Proof for the Four Color Theorem(4CT)

4색정리 증명

정수환, 여준호

Suehwan Jeong, Junho Yeo

teamSpeculation@gmail.com

Abstract

The Four Color Theorem(4CT) is the theorem stating that no more than four colors are required to color each part of a plane divided into finite parts so that no two adjacent parts have the same color. It was proven in 1976 by Kenneth Appel and Wolfgang Haken, but here we will prove 4CT without Computer Resources. We can display the picture to color as a graph, using nodes that are the points that represent each figure in the picture, and stects which is lines that links two nodes neighboring each other. We proved that every picture to be colored can be expressed as a liner graph, made up only with nodes and stects that have the shape of straight lines. We will name the triangle made of nodes and stects that contains other nodes and stect, 'Triangular Convex Cell'. Also, we will call the graph that has the Triangular Convex Cell and also has the form of a convex set, a 'Triangular Convex Cell graph'. The Euler characteristic in plane graph is 1, so if we regard the numver of the node v, the number of the stect e, and the number of the sides made by nodes and stects f, the equation $v - e + f = 1$is established. Using this, we can derive the result that the graph with the highest total connection strength, which is the number of the connected graphs of each node in the graph, is a triangular-convex graph. Now, we prove the Triangular Convex Cell graph prove The Four Color Theorem regardless of how many nodes there are in the Triangular Convex Cell, or it's arranged shape. We can use this to colorize a huge Triangular Convex Cell graph in which there are ∞ nodes inside the Triangular Convex Cell, and delete the nodes and the stects of the graph as needed to fit the picture to be colored. Thus, by using this method, it can be seen that the Four Color Theorem holds for all the pictures.

초록

4색정리(The Four Color Theorem, 4CT)란 평면을 유한 개의 부분으로 나누어 각 부분에 색을 칠할 때, 서로 맞닿은 부분을 다른 색으로 칠한다면 어떠한 그림(지도)이든 최대 4개의 색까지만 사용하면 조건에 맞게 색칠이 가능하다는 정리이다. 4색정리는 케네스 아펠(Kenneth Appel)과 볼프강 하펜(Wolfgang Haken)에 의해 1976년에 증명되었으나, 여기서 우리는 컴퓨터 자원(Computer Resources) 없이도 4색정리를 증명하는 방법에 대해서 기술할 것이다. 그림의 각 도형을 대표하는 점인 노드(Node)와 서로 인접한 두 도형을 두 노드를 이어서 표시하는 선인 스텍트(Stect)를 사용하여 색칠할 그림을 그래프(Graph)로 표현한 뒤, 모든 그림은 그래프 중에서도 노드와 직선의 형태를 지닌 스텍트만으로 구성된 선형그래프로 표현 가능하다는 것을 증명한다. 볼록집합(Convex Set)의 형태를 하는 그래프에서, 다른 모든 노드들을 내부에 포함할 수 있는 노드와 스텍트로 이루어진 삼각형을 삼각볼록포(Triangular Convex Cell)라고 하고 삼각볼록포의 내부에 노드와 스텍트가 갇힌 형태의 그래프를 삼각볼록포의 형태를 하는 그래프라고 하겠다. 평면 그래프에서의 오일러의 지표(Euler Characteristic)는 1이므로 노드의 수를 v, 스텍트의 수를 e, 면의 수를 f라고 하면 $v - e + f = 1$의 식이 성립한다. 이를 이용하면 선형 그래프 중에서 그래프에서의 각 노드의 연결강도의 총합이 가장 높은 형태의 그래프는 삼각볼록포 형태의 그래프라는 결과가 도출된다. 삼각볼록포 형태의 그래프에서의 삼각볼록포 안에서 몇 개의 노드가 더 생기든지에 상관없이 4색으로 정리가 능하다는 것을 증명한다. 이를 바탕으로 삼각볼록포 내부에 노드가 ∞개 존재하는 거대한 삼각볼록포 형태의 그래프를 우선 색칠해두고, 필요에 따라 그래프의 노드와 스텍트를 삭제하여 모든 그림을 표현할 수 있으므로 모든 그림은 4색으로 색칠이 가능하다.

Ⅰ. 4색정리(四色定理, Four color theorem)란?

