programu

Grafem programu $G = \langle X, \vec{R} \rangle$ będziemy nazywali graf, gdzie X jest zbiorem haseł programowych realizowanych w nauczaniu fizyki, a relacja $\vec{R}$ określona jest następująco [2, s 135]:

$x \vec{R} y \overset{df}{=}$ do realizacji dydaktycznej hasła y jest potrzebna wcześniejsza realizacja hasła x

W badaniach nad układem i doborem treści realizowanych w nauczaniu fizyki przyjmujemy za Mieczysławem Sawickim [2,3,4,5] następujący postulat dydaktyczny:
"Struktura logiczna przedmiotu nauczania powinna być maksymalnie zbliżona i upodobniona do struktury nauki, która jest przedmiotem nauczania." – oraz opracowaną przez niego technikę macierzowo-grafową wyznaczania struktur logicznych przedmiotu.

Wśród wierzchołków (haseł) grafu programu wyróżnimy: wiadomości W i umiejętności U oraz polecenia P nad wiadomościami i/lub umiejętnościami.
Po zrealizowaniu polecenia nad wiadomościami i/lub umiejętnościami będziemy je w dalszym ciągu traktowali jako nową wiadomość i/lub nową umiejętność.
Wiadomościami będą zdania [3, s 68]:

a) informujące o faktach,
b) informujące o własnościach obiektów i zjawisk,
c) definiujące wielkości fizyczne,
d) formułujące prawa i zasady fizyki,
e) określające jednostki wielkości fizycznych,
f) informujące o czynnościach pomiarowych,
g) dotyczące symboli i funkcji matematycznych.

W grafie programu będziemy mogli wyróżnić łuki, które realizuje nauczyciel oraz łuki, które może realizować uczeń. Moc zbioru wierzchołków (rząd grafu programu) można zwiększać w zależności od stopnia szczegółowości opracowania programu.

Łatwo zauważyć, że graf programu jest grafem bezkonturowym, a więc (na mocy twierdzenia 4 z poprzedniego paragrafu) da się uporządkować. Porządkując graf nie będziemy kategorycznie przestrzegać warunku 3-ego.

Kontekstem wierzchołka x będziemy nazywali podgraf grafu programu, którego zbiór wierzchołków stanowią wierzchołki leżące na drogach o końcu w wierzchołku x. Kontekst wierzchołka x będziemy oznaczali przez $K_x$. Kontekst wierzchołka obrazuje strukturę hasła. Rząd zakresu wierzchołka może stanowić miarę zrozumienia danego hasła przez ucznia.

Zakresem wierzchołka x będziemy nazywali podgraf grafu programu, którego zbiór wierzchołków stanowią wierzchołki leżące na drogach o początku w wierzchołku x. Zakres wierzchołka x będziemy oznaczali przez $Z_x$. Rząd zakresu wierzchołka może stanowić miarę użyteczności danego hasła dla ucznia. Rząd zakresu podstawowych praw i zasad fizyki powinien być jak największy.

**4. Miara jakości informacji**

Po zrealizowaniu przez danego ucznia odpowiedniej części programu nauczania można oszacować jakość informacji zawartej w danym haśle liczoną względem jego kontekstu jako równą w jolanach liczbie wierzchołków w kontekście tego hasła.

$$\boxed{J(K_x) = |K_x|}$$

$J(K_x)$ jest miarą zrozumienia danego hasła przez ucznia.

Po zrealizowaniu przez danego ucznia odpowiedniej części programu nauczania można oszacować jakość informacji zawartej w danym haśle liczoną względem jego zakresu jako równą w jolanach liczbie wierzchołków w zakresie tego hasła.

$$\boxed{J(Z_x) = |Z_x|}$$

$J(Z_x)$ jest miarą użyteczności danego hasła dla ucznia.

Jednostką miary jakości informacji są jolany – [jol].

## 5. Własności miary jakości informacji

W celu zilustrowania wprowadzonych poprzednio pojęć rozpatrzymy graf programu o następujących wierzchołkach:
1. Odcinek, 2. Proste prostopadłe, 3. Proste równoległe, 4. Elementy logiki: negacja, koniunkcja, implikacja, alternatywa, implikacja i równoważność, 5. Moduł, 6. Równoległobok, przekątna równoległoboku, 7. Wielokąt, 8. Rzuty prostokątne, 9. Układ współrzędnych prostokątnych, 10. Linia prosta i linia krzywa, 11. Funkcja, 12. Wykres funkcji, 13. Sinus, cosinus, tangens, 14. Sieczna, 15. Styczna, 16. Funkcja stała, liniowa i kwadratowa, 17. Czas, 18. Długość, 19 Układ jednostek SI, 20. Definicja skalara, 21. Definicja wektora, 22. Odcinek skierowany, 23. Wykazać, że odcinek skierowany jest wektorem, 24. Geometryczna interpretacja wektorów, 25. Wektory prostopadłe, 26. Wektory równoległe zgodnie i przeciwnie skierowane, 27. Wektory równe, 28. Wektory przeciwne, 29. Mnożenie (dzielenie) wektora przez skalar, 30. Wektor jednostkowy – wersor, 31. Przedstawić dany wektor przez wektor jednostkowy, 32. Dodawanie wektorów – reguła równoległoboku, 33. Reguła trójkąta, 34. Własności operacji dodawania i mnożenia wektorów, 35. Odejmowanie wektorów, 36. Rozkładanie wektora na składowe, 37. Współrzędne wektora w układzie współrzędnych prostokątnych, 38. Wyrazić sumę wektorów przez współrzędne, 39. Wyrazić różnicę wektorów przez współrzędne, 40. Punkt materialny, 41. Układ odniesienia, 42. Ruch, 43. Względność ruchu, 44. Tor, 45. Zależność toru ciała od układu odniesienia. 46. Równanie toru, 47. Klasyfikacja ruchów ze względu na tor, 48. Promień wodzący, 49. Zastosowanie promienia wodzącego do opisu ruchu, 50. Zasada niezależności ruchów, 51. Demonstracja zasady niezależności ruchów, 52. Droga jako długość toru, 53. Jednostka drogi w układzie SI, 54. Wyrazić drogę przez promień wodzący w ruchu prostoliniowym. 55. Równanie drogi, 56. Definicja prędkości, 57. Interpretacja prędkości średniej na wykresie zależności drogi od czasu, 58. Zależność prędkości od układu odniesienia. 59. Jednostka prędkości w układzie SI, 60. Algorytm określania jednostki danej wielkości fizycznej w danym układzie jednostek, 61. Jakościowa definicja prędkości chwilowej na przykładzie ruchu prostoliniowego, 62. Interpretacja prędkości chwilowej na wykresie S = f(t), 63. Metody matematyczne wyznaczania stycznych do krzywych – pochodna funkcji, 64. Tabela pochodnych funkcji, 65. Podstawowe wzory rachunku różniczkowego, 66. Ilościowa definicja prędkości chwilowej, 67. Rozszerzenie definicji prędkości chwilowej na ruch krzywoliniowy, 68. Kierunek prędkości chwilowej względem toru – demonstracja.

