Безмашинное решение проблемы четырех красок

Саенко В.И.
73026, Украина г. Херсон, ул. Привокзальная 12, кв. 71, E-mail: saenkovis@gmail.com

MSC 51H10, 51H20

Памяти моей жены Бендебери О.И.,
инициатора и вдохновителя этой работы

Аннотация

Доказано, что неприводимая по Франклину карта состоит из 5 областей и, как следствие, для раскраски любой карты на сфере достаточно 4 цвета.

Введение

Минимальное число цветов, необходимых для раскраски любой карты на данной замкнутой поверхности эквивалентна нахождению хроматического числа соответствующего графа, вложимого в эту поверхность. Хроматическое число графа $\chi(S_p)$ и род ориентируемой поверхности его вложения p связано простым соотношением

$$\chi(S_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \tag{1}$$

где $[x]$ есть наибольшее целое, не превосходящее x.
Однако, с традиционным (аналитическим) доказательством (1) для $p > 0$ [1], явно диссонирует нетрадиционное (машинное, программное, не аналитичное) доказательством для $p = 0$ [2, 3]
Цель этой работы, устранить этот диссонанс.
Будем исходить из того что Франклин [4] показал, что в проблеме четырех красок, без потери общности, можно ограничиться регулярными и неприводимыми картами. Регулярными в том смысле, что любая точка пересечения границ областей принадлежит трем и только трем линиям границ. Неприводимыми, в том смысле, что если карта из $n + 1$ областей требует 5 цветов для своей раскраски, то любая ее часть из n областей раскрашивается в 4 цвета. Далее он доказал, что на сфере такая карта, если существует, содержит более 24 областей.
Учитывая, что регулярность и неприводимость карт по Франклину не связаны с родом поверхности, докажем лемму

Лемма

Неприводимая по Франклину карта состоит из 5 областей

Доказательство

Предположим обратное, существует карта из $n+1>24$ областей, требующая 5 цветов для своей раскраски и любая ее часть из n областей может быть раскрашена в 4 цвета. Обозначим любую выбираемую область такой карты v_0 а множество областей оставшейся части $V=\{v_i\},(i=1..n)$. На множестве V задано симметричное, не рефлексивное и не транзитивное отношение "сосед" $v_jSv_k,(\{j\neq k\}\in\{i\})$. Как следствие, задано и альтернативное отношение "не сосед" $v_j\bar{S}v_{\bar{k}},(\{j,\bar{k}\}\in\{i\})$ (так же симметричное и не транзитивное, но рефлексивное).
Из неприводимости карты следует, что v_0 всегда граничит с $m_0\geq 4$ областями. При этом есть два варианта раскрасок:
1) "Правильные" , когда V раскрашено в 4 цвета и все они представлены на границе с v_0, и
2) "Не правильные " , все остальные, когда на границе с v_0, например, представлены 2 цвета ($m_0=2t$) или 3 цвета ($m_0=2t+1$), но для раскраски V требуется 5-й цвет.
Оба варианта фактически представляют некие разбиения множества V на классы по отношению "не сосед" $\bar{S}$.
Зададим такое же, но более определенное разбиение на классы:
1) Класс K_1 образуем как последовательное объединение произвлльного $k_1=v_i$ с $k_2=v_j,(v_i\bar{S}v_j)$, затем с $k_3=v_f,(\{v_i,v_j\}\bar{S}v_f)$, и так далее, до исчерпания элементов.
2) Аналогично, класс K_2 образуем из множества V/K_1.
Продолжая образования классов мы всегда получим либо "правильные" 4 класса, либо "не правильные" 5 классов, но не их комбинацию. Поскольку "правильная" раскраска в 4 цвета заведомо существует, то раскраска в 5 цветов не существует, и для вариантов "неправильной" раскраски так же достаточно 4 цветов. Но тогда V раскрашено в 4 цвета и на границе с v_0 только 2 или 3 цвета, тоесть, и для v_0 не требуется 5-й цвет.
Следовательно, чтобы исходная карта была 5 цветной, области на границе с произвольной областью v_0 всегда содержат 4 цвета. Тоесть, каждая область v_0 граничит $m_0\geq 4$ областями, из которых 4 граничат друг с другом. Остальные области карты избыточны и могут быть отброшенными.
Лемма доказана.

Выводы

Из доказанной Леммы, непопосредственной проверкой получим, что неприводимая 5 цветная карта на сфере не возможна, и, следовательно, для раскраски любой карты на сфере достаточно 4 цвета.

Список литературы

[1] G.Ringel, Map Color Theorem, Springer-Verlag, New York, 1974

[2] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, Illinois J. Math. 21 (1977), 429-490.

[3] K. Appel, W. Haken and J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, Illinois J. Math. 21 (1977), 491–567.

[4] Philip Franklin, The Four Color Problem. American Journal of Mathematics, Vol. 44, No. 3 (Jul., 1922), pp. 225-236