평면을 유한 개의 부분으로 나누어 각 부분에 색을 칠할 때, 서로 맞닿은 부분을 다른 색으로 칠한다면 어떠한 그림(지도)이든 최대 4개의 색까지만 사용하면 조건에 맞게 색칠이 가능하다는 정리

Ⅱ. 증명에 사용할 용어

그림에서 분할된 도형을 각각 대표하는 점을 찍는다. 이 점을 노드(node)라고 하며, 그림에서의 한 노드 A가 대표하는 도형을 '노드 A의 도형'이라고 한다.

분할된 도형들 중 서로 인접한 두 도형은 각 노드를 선으로 이어서 표시한다. 이때 노드를 잇는 선들을 스텍트(stect)[1]라고 하며, 그림에서의 두 노드 노드 A와 B를 잇는 스텍트를 '스텍트 AB'라고 한다.

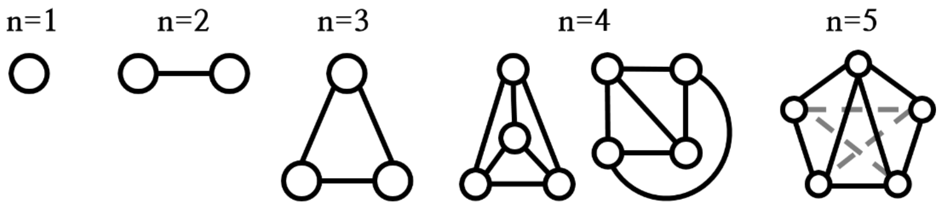
스텍트는 직선과 곡선의 모든 형태를 지닐 수 있으며, 그림을 도형으로 분할하는 선의 위에 걸쳐져 있도록 그려진다.

직선의 형태를 지닌 스텍트를 선형 스텍트, 곡선의 형태를 지닌 스텍트를 비선형 스텍트라고 한다.

노드와 스텍트만으로 이루어진 그림은 하나의 그래프(graph)라고 한다.

노드와 선형 스텍트만으로 이루어진 그래프는 선형그래프라고 하고, 선형그래프 이외의 모든 그래프는 비선형 스텍트가 하나 이상 존재하는 그래프이므로 비선형그래프라고 한다.

노드의 개수(=그림이 분할된 도형의 개수)가 n개일 때, 모든 도형이 서로 다른 색이려면 그래프의 n개의 노드에서의 한 노드는 다른 모든 노드 n−1개와 스텍트를 통해서 연결되어야 한다. 즉, 4색정리의 조건을 위배하기 위해서는(4색정리가 false라면) $n \geq 5$일 때 그래프의 모든 노드가 서로에게 연결되어야 한다. 단, 이때 그래프의 한 스텍트는 다른 스텍트와 노드가 아닌 곳에서 교차해서는 안 된다.



[그림 1]

[그림 1]에서처럼 n=5인 경우에서 그래프의 한 스텍트가 다른 스텍트와 노드가 아닌 곳에서 교차하지 않도록 하면서, 그래프의 한 노드가 자기자신을 제외한 4개의 다른 노드와 연결되는 구조를 만드는 것은 불가능하다.

아래에서 다음과 같은 용어를 사용하겠다.

①갇힌노드: 그래프에서 다른 어떤 노드와 스텍트로 구성된 도형에 갇혀서 더 이상 다른 노드와 연결이 불가능한 노드

②동질노드: 그래프의 한 갇힌노드에 대해 그 갇힌노드와 인접하지 못하므로 색을 공유하는 노드

③성공노드: 그래프에 있는 노드 중 자신을 제외한 모든 n−1개의 노드와 연결된 노드

---

[1] 스텍트는 '접하다'를 뜻하는 'intersect'와 '끈'을 의미하는 'string', 두 단어를 합성한 단어로 그래프에서 노드와 노드를 잇는 선을 뜻한다. 기존 그래프 구조(graph structure)에서의 링크(link)가 노드와 노드를 직선으로 이었다면, 스텍트는 선형 말고도 노드와 노드를 곡선으로 이를 수 있다는 점(비선형 연결이 가능하다는 점)에서 링크와 구분되는 새로운 개념이다.

④연결강도: 그래프에서의 한 노드가 다른 노드들과 얼마나 인접해 있는지, 즉 얼마나 스텍트로 연결되어 있는지의 정도

볼록집합(convex set)은 모든 원소를 포함하는 원소들의 집합 X를 뜻한다.