Przez zadanie będziemy rozumieli takie polecenie nad wiadomościami i umiejętnościami, które nie wchodzi w skład kontekstu innych wierzchołków. Dlatego też zadań nie uwzględniono w rozpatrywanym grafie programu.

Leon Brillouin [6] uważa, że "...wartość, jaką przedstawia informacja dla ludzi, powinna być wielkością względną, mającą różne wartości dla różnych odbiorców, zgodnie z możliwością jej rozumienia i późniejszego użytkowania."

Spróbujemy przeanalizować niektóre własności zdefiniowanej przez nas miary jakości (wartości) informacji. Założymy, że struktura wiedzy ucznia jest izomorficzna ze strukturą reprezentowaną przez odpowiedni graf programu. Jakość informacji zawartej w realizacji dydaktycznej wierzchołka x względem jego kontekstu jest dla danego ucznia (ustalony graf programu) zależna od liczby wierzchołków w kontekście wierzchołka, który realizuje uczeń.

Na przeanalizowanie przez ucznia kontekstów wiadomości i umiejętności, z których bezpośrednio korzysta w realizacji dydaktycznej danego wierzchołka potrzebny jest pewien czas. Wynika stąd, że jakość informacji jest funkcją efektywnego czasu pracy ucznia.

$$J(K_x) = f(t_e)$$

Konstrukcja grafu programu dla poszczególnych uczniów byłaby bardzo uciążliwa, dlatego też postulujemy, aby w grafie programu, który nazwiemy dalej grafem programu maksymalnego $G_{P\max}$ można było wyróżnić kilka podgrafów $G_{Pu}$ izomorficznych ze strukturą wiedzy posiadanej przez uczniów.

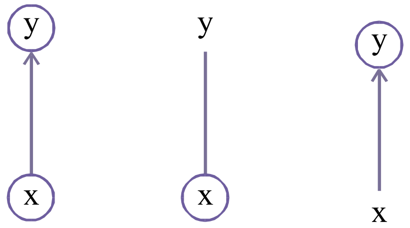
Realizując program wg grafu programu maksymalnego $G_{P\max}$ i pracując z uczniami o różnych $G_{Pu}$ należałoby zoptymalizować tempo pracy. Miarą stopnia przygotowania ucznia do realizacji danego wierzchołka x będzie stosunek rzędu kontekstu tego wierzchołka, będącego podgrafem grafu programu $G_{Pu}$ do rzędu kontekstu wierzchołka x, będącego podgrafem grafu programu maksymalnego $G_{P\max}$.

Badając zależność jakości informacji zawartej w realizacji dydaktycznej danego hasła względem jego kontekstu od efektywnego czasu pracy ucznia przy ustalonych stopniach przygotowania będziemy mogli rozwiązać problem optymalizacji tempa pracy.

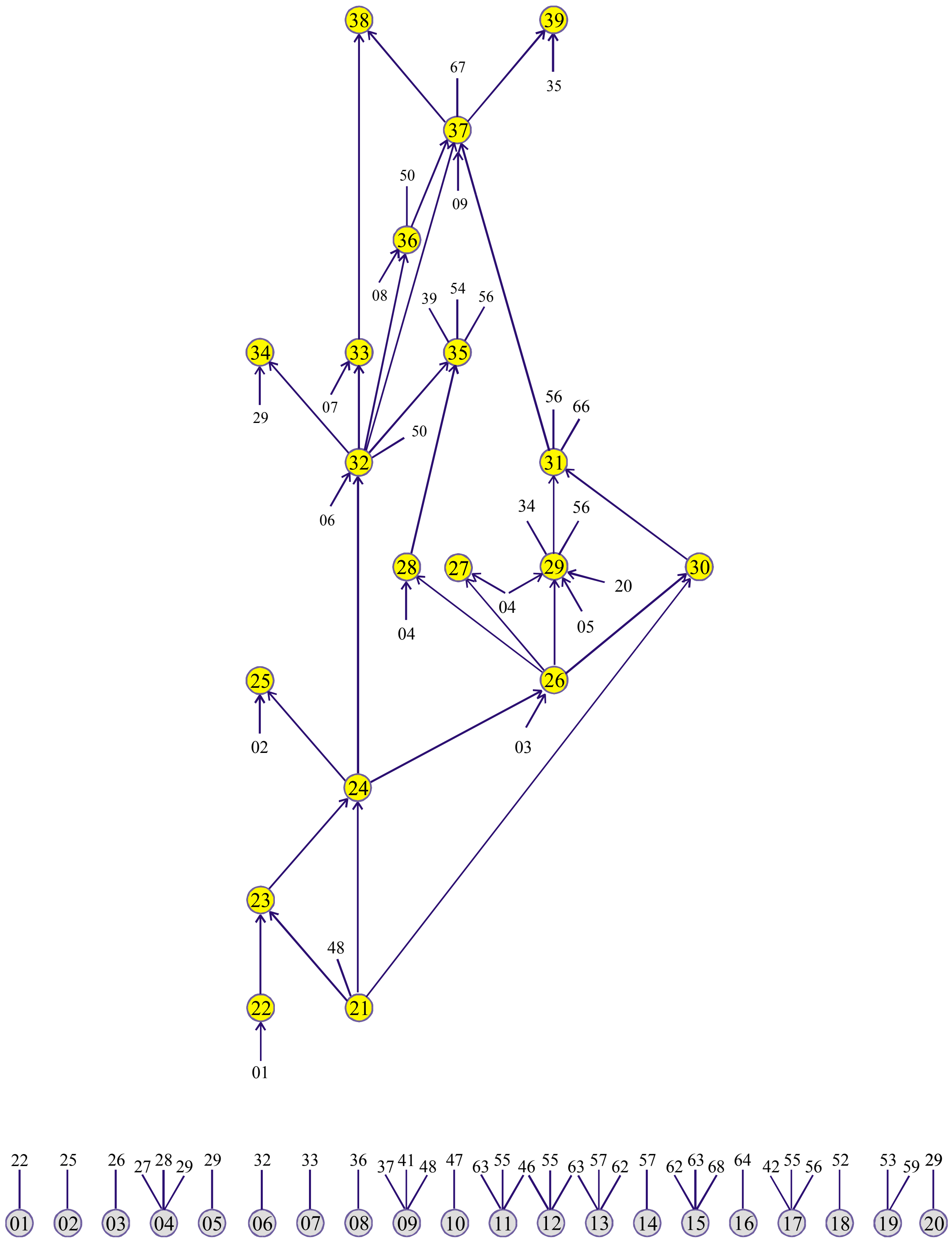
Należałoby zbadać zależność jakości informacji zawartej w realizacji dydaktycznej danego hasła względem jego kontekstu od efektywnego czasu realizacji tego hasła, dla różnych źródeł informacji takich jak:

