La Función Zeta como un caso particular de la fórmula de Euler-Maclaurin

Ing. Marco Rolando Burgos Chambi

Noviembre 11 de 2022

Resumen

Una de las funciones más famosas y llenas de enigmas es la función zeta de Riemann, ya que es la base de una de las hipótesis más sorprendentes por su relación con la función contadora de primos. Pero en este trabajo, revelaremos algunos de esos enigmas, utilizando la fórmula de Euler-Maclaurin.

Tabla de contenido

1. Introducción.

1.1. Definición de la función Zeta de Riemann.

La función Zeta de Riemann es una función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida como:

$$\zeta(s) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \tag{1}$$

donde: $s \in \mathbb{C}$

Esta serie converge cuando $Re[s] > 1$

Riemann consiguió darle continuidad analítica, obteniendo la ecuación funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{2}$$

Esta función tiene un único polo en $\zeta(1)$.

1.2. Fórmulas para determinados casos de la función zeta de Riemann.

Ademas de la ecuación funcional, se conocen dos formulas para obtener zeta, una para valores pares de s, y la otra para valores enteros negativos de s:

Sea: $s = 2k, k \in \mathbb{N}$

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \tag{3}$$

Sea $s = -k, k \in \mathbb{N}$

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \tag{4}$$

Donde: B_{2k} y B_{-k} son números de Bernoulli.

2. Suma de potencias y los números de Bernoulli.

Los números de Bernoulli B_j son un conjunto de números racionales sucesivos con importancia relevante en la teoría de números. Aparecen en *Combinatoria*, en la expansión de las funciones tangentes y la tangente hiperbólica por series de Taylor, y la ecuación de Euler Maclaurin.

Una de las formas de obtener estos números es a través de la suma recursiva:

$$B_j = -\frac{1}{1+j} \sum_{m=0}^{j-1} \binom{1+j}{m} B_m \tag{5}$$

Los números de Bernoulli aparecen cuando deseamos encontrar una función para calcular una suma de potencias. Su formula fue obtenida por primera vez Jakob Bernoulli, y a continuación se describe la formula, pero algo refinada y con nomenclatura actual.

$$\sum_{m=1}^{n} m^k = S_k(n) = \sum_{p=1}^{1+k} A_p n^p \tag{6}$$

Donde: $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *y* S_k *es una función de* n.

Y A_p es obtenido por:

$$A_p = \frac{(-1)^{1+k-p}}{1+k} \binom{1+k}{p} B_{1+k-p} \tag{7}$$

3. Suma de potencias como una suma de derivadas de orden superior.

En esta sección vamos a reordenar la ecuación (6), y la compararemos con una suma de derivadas de orden superior de la función m^k.

Al factorizar $\frac{1}{1+k}$ y desarrollando la sumatoria de la ecuación (6) para encontrar $S_k(n)$ se obtiene:

$$S_k(n) = \frac{1}{1+k}\left[\frac{(-1)^k(k+1)!}{1!k!}B_k n + \frac{(-1)^{k-1}(k+1)!}{2!(k-1)!}B_{k-1}n^2 + \frac{(-1)^{k-2}(k+1)!}{3!(k-2)!}B_{k-2}n^3 + \right.$$
$$\left. \frac{(-1)^{k-3}(k+1)!}{4!(k-3)!}B_{k-3}n^4 + \cdots + \frac{(-1)^1(k+1)!}{k!1!}B_1 n^k + \frac{(-1)^0(k+1)!}{(k+1)!(0)!}B_0 n^{k+1}\right]$$

Ahora invertiremos el orden de los sumandos, y simplificaremos reduciendo los factoriales de cada termino:

$$S_k(n) = \frac{1}{1+k}\left[\frac{(-1)^0(k+1)!}{(k+1)!0!}B_0 n^{k+1} + \frac{(-1)^1(k+1)!}{k!1!}B_1 n^k + \frac{(-1)^2(k+1)!}{(k-1)!2!}B_2 n^{k-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(-1)^k(k+1)!}{1!k!}B_k n\right]$$

$$S_k(n) = \frac{1}{1+k}\left[\frac{(-1)^0(k+1)!}{(k+1)!0!}B_0 n^{k+1} + \frac{(-1)^1 k!(k+1)}{k!1!}B_1 n^k + \frac{(-1)^2(k-1)!k(k+1)}{(k-1)!2!}B_2 n^{k-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(-1)^k(k+1)!}{1!k!}B_k n\right]$$

$$S_k(n) = \frac{1}{1+k}\left[\frac{(-1)^0}{0!}B_0 n^{k+1} + \frac{(-1)^1(k+1)}{1!}B_1 n^k + \frac{(-1)^2 k(k+1)}{2!}B_2 n^{k-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(-1)^k(k+1)!}{1!k!}B_k n\right]$$

