Cohomologie à automorphisme

A.Balan

9 juillet 2017

Résumé

Une cohomologie est définie sur une variété à partir des formes extérieures et d'un automorphisme.

1 Définition

On considère une différentielle [GHL] twistée par un automorphisme ϕ de l'espace tangent :

$$d^\phi f(X) = \phi^{-1}(X).f = d(f)(\phi^{-1}(X))$$

pour f une fonction ; et pour α, une 1-forme :

$$d^\phi \alpha(X,Y) = X.\alpha(\phi(Y)) - Y.\alpha(\phi(X)) - \alpha(\phi([X,Y])$$

$$d^\phi \alpha(X,Y) = d(\alpha \circ \phi)(X,Y)$$

Un calcul facile montre que $d^\phi \circ d^\phi(f) = 0$.

De plus, on définit d^ϕ pour les formes extérieures par la règle de Leibnitz suivante :

$$d^\phi(\alpha \wedge \beta) = d^\phi(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{deg(\alpha).\deg(\beta)} \alpha \wedge d^\phi(\beta)$$

2 La cohomologie à automorphisme

On considère la cohomologie [S] des formes extérieures, sachant que l'on a (par récurrence) :

$$d^\phi \circ d^\phi = 0$$

Définition 1 *La cohomologie à automorphisme est :*

$$H^*_\phi = Ker(d^\phi)/Im(d^\phi)$$

C'est un invariant topologique de la variété que l'on considère ; une forme fermée est exacte localement.

Références

[GHL] S.Gallot, D.Hulin, J.Lafontaine, "Riemannian Geometry", Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[S] R.Switzer, "Algebraic Topology-homotopy and homology", Springer-Verlag, Berlin, 2002.