1. nauczyciel,
2. tekst,
3. demonstracja,
4. ćwiczenie laboratoryjne,
5. samodzielna praca ucznia,
6. film,
7. przeźrocze.

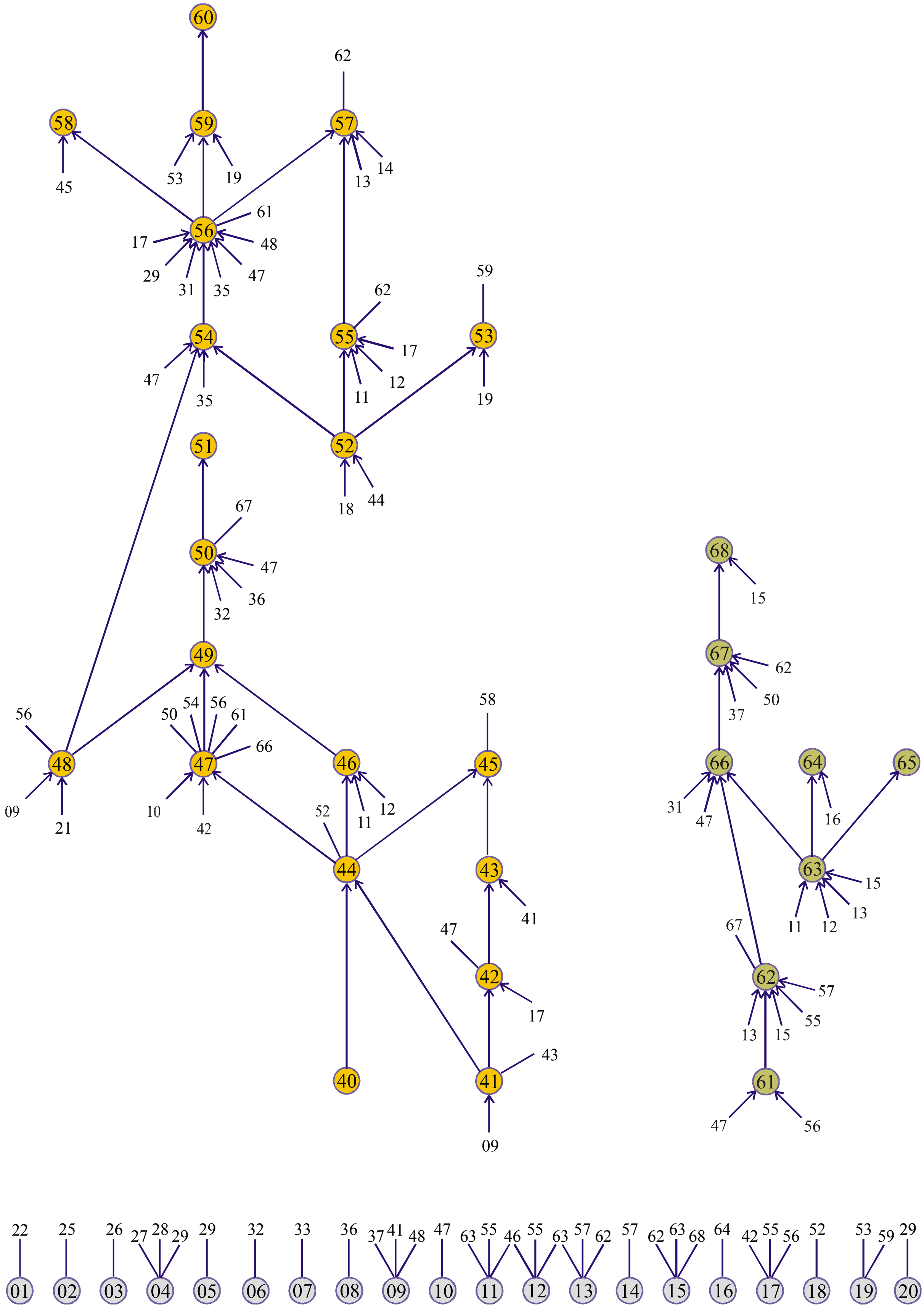
Dla przejrzystości ilustracji graficznej grafu programu wprowadzimy następujące oznaczenia:



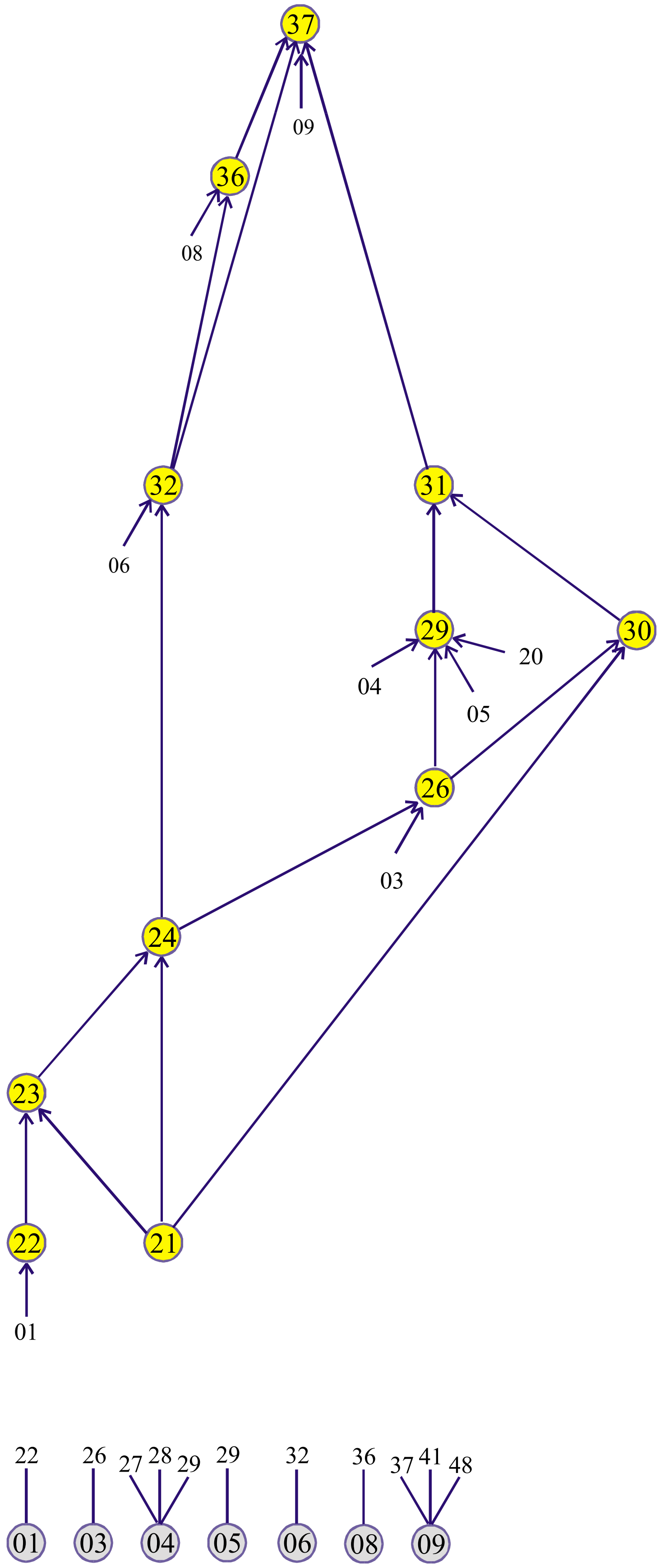

każde z nich oznacza, że $x\vec{R}y$.