Es posible reescribir la formula como una sumatoria de una productoria incluida:

$$\sum_{m=1}^{n} m^k = S_k(n) = \frac{1}{1+k}n^{k+1} + \sum_{p=2}^{1+k}\frac{(-1)^{p-1}B_{p-1}}{(1+k)(p-1)!}\prod_{m=1}^{p-1}(2+k-m)n^{2+k-p} \tag{8}$$

Si somos observadores, es posible obtener una formula equivalente con una sumatoria donde se incluyen derivadas de orden superior de la función n^k de la siguiente manera:

$$\sum_{m=1}^{n} m^k = S_k(n) = \int n^k dn + \sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p B_p}{(p)!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(n^k\right) \tag{9}$$

O también:

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{-k}} = S_{-k}(n) = \int \frac{1}{n^{-k}}dn + \sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p B_p}{(p)!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(\frac{1}{n^{-k}}\right) \tag{10}$$

Por lo que podemos decir que las ecuaciones (8), (9) y (10), son equivalentes.

4. La formula de Euler–Maclaurin y la Función Zeta de Riemann.

Dada la conocida formula de Euler-Maclaurin [1], para aproximar la suma de una función $f(m), \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y es q veces derivable:

$$\sum_{m=a+1}^{b} f(m) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p B_p}{p!}\left[f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)\right] + r_q \tag{11}$$

Donde:

$$r_q = (-1)^q \int_0^n \frac{B_{q+1}(m - \lfloor m \rfloor)}{(q+1)!} f^{(q+1)}(m) dm \tag{12}$$

$f^{(p-1)}(b)$ y $f^{(p-1)}(a)$ son la derivada de orden $p-1$ de la función $f(m)$ evaluadas en b, y a respectivamente, y r_q *es el error residual de la aproximación a la q-esima derivación.* $B_j(x)$ es un polinomio de Bernoulli obtenido por la siguiente formula:

$$B_j(x) = \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \binom{j}{m} B_m x^{j-m} \tag{13}$$

Si definimos los limites de la sumatoria de la ecuación (11) en $a = 0$ y $b = n$, y definimos la función $f(m) = m^s$, siendo f una función compleja, pero de variable real, $m \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{C}$, siendo $f(m)$ q veces derivable, se obtiene:

$$\sum_{m=1}^{n} m^s = \int_0^n m^s dm + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dm^{p-1}} (m^s) \Big|_0^n + r_q \tag{14}$$

Donde $s \in \mathbb{C}$.

Si se suman los limites iniciales de la integral y las derivadas, y los acumulamos al error residual, podemos escribir:

$$\sum_{m=1}^{n} m^s = \int n^s dn + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}} (n^s) + R_q \tag{15}$$

Donde R_q es el error residual total acumulado.

Del mismo modo se puede obtener una expresión para la suma de la función $f(m) = \frac{1}{m^s}$:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} = \int \frac{1}{n^s} dn + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}} \left(\frac{1}{n^s}\right) + R_q \tag{16}$$

Donde $s \in \mathbb{C}$.

Si $n \to \infty$, y si consideramos R_q como una función de s entonces se puede escribir $R_q(s)$ despejando de la ecuación (16):

$$R_q(s) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} - \int \frac{1}{n^s} dn - \sum_{p=1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}} \left(\frac{1}{n^s}\right) \right] \tag{17}$$

Donde $s \in \mathbb{C}$.

Al desarrollar la Ecuación (17) se obtiene:

$$R_q(s) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} - \left(\frac{1}{1-s} n^{1-s} + \frac{(-1)^1 B_1}{1!} n^{-s} + \frac{(-1)^2 B_2}{2!} (-s) n^{-1-s} + \frac{(-1)^3 B_3}{3!} (-s)(-1-s) n^{-2-s} + \cdots \right) \right] \tag{18}$$

Donde $s \in \mathbb{C}$.