볼록집합의 형태를 하는 그래프에서, 다른 모든 노드들을 내부에 포함할 수 있는 노드와 스텍트로 이루어진 도형을 볼록포(convex cell)라고 하겠다.

삼각형의 형태를 지니는 볼록포는 삼각볼록포(triangular convex cell)이라고 하고, 삼각볼록포의 내부에 노드와 스텍트가 갇힌 형태의 그래프는 삼각볼록포의 형태를 가진 그래프라고 하겠다.

Ⅲ. 증명 순서

ⅰ) 모든 그림은 선형그래프로 표현 가능하다는 것을 증명

ⅱ) 모든 그림 형태를 그래프로 표현시 스텍트 개수가 가장 많은 것(그래프의 모든 노드의 연결강도의 합이 가장 높은 경우)은 삼각볼록포 형태의 그래프라는 것을 증명

ⅲ) 삼각볼록포 형태의 그래프에서 몇 개의 노드가 더 추가되던지에 상관없이 4색으로 색칠 가능하다는 사실을 증명

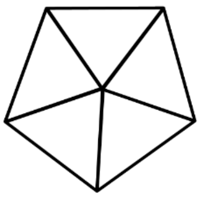
ⅳ) 무수히 많은 노드에 대해 4색으로 색칠 가능하다는 것이 성립

ⅴ) 가장 많은 면이 인접한 경우에도 4색으로 정리 가능하니 Q.E.D.

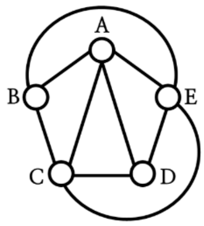
Ⅳ. 그림을 비선형그래프로 표현하는 방법

ⅰ) 그림에서 각 도형을 대표하는 노드를 표시하고, 그림에서 서로 인접한 면이 존재하는 도형의 노드끼리 스텍트를 잇는다.

ⅱ) 그래프의 노드의 연결강도가 높은 순서대로 다른 n-1개의 노드와 연결되는 성공노드로 만드는 것을 시도한다. 시도 과정에서 추가한 스텍트는 원래 그림에서 인접한 도형의 노드를 연결한 스텍트가 아니라, 색칠 과정에서 참고하기 위해서 추가되는 스텍트이므로 색칠이 완료되면 지운다.



[그림 2-1]



[그림 2-2]

위 방법을 사용하여 [그림 2-1]의 그림을 [그림 2-2]와 같은 비선형그래프로 변형시켜 보겠다.

먼저, [그림 2-1]의 그림에서 각 도형을 대표하는 노드 A, B, C, D, E를 표시하고, 그림에서 한 노드의 도형은 양옆에 있는 다른 두 노드의 도형과 인접한 위치에 있으므로 스텍트 AB, BC, CD, DE, AE를 표시한다.

그래프의 모든 노드의 연결강도가 2로 동일하므로 먼저 노드 A가 성공 노드가 되도록(다른 4개의 노드와 연결되도록) 스텍트 AC, AD를 표시할 수 있다.

다음으로 그래프에서 연결강도가 높은 노드는 연결강도 3의 노드 C, D이다.

노드 C가 성공노드가 되려면 이미 노드 B, A, D와 연결되었으므로 노드 E와 연결되어야 하는데, 오각형 ABCDE

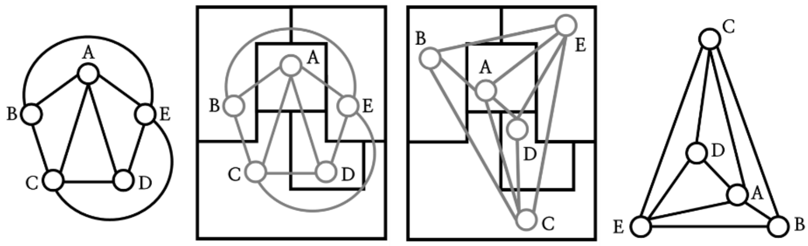
의 안쪽에는 스텍트 AD가 노드 C가 노드 E와 연결되는 것을 가로막고 있으므로 오각형의 외곽으로 스텍트를 그려야 한다. 즉 [그림 2-2]에서처럼 스텍트 CE를 표시한다. 이때 노드 D도 성공노드가 되기 위해서 노드 B와 연결되어야 하는데 노드 D는 도형 AECD에 갇혀있길에 도형의 밖에 존재하는 노드 B에게는 닿을 수 없다. 그러므로 노드 D의 도형은 노드 B의 도형과 인접하지 않게 된다.