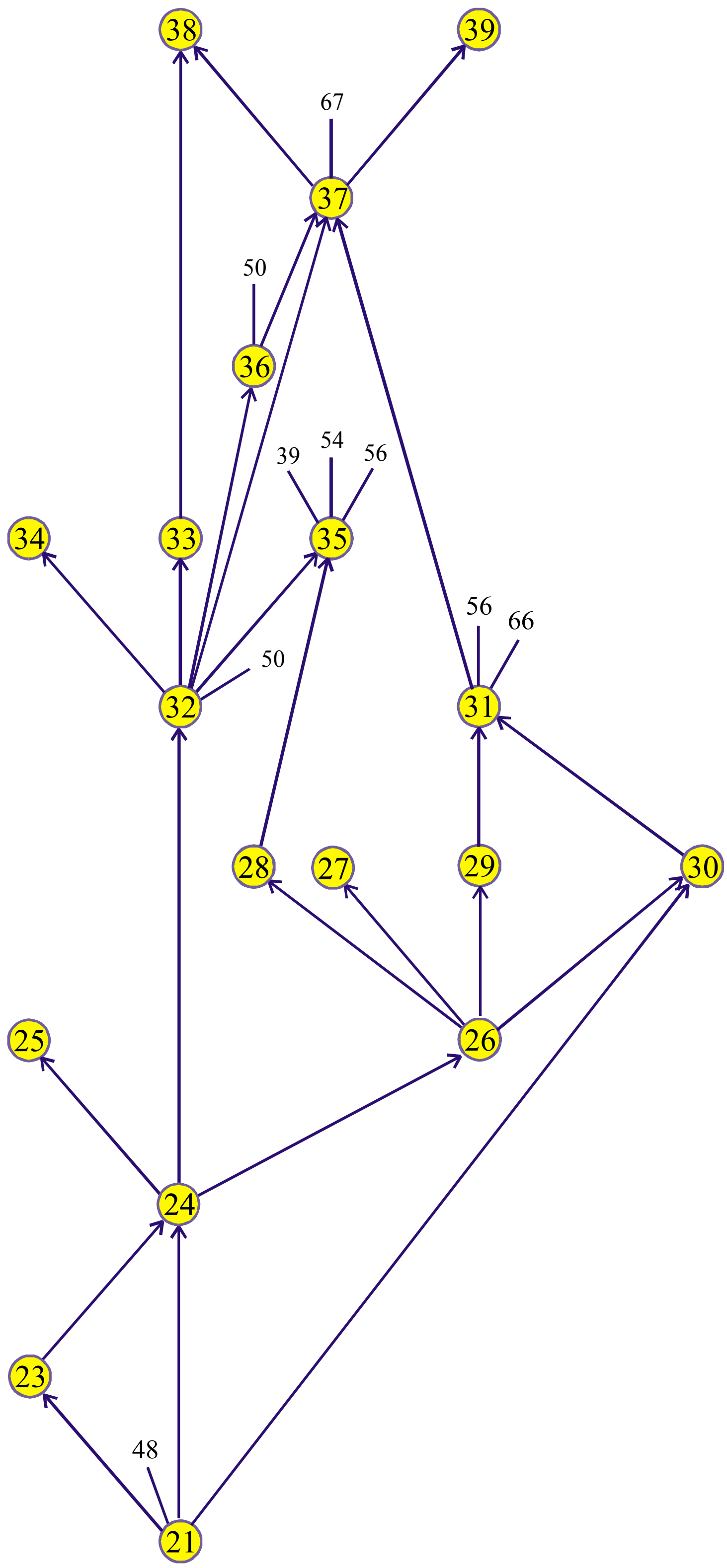

Rys. 1A. Przykład: Uporządkowany graf programu




Rys. 1B. Przykład: Uporządkowany graf programu




Rys. 2. Przykład: Kontekst wierzchołka 37

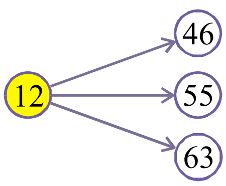



Rys. 3. Przykład: Zakres wierzchołka 21

Zbiory $\Gamma_x$ zawarte w przykładowym w grafie programu

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | 22 | | | | | | | 35 | 39 | 54 | 56 | | | | |
| 02 | 25 | | | | | | | 36 | 37 | 50 | | | | | |
| 03 | 26 | | | | | | | 37 | 38 | 39 | 67 | | | | |
| 04 | 27 | 28 | 29 | | | | | 38 | | | | | | | |
| 05 | 29 | | | | | | | 39 | | | | | | | |
| 06 | 32 | | | | | | | 40 | 44 | | | | | | |
| 07 | 33 | | | | | | | 41 | 42 | 43 | 44 | | | | |
| 08 | 36 | | | | | | | 42 | 43 | 47 | | | | | |
| 09 | 37 | 41 | 48 | | | | | 43 | 45 | | | | | | |
| 10 | 47 | | | | | | | 44 | 45 | 46 | 47 | 52 | | | |
| 11 | 46 | 55 | 63 | | | | | 45 | 58 | | | | | | |
| 12 | 46 | 55 | 63 | | | | | 46 | 49 | | | | | | |
| 13 | 57 | 62 | 63 | | | | | 47 | 49 | 50 | 54 | 56 | 61 | 66 | |
| 14 | 57 | | | | | | | 48 | 49 | 54 | 56 | | | | |
| 15 | 62 | 63 | 68 | | | | | 49 | 50 | | | | | | |
| 16 | 64 | | | | | | | 50 | 51 | 67 | | | | | |
| 17 | 42 | 55 | 56 | | | | | 51 | | | | | | | |
| 18 | 52 | | | | | | | 52 | 53 | 54 | 55 | | | | |
| 19 | 53 | 59 | | | | | | 53 | 59 | | | | | | |
| 20 | 29 | | | | | | | 54 | 56 | | | | | | |
| 21 | 23 | 24 | 30 | 48 | | | | 55 | 57 | 62 | | | | | |
| 22 | 23 | | | | | | | 56 | 57 | 58 | 59 | | | | |
| 23 | 24 | | | | | | | 57 | 62 | | | | | | |
| 24 | 25 | 26 | 32 | | | | | 58 | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | 59 | 60 | | | | | | |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | | | 60 | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | | 61 | 62 | | | | | | |
| 28 | 35 | | | | | | | 62 | 66 | 67 | | | | | |
| 29 | 31 | 34 | 56 | | | | | 63 | 64 | 65 | 66 | | | | |
| 30 | 31 | | | | | | | 64 | | | | | | | |
| 31 | 37 | 56 | 66 | | | | | 65 | | | | | | | |
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 50 | | 66 | 67 | | | | | | |
| 33 | 38 | | | | | | | 67 | 68 | | | | | | |
| 34 | | | | | | | | 68 | | | | | | | |

Niech $x$ będzie dowolnym wierzchołkiem grafu $G = \langle X, \vec{R} \rangle$, przez $\Gamma_x$ oznaczyliśmy zbiór tych wierzchołków $y \in X$, dla których $x\vec{R}y$.

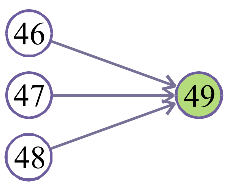



$\Gamma_{12} = \{46, 55, 63\}$

Zbiory $\Gamma_x^{-1}$ zawarte w przykładowym w grafie programu

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | | | | | | | | 35 | 28 | 32 | | | | | |
| 02 | | | | | | | | 36 | 08 | 32 | | | | | |
| 03 | | | | | | | | 37 | 09 | 31 | 32 | 36 | | | |
| 04 | | | | | | | | 38 | 33 | 37 | | | | | |
| 05 | | | | | | | | 39 | 35 | 37 | | | | | |
| 06 | | | | | | | | 40 | | | | | | | |
| 07 | | | | | | | | 41 | 09 | | | | | | |
| 08 | | | | | | | | 42 | 17 | 41 | | | | | |
| 09 | | | | | | | | 43 | 41 | 42 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | 44 | 40 | 41 | | | | | |
| 11 | | | | | | | | 45 | 43 | 44 | | | | | |
| 12 | | | | | | | | 46 | 11 | 12 | 44 | | | | |
| 13 | | | | | | | | 47 | 10 | 42 | 44 | | | | |
| 14 | | | | | | | | 48 | 09 | 21 | | | | | |
| 15 | | | | | | | | 49 | 46 | 47 | 48 | | | | |
| 16 | | | | | | | | 50 | 32 | 36 | 47 | 49 | | | |
| 17 | | | | | | | | 51 | 50 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | 52 | 18 | 44 | | | | | |
| 19 | | | | | | | | 53 | 19 | 52 | | | | | |
| 20 | | | | | | | | 54 | 35 | 47 | 48 | 52 | | | |
| 21 | | | | | | | | 55 | 11 | 12 | 17 | 52 | | | |
| 22 | 01 | | | | | | | 56 | 17 | 29 | 31 | 35 | 47 | 48 | |
| 23 | 21 | 22 | | | | | | 57 | 13 | 14 | 55 | 56 | | | |
| 24 | 21 | 23 | | | | | | 58 | 45 | 56 | | | | | |
| 25 | 02 | 24 | | | | | | 59 | 19 | 53 | 56 | | | | |
| 26 | 03 | 24 | | | | | | 60 | 59 | | | | | | |
| 27 | 04 | 26 | | | | | | 61 | 47 | 56 | | | | | |
| 28 | 04 | 26 | | | | | | 62 | 13 | 15 | 55 | 57 | 61 | | |
| 29 | 04 | 05 | 20 | 26 | | | | 63 | 11 | 12 | 13 | 15 | | | |
| 30 | 21 | 26 | | | | | | 64 | 16 | 63 | | | | | |
| 31 | 29 | 30 | | | | | | 65 | 63 | | | | | | |
| 32 | 06 | 24 | | | | | | 66 | 31 | 47 | 62 | 63 | | | |
| 33 | 07 | 32 | | | | | | 67 | 37 | 50 | 62 | 66 | | | |
| 34 | 29 | 32 | | | | | | 68 | 15 | 67 | | | | | |

Niech x będzie dowolnym wierzchołkiem grafu $G = \langle X, \vec{R} \rangle$, przez $\Gamma_x^{-1}$ oznaczyliśmy zbiór tych wierzchołków $z \in X$ , dla których $z\vec{R}x$ .




$\Gamma_{49}^{-1} = \{46, 47, 48\}$

```
   00000000011111111112222222222333333333344444444445555555555666666666
   12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678

01 00000000000000000000010000000000000000000000000000000000000000000000 01
02 00000000000000000000000010000000000000000000000000000000000000000000 02
03 00000000000000000000000001000000000000000000000000000000000000000000 03
04 00000000000000000000000000111000000000000000000000000000000000000000 04
05 00000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000000000 05
06 00000000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000000 06
07 00000000000000000000000000000000100000000000000000000000000000000000 07
08 00000000000000000000000000000000000100000000000000000000000000000000 08
09 00000000000000000000000000000000000010001000000100000000000000000000 09
10 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 10
11 00000000000000000000000000000000000000000000010000000010000000100000 11
12 00000000000000000000000000000000000000000000010000000010000000100000 12
13 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000100000110000 13
14 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000100000000000 14
15 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000110000 15
16 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000010000 16
17 00000000000000000000000000000000000000000100000000000011000000000000 17
18 00000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000000 18
19 00000000000000000000000000000000000000000000000000001000001000000000 19
20 00000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000000000 20
21 00000000000000000000001100000100000000000000000100000000000000000000 21
22 00000000000000000000001000000000000000000000000000000000000000000000 22
23 00000000000000000000000100000000000000000000000000000000000000000000 23
24 00000000000000000000000011000001000000000000000000000000000000000000 24
25 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 25
26 00000000000000000000000000111100000000000000000000000000000000000000 26
27 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 27
28 00000000000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000 28
29 00000000000000000000000000000010010000000000000000000001000000000000 29
30 00000000000000000000000000000010000000000000000000000000000000000000 30
31 00000000000000000000000000000000000010000000000000000001000000000100 31
32 00000000000000000000000000000000111110000000000001000000000000000000 32
33 00000000000000000000000000000000000001000000000000000000000000000000 33
34 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 34
35 00000000000000000000000000000000000000100000000000000101000000000000 35
36 00000000000000000000000000000000000010000000000001000000000000000000 36
37 00000000000000000000000000000000000001100000000000000000000000000010 37
38 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 38
39 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 39
40 00000000000000000000000000000000000000000001000000000000000000000000 40
41 00000000000000000000000000000000000000000111000000000000000000000000 41
42 00000000000000000000000000000000000000000100001000000000000000000000 42
43 00000000000000000000000000000000000000000000100000000000000000000000 43
44 00000000000000000000000000000000000000000000111000000100000000000000 44
45 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000 45
46 00000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000000000 46
47 00000000000000000000000000000000000000000000000011000101000010000100 47
```

```
48  00000000000000000000000000000000000000000000000010000101000000000000  48
49  00000000000000000000000000000000000000000000000001000000000000000000  49
50  00000000000000000000000000000000000000000000000000100000000000000010  50
51  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  51
52  00000000000000000000000000000000000000000000000000001110000000000000  52
53  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000001000000000  53
54  00000000000000000000000000000000000000000000000000000001000000000000  54
55  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000100001000000  55
56  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000111000000000  56
57  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001000000  57
58  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  58
59  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000  59
60  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  60
61  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001000000  61
62  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000110  62
63  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001110000  63
64  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  64
65  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  65
66  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000010  66
67  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001  67
68  00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  68

    00000000011111111112222222222333333333344444444445555555555666666666
    12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678
```

Rys. 4. Macierz relacji grafu programu przedstawionego na Rys. 1.

################################################################################

Poniżej podaliśmy konteksty poszczególnych wierzchołków grafu programu przedstawionego na Rys. 1.