다음으로 연결강도가 3으로 높은 노드인 노드 E는 노드 B와 연결되어야 하므로 스텍트 BE를 표시하여 연결한다.

노드 B는 노드 D와 연결되어야 하지만, 노드 D가 갇힌노드이므로 스텍트로 연결되는 것이 불가능하다.

따라서 [그림 2-2]와 같은 그래프가 생성된다.

Ⅴ. 모든 그림은 선형그래프로 표현가능하다는 것을 유도



[그림 3-1] [그림 3-2] [그림 3-3] [그림 3-4]

[그림 3-1]의 그래프는 [그림 3-2]와 같은 그림으로 형상화할 수 있다.

[그림 3-1]에서의 그래프를 선형그래프로 바꾸려면 스텍트 BE, CE가 선형 스텍트의 형태를 취해야 하는데, 그래프에서의 한 스텍트는 다른 스텍트와 노드가 아닌 곳에서 교차해서는 안되므로 [그림 3-2]와 같이 노드가 위치하는 경우에는 선형그래프로 표현이 불가능하다.

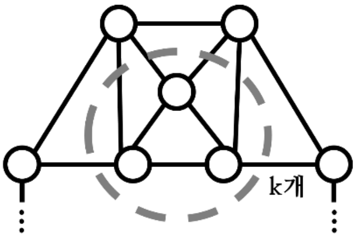
[그림 3-3]과 같이 도형 A, D를 대표하는 노드 A, D의 위치를 옮긴 뒤, 스텍트 BC, BE, CE의 안쪽에 존재하는 모든 3개의 노드와 스텍트로 이루어진 영역을 선형삼각형의 형태로 변형시켜 [그림 3-4]와 같이 선형그래프인 삼각볼록포 형태의 그래프를 그릴 수 있다.

따라서, 모든 그림의 그래프는 그림이 분할된 각 도형을 대표하는 노드의 위치를 옮긴 뒤 가장 바깥쪽에 있는 세 스텍트를 삼각볼록포의 외곽삼각형의 세 변으로 두고 그래프 안쪽에 존재하는 모든 3개의 노드와 스텍트로 이루어진 영역을 선형삼각형의 형태로 변형시키는 방법으로 선형그래프로 변형가능하다.

즉, 모든 그림은 노드와 선형 스텍트만을 사용해서 표현이 가능하다.

Ⅵ. 삼각볼록포 유도

그래프에서의 노드의 총 개수를 v, 스텍트의 총 개수를 e, 그래프가 노드와 스텍트로 인해 분할된 그래프에서의 면의 개수를 f라고 하면 오일러의 정리인 $v - e + f = 1$이 성립한다.



[그림 4]

[그림 4]와 같이 볼록포 내부에 k개의 노드가 있다고 하자. 삼각형이 f개면 존재하는 모든 각도의 합은 180f° 이다. 볼록포는 $(n-k)$각형이므로 볼록포의 내각의 합은 $180(n-k-2)$이다. 또한 내부의 각 노드가 발생시키는 각도는 360° 이므로 360k이다. 따라서 아래 식이 성립한다.

$$180f = 180(v-k-2) + 360k$$

위 식을 정리하면 $f = k + v - 2$

$$\begin{cases} v - e + f = 1 \\ f = k + v - 2 \end{cases}$$

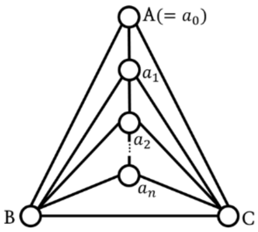
두 식을 위와 같이 연립하면 $2v = 3 + e - k$

위 식에서 v가 고정되었을 때 e가 최대한 발생(그래프의 연결강도가 최대가 되도록 연결해야 하므로 그래프의 스텍트(연결)이 많아야 함)해야 한다. 그러려면 f가 최대로 많아져야 한다.

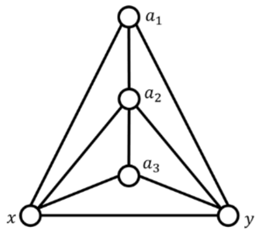
$e = \max$라면 $-k = \min$이 되어야 한다. 따라서 k는 최대가 되어야 하고 그러려면 더 이상 나누지 못하는 도형인 삼각형의 형태로 모든 노드를 이어야 한다. 따라서 선형 그래프 중에서 그래프에서의 각 노드의 연결강도의 총합이 가장 높은 그래프의 형태는 삼각볼록포이다.