$K_{22}$ = {01}
$K_{23}$ = {21, 22}
$K_{24}$ = {01, 21, 22, 23}
$K_{25}$ = {01, 02, 21, 22, 23, 24}
$K_{26}$ = {01, 03, 21, 22, 23, 24}
$K_{27}$ = {01, 03, 04, 21, 22, 23, 24, 26}
$K_{28}$ = {01, 03, 04, 21, 22, 23, 24, 26}
$K_{29}$ = {01, 03, 04, 05, 20, 21, 22, 23, 24, 26}
$K_{30}$ = {01, 03, 21, 22, 23, 24, 26}
$K_{31}$ = {01, 03, 04, 05, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 29, 30}
$K_{32}$ = {01, 06, 21, 22, 23, 24}
$K_{33}$ = {01, 06, 07, 21, 22, 23, 24, 32}
$K_{34}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 29, 32}
$K_{35}$ = {01, 03, 04, 06, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 32}
$K_{36}$ = {01, 06, 08, 21, 22, 23, 24, 32}
$K_{37}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 29, 30, 31, 32, 36}
$K_{38}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 36, 37}
$K_{39}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37}

$K_{40}$ = 0
$K_{41}$ = {09}
$K_{42}$ = {09, 17, 41}
$K_{43}$ = {09, 17, 41, 42}
$K_{44}$ = {09, 40, 41}
$K_{45}$ = {09, 17, 40, 41, 42}
$K_{46}$ = {09, 11, 12, 40, 41, 44}
$K_{47}$ = {09, 10, 17, 40, 41, 42, 44}
$K_{48}$ = {09, 21}
$K_{49}$ = {09, 10, 17, 21, 40, 41, 42, 44, 46, 47,48}
$K_{50}$ = {01, 06, 08, 09, 10, 17, 21, 22, 23, 24, 32, 36, 40, 41, 42, 44, 46, 47 ,48, 49}
$K_{51}$ = {01, 06, 08, 09, 10, 17, 21, 22, 23, 24, 32, 36, 40, 41, 42, 44, 46, 47 ,48, 49, 50}
$K_{52}$ = {09, 18, 40, 41, 44}
$K_{53}$ = {09, 18, 19, 40, 41, 44, 52}
$K_{54}$ = {01, 03, 04, 06, 09, 10, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 32, 40, 41, 42, 44}
$K_{55}$ = {09, 11, 12, 17, 18, 40, 41, 44, 52}
$K_{56}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 54}
$K_{57}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 54, 55, 56}
$K_{58}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 54, 56}
$K_{59}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 53, 54, 56}
$K_{60}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 53, 54, 56, 59}
$K_{61}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 54, 56}
$K_{62}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 54, 55, 56, 57, 61}
$K_{63}$ = {11, 12,13, 15}
$K_{64}$ = {11, 12, 13, 15, 16, 63}
$K_{65}$ = {11, 12, 13, 15, 63}
$K_{66}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 52, 54, 55, 56, 57, 61, 62, 63}
$K_{67}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 61, 62, 63, 66}
$K_{68}$ = {01, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 47, 48, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 61, 62, 63, 66, 67}

##############################################################################

Poniżej podaliśmy zakresy poszczególnych wierzchołków grafu programu przedstawionego na Rys. 1.

$Z_{01}$ = {22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{02}$ = {25
$Z_{03}$ = {26, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}

$Z_{04}$ = {27, 28, 29, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{05}$ = {29, 31, 34, 37, 38, 39, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{06}$ = {32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{07}$ = {33, 38}
$Z_{08}$ = {36, 37, 38, 39, 50, 51, 67, 68}
$Z_{09}$ = {37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{10}$ = {47, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{11}$ = {46, 49, 50, 51, 55, 57, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68}
$Z_{12}$ = {46, 49, 50, 51, 55, 57, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68}
$Z_{13}$ = {57, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68}
$Z_{14}$ = {57, 62, 66, 67, 68
$Z_{15}$ = {62, 63, 64, 65, 66, 67, 68}
$Z_{16}$ = {64}
$Z_{17}$ = {42, 43, 45, 47, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{18}$ = {52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{19}$ = {53, 59, 60}
$Z_{20}$ = {29, 31, 34, 37, 38, 39, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{21}$ = {23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 48, 49, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{22}$ = {23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{23}$ = {24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{24}$ = {25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{25}$ = 0
$Z_{26}$ = {27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{27}$ = 0
$Z_{28}$ = {
$Z_{29}$ = {31, 34, 37, 38, 39, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{30}$ = {31, 37, 38, 39, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{31}$ = {37, 38, 39, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{32}$ = {33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{33}$ = {38}
$Z_{34}$ = 0
$Z_{35}$ = {39, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{36}$ = {37, 38, 39, 50, 51, 67, 68}
$Z_{37}$ = {38, 39, 67, 68}
$Z_{38}$ = 0
$Z_{39}$ = 0
$Z_{40}$ = {44, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{41}$ = {42, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{42}$ = {43, 45, 47, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{43}$ = {45, 58}
$Z_{44}$ = {50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{45}$ = {58}
$Z_{46}$ = {49, 50, 51, 67, 68}
$Z_{47}$ = {50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}
$Z_{48}$ = {49, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68}

$Z_{49} = \{50, 51, 67, 68\}$
$Z_{50} = \{51, 67, 68\}$
$Z_{51} = 0$
$Z_{52} = \{53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68\}$
$Z_{53} = \{59, 60\}$
$Z_{54} = \{56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68\}$
$Z_{55} = \{57, 62, 66, 67, 68\}$
$Z_{56} = \{57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67, 68\}$
$Z_{57} = \{62, 66, 67, 68\}$
$Z_{58} = 0$
$Z_{59} = \{60\}$
$Z_{60} = 0$
$Z_{61} = \{62, 66, 67, 68\}$
$Z_{62} = \{66, 67, 68\}$
$Z_{63} = \{64, 65, 66, 67, 68\}$
$Z_{64} = 0$
$Z_{65} = 0$
$Z_{66} = \{67, 68\}$
$Z_{67} = \{68\}$
$Z_{68} = 0$

##################################################################################

W poniższych tabelach podano wartości $|\Gamma_x^{-1}|, |K_x|$, $J(K_x)$, $|\Gamma_x|$, $|Z_x|$ i $J(Z_x)$ dla poszczególnych wierzchołków grafu programu przedstawionego na Rys. 1.