즉, 이와 같이 그림이 분할된 모든 도형이 최대로 인접하는 경우는 모두 노드와 선형 스텍트만으로 이루어진 선형그래프로 표현 가능하고, 각 경우에서 필요에 따라 노드를 지우거나 스텍트를 지움으로서 모든 그림을 표현할 수 있다.

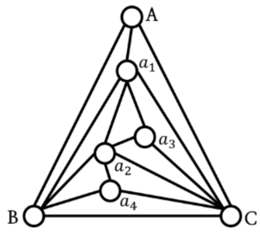
Ⅶ. 삼각볼록포 안에서 몇 개의 노드가 더 생기든지에 상관없이 4색으로 정리가능함



[그림 5-1]



[그림 5-2]



[그림 5-3]

$$\begin{cases} \text{노드 A, } a_2\text{의 도형의 색} \\ \text{노드 B, } a_3\text{의 도형의 색} \\ \text{노드 C의 도형의 색} \\ \text{노드 } a_1,\ a_4\text{의 도형의 색} \end{cases}$$

[그림 5-4]

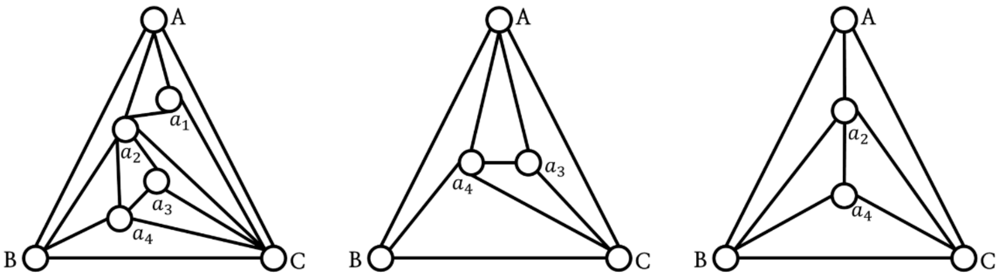
[그림 5-1]과 같은 삼각볼록포 형태의 그래프가 있을 때, 노드 a_0를 포함한 노드 a_2, a_4, a_6⋯의 a_{2k}꼴 노드들은 서로 인접하지 않으므로 같은 한 가지 색으로 칠해질 수 있으며, 노드 a_1, a_3, a_5⋯의 a_{2k-1}꼴 노드들 역시 서로 인접하지 않으므로 같은 색으로 칠해질 수 있다. 즉, 노드 A의 도형의 색(= a_{2k}꼴 노드들의 도형의 색), a_{2k-1}꼴 노드들의 도형의 색, 노드 B의 도형의 색, 노드 C의 도형의 색의 4가지 색을 사용하여 4색으로 정리가능하다.

[그림 5-2]와 같이 삼각형 a_2xy 내부에 노드 a_3가 추가되면 노드 a_1의 도형과 노드 a_3의 도형의 색을 같게 색칠한다. 이 규칙을 적용한다.

[그림 5-3]과 같은 삼각볼록포 형태의 그래프에서도 역시 [그림 5-4]와 같이 4색으로 정리가능하다.

따라서 삼각볼록포 형태의 그래프에서 삼각볼록포의 내부에 몇 개의 노드가 추가되더라도 모두 4색으로 정리가능하다.

Ⅷ. 모든 그림은 4색으로 색칠가능함



[그림 6-1] [그림 6-2] [그림 6-3]

[그림 6-1]과 같은 삼각볼록포 형태의 그래프에서 노드 a_1, a_2와 노드 a_1, a_2에 연결된 모든 스텍트를 삭제하면 [그림 6-2]와 같은 그래프가 된다. [그림 6-1]의 그래프에서 노드 a_1, a_3와 노드 a_1, a_3에 연결된 모든 스텍트를 삭제하면 [그림 6-3]과 같은 그래프가 된다.

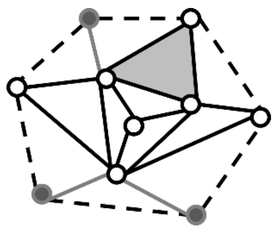
위와 같은 방법으로 [그림 6-1]의 삼각볼록포 형태의 그래프에서 필요에 따라 노드와 스텍트를 제거하여 여러 형태를 가지는 그림을 표현할 수 있다.

마찬가지 방법으로, 삼각볼록포 내부의 노드가 $\lim_{k\to\infty} k$개인 삼각볼록포 형태의 그래프에서 필요에 따라 노드와 스텍트를 삭제하여 모든 그림을 삼각볼록포 형태의 그래프로 표현할 수 있다.

또한 이전에서 삼각볼록포 형태의 그래프에서 삼각볼록포 내부에 몇 개의 노드가 추가되더라도 모든 삼각볼록포는 4색정리의 조건에 맞게 색칠할 수 있음을 증명했으므로 $k = \infty$일 때도 색칠이 가능하다.

따라서, k가 ∞개 존재하는 거대한 삼각볼록포 형태의 그래프를 우선 색칠해두고, 필요에 따라 그래프의 노드와 스텍트를 삭제하여 모든 그림을 표현할 수 있으니 모든 그림은 4색으로 색칠 가능하다.

Appendix A. 오일러의 정리(v-e+f=1 유도증명)



[그림 A]

[그림 A]에서의 그래프에서 점의 수를 v, 선의 수를 e, 그래프 안에서 점과 선으로 이루어진 면의 수를 f라고 하자.

ⅰ) [그림 A]의 그래프에서 점선으로 표시된 선을 없애면 그래프에서 점과 선으로 이루어진 삼각형이 하나씩 줄어들므로 e와 f값도 1씩 감소한다. 즉, $v - e + f$의 값에 변화가 없다.

ⅱ) [그림 A]의 그래프에서 회색으로 표시된 점과 선을 없애면, 즉 면을 구성하지 않는 점과 선을 없애면 v와 e값이 1씩 감소하므로 역시 $v - e + f$의 값에 변화가 없다.

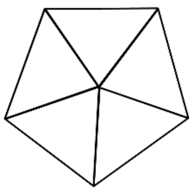
ⅲ) [그림 A]의 그래프에서 회색으로 표시된 면을 이루는 점과 선을 없애면 v값이 1 감소하고, e값이 2 감소하며, f

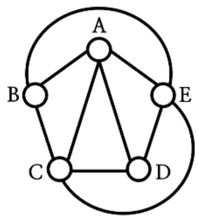
값이 1 감소하므로 $v - e + f$의 값에 변화는 없다.

ⅳ) 위와 같은 방법으로 계속 점과 선을 없애면 세 점과 선으로 이루어진 삼각형이 남는데, 이때 $v = 3$, $e = 3$, $f = 1$이므로 $3 - 3 + 1 = 1$, 즉 $v - e + f = 1$이 성립한다.

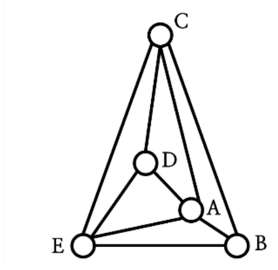
만약 [그림 A]에서의 내부의 선을 한 개 없애면 면 2개가 하나로 합쳐지므로 e값과 f값이 1씩 감소하므로 $v - e + F$의 값은 변화하지 않는다.

Appendix B. 적용 예

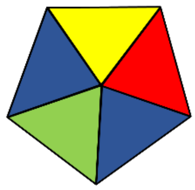

[그림 B-1]



[그림 B-2]



[그림 B-3]


[그림 B-4]

위에서의 방법에 따라 [그림 B-1]의 그림을 4가지 색을 사용하여 색칠하겠다.

그래프에서 스텍트 AC, AD, BE, CE는 색칠을 위해 임시로 표시한 스텍트이므로 색칠이 끝나면 제거한다.

[그림 B-2]의 그래프는 노드 B, C, E를 세 꼭짓점으로 하고 스텍트 BC, BE, CE를 세 변으로 하는 삼각볼록포를 가지는 [그림 B-3]과 같은 선형 그래프로 변환된다.

[그림 B-3]의 그래프에서 노드 B, D는 동질 노드이므로 [그림 B-4]와 같이 노드 A의 도형의 색, 노드 B, D의 도형의 색, 노드 C의 도형의 색, 노드 D의 도형의 색, 노드 E의 도형의 색의 총 4색으로 색칠이 가능하다.