| x | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\Gamma_x^{-1}\rvert$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lvert K_x\rvert$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $J(K_x)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\lvert\Gamma_x\rvert$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| $\lvert Z_x\rvert$ | 31 | 1 | 24 | 21 | 18 | 21 | 2 | 8 | 26 | 13 | 13 | 13 |
| $J(Z_x)$ | 31 | 1 | 24 | 21 | 18 | 21 | 2 | 8 | 26 | 13 | 13 | 13 |

| x | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\Gamma_x^{-1}\rvert$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| $\lvert K_x\rvert$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $J(K_x)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $\lvert\Gamma_x\rvert$ | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 |
| $\lvert Z_x\rvert$ | 8 | 5 | 7 | 1 | 17 | 14 | 3 | 18 | 32 | 30 | 29 | 28 |
| $J(Z_x)$ | 8 | 5 | 7 | 1 | 17 | 14 | 3 | 18 | 32 | 30 | 29 | 28 |

| x | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|\Gamma_x^{-1}\right\|$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $\left\|K_x\right\|$ | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 7 | 12 | 6 | 8 | 13 | 11 | 8 |
| $J(K_x)$ | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 7 | 12 | 6 | 8 | 13 | 11 | 8 |
| $\left\|\Gamma_x\right\|$ | 0 | 4 | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| $\left\|Z_x\right\|$ | 0 | 23 | 0 | 13 | 17 | 14 | 13 | 20 | 1 | 0 | 12 | 7 |
| $J(Z_x)$ | 0 | 23 | 0 | 13 | 17 | 14 | 13 | 20 | 1 | 0 | 12 | 7 |

| x | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|\Gamma_x^{-1}\right\|$ | 4 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| $\left\|K_x\right\|$ | 18 | 23 | 20 | 0 | 1 | 3 | 4 | 3 | 5 | 6 | 7 | 2 |
| $J(K_x)$ | 18 | 23 | 20 | 0 | 1 | 3 | 4 | 3 | 5 | 6 | 7 | 2 |
| $\left\|\Gamma_x\right\|$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 6 | 3 |
| $\left\|Z_x\right\|$ | 4 | 0 | 0 | 16 | 21 | 15 | 2 | 15 | 1 | 5 | 12 | 14 |
| $J(Z_x)$ | 4 | 0 | 0 | 16 | 21 | 15 | 2 | 15 | 1 | 4 | 12 | 14 |

| x | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|\Gamma_x^{-1}\right\|$ | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| $\left\|K_x\right\|$ | 11 | 20 | 21 | 5 | 5 | 19 | 9 | 29 | 36 | 30 | 33 | 34 |
| $J(K_x)$ | 11 | 20 | 21 | 5 | 5 | 19 | 9 | 29 | 36 | 30 | 33 | 34 |
| $\left\|\Gamma_x\right\|$ | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\left\|Z_x\right\|$ | 4 | 3 | 0 | 13 | 2 | 10 | 5 | 9 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| $J(Z_x)$ | 4 | 3 | 0 | 13 | 2 | 10 | 5 | 9 | 4 | 0 | 1 | 0 |

| x | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|\Gamma_x^{-1}\right\|$ | 2 | 5 | 4 | 2 | 1 | 4 | 4 | 2 |
| $\left\|K_x\right\|$ | 30 | 39 | 4 | 6 | 5 | 41 | 47 | 48 |
| $J(K_x)$ | 30 | 39 | 4 | 6 | 5 | 41 | 47 | 48 |
| $\left\|\Gamma_x\right\|$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $\left\|Z_x\right\|$ | 4 | 3 | 5 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $J(Z_x)$ | 4 | 3 | 5 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |

## 6. Wnioski do badań empirycznych

Jeżeli założymy, że struktura wiedzy ucznia jest izomorficzna ze strukturą reprezentowaną przez odpowiedni graf programu, to:

1. Za pomocą specjalnie przygotowanego testu można będzie zbadać strukturę wiedzy ucznia i skonstruować odpowiadający jej graf programu $G_{Pu}$.
2. Za pomocą testu składającego się z poleceń nad wiadomościami i umiejętnościami można będzie wyznaczyć efektywny czas realizacji poszczególnych poleceń przy ustalonych parametrach takich jak: metoda pracy ucznia, stopień przygotowania ucznia do realizacji danego hasła oraz rodzaj źródła informacji.
3. Można zbadać czy istnieje optymalny czas trwania jednostki lekcyjnej.
4. Realizując program wg $G_{P\max}$ i pracując z uczniami o różnych $G_{Pu}$, można będzie zoptymalizować tempo pracy.

## 7. Uwagi końcowe

Praca ta powstała w 1972, ale nie została opublikowana. Pracowałem wtedy w Zakładzie Metodyki Nauczania Fizyki w Instytucie Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego.

Na zamówienie Wydawnictwa Ossolineum opracowałem [7] w 2012 “Ilustrowany Słownik Fizyki” zawierający około 1600 haseł oraz 500 kolorowych rysunków. Słownik został tak zredagowany aby do każdego hasła można było dołączyć jego kontekst oraz zakres utworzone z pozostałych haseł.

Tuż przed oddaniem Słownika do druku Wydawnictwo Ossolineum zbankrutowało.

## Cytowane prace

[1] Lucjan Szamkołowicz: *Teoria grafów skończonych.* Ossolineum, Wrocław 1971.
[2] Mieczysław Sawicki: *Struktury logiczne w nauczaniu fizyki.*
Biuletyn Pedagogiczny Nr 4 (41), Rok XVIII, Instytut Pedagogiki, Warszawa 1969.
[3] Mieczysław Sawicki: *Struktury logiczne w nauczaniu fizyki.*
Praca doktorska (maszynopis), Instytut Pedagogiki, Warszawa 1969.
[4] Mieczysław Sawicki: *Struktura jako kategoria dydaktyki.*
Ruch Pedagogiczny Nr 5 (1969).
[5] Mieczysław Sawicki: *Struktury logiczne w nauczaniu fizyki.*
Kwartalnik Pedagogiczny Nr 2 (48), 1968.
[6] Leon Brillouin: *Nauka a teoria informacji.* PWN, Warszawa 1969. [Str. 33.]
[7] Zbigniew Osiak: *Ilustrowany Słownik Fizyki.* Będzie dostępny w wersji elektronicznej.