Ahora analizaremos 3 casos para la ecuación (18)

Caso I. Sea $Re[s] > 1$, aplicando el límite se obtiene:

$$R_q(s) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} - \left(\frac{1}{1-s} 0 + \frac{(-1)^1 B_1}{1!} 0 + \frac{(-1)^2 B_2}{2!} (-s) 0 + \frac{(-1)^3 B_3}{3!} (-s)(-1-s) 0 + \cdots \right) \right]$$

$$R_q(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \iff s > 1 \tag{19}$$

Por tanto, se puede concluir que: cuando $Re[s] > 1$ el valor de $R_q(s)$ es igual a $\zeta(s)$:

$$R_q(s) = \zeta(s) \iff Re[s] > 1, \ s \in \mathbb{C} \tag{20}$$

Caso II. Sea $s = 1$ aplicando el límite se obtiene:

$$R_q(1) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^1} - \left(\frac{1}{0} + \frac{(-1)^1 B_1}{1!} 0 + \frac{(-1)^2 B_2}{2!}(-1)0 + \frac{(-1)^3 B_3}{3!}(-1)(-1-1)0 + \cdots\right)\right]$$

$$R_q(1) = \infty - (\infty + 0 + 0 + 0 + \cdots)$$

$$R_q(1) = indeterminado$$

Por tanto se puede concluir que: cuando $s = 1$ el valor de $R_q(1)$ es indeterminado, y es igual a $\zeta(1)$:

$$R_q(1) = \zeta(1) \tag{21}$$

Caso III. Consideremos $s = -k$ donde $k \in \mathbb{N}$, se puede escribir la ecuación (17) separando la sumatoria en dos partes, la primera con limites para $p = 1$ hasta $p = k$, y la segunda sumatoria desde $p = k + 1$ hasta $p = q$ quedando la expresión de la siguiente manera:

$$R_q(-k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} m^k - \int n^k dn - \sum_{p=1}^{q=k} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(n^k\right) - \sum_{p=k+1}^{q} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(n^k\right)\right] \tag{22}$$

Se puede observar que la integral con la primera sumatoria son equivalentes a la ecuación (9), pero de signo negativo, por tanto se puede escribir:

$$R_q(-k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} m^k - \sum_{m=1}^{n} m^k - \sum_{p=k+1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(n^k\right)\right]$$

Las dos primeras sumatorias se cancelan quedando la expresión de la siguiente manera:

$$R_q(-k) = \lim_{n\to\infty} \left[-\sum_{p=k+1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(n^k\right)\right] \tag{23}$$

Luego, extendiendo la serie:

$$R_q(-k) = \lim_{n\to\infty} \left[-\left(\frac{(-1)^{k+1} B_{k+1}}{(k+1)!}(k!)n^0 + \frac{(-1)^{k+2} B_{k+2}}{(k+2)!}(k)(k-1)\cdots n^{-1} + \frac{(-1)^{k+3} B_{k+3}}{(k+3)!}(k)(k-1)\cdots n^{-2} + \cdots\right)\right]$$

Aplicando el límite, luego simplificando factoriales:

$$R_q(-k) = -\frac{(-1)^{k+1} B_{k+1}}{(k+1)!}(k!)$$

$$R_q(-k) = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1}$$

Como $B_{2j+1} = 0$ $j \in \mathbb{N}$ podemos escribir:

$$R_q(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \iff k \in \mathbb{N} \tag{24}$$

Si comparamos la ecuación (24) con la ecuación (4), podemos decir que son equivalentes, por tanto:

$$R_q(-k) = \zeta(-k) \iff k \in \mathbb{N} \tag{25}$$

Estamos listos para enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1 *De las ecuaciones (20), (21) y (25) por el principio de continuidad analítica se puede escribir:*

$$\zeta(s) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s} - \int\frac{1}{n^s}dn - \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(\frac{1}{n^s}\right)\right] \tag{26}$$

Donde: $s \in \mathbb{C}$, y q es el número de veces que se puede derivar la función $\frac{1}{n^s}$

5. Interpretación gráfica de la Función Zeta de Riemann.

Definamos la función $S^*_{-s}(n)$ como:

$$S^*_{-s}(n) \equiv \int\frac{1}{n^s}dn + \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(\frac{1}{n^s}\right) \tag{27}$$

Cuando se grafícan los puntos de la serie de puntos $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}$ en el plano complejo, se obtienen una serie de puntos ordenados en una espiral logarítmica, cuyo centro es el valor de $\zeta(s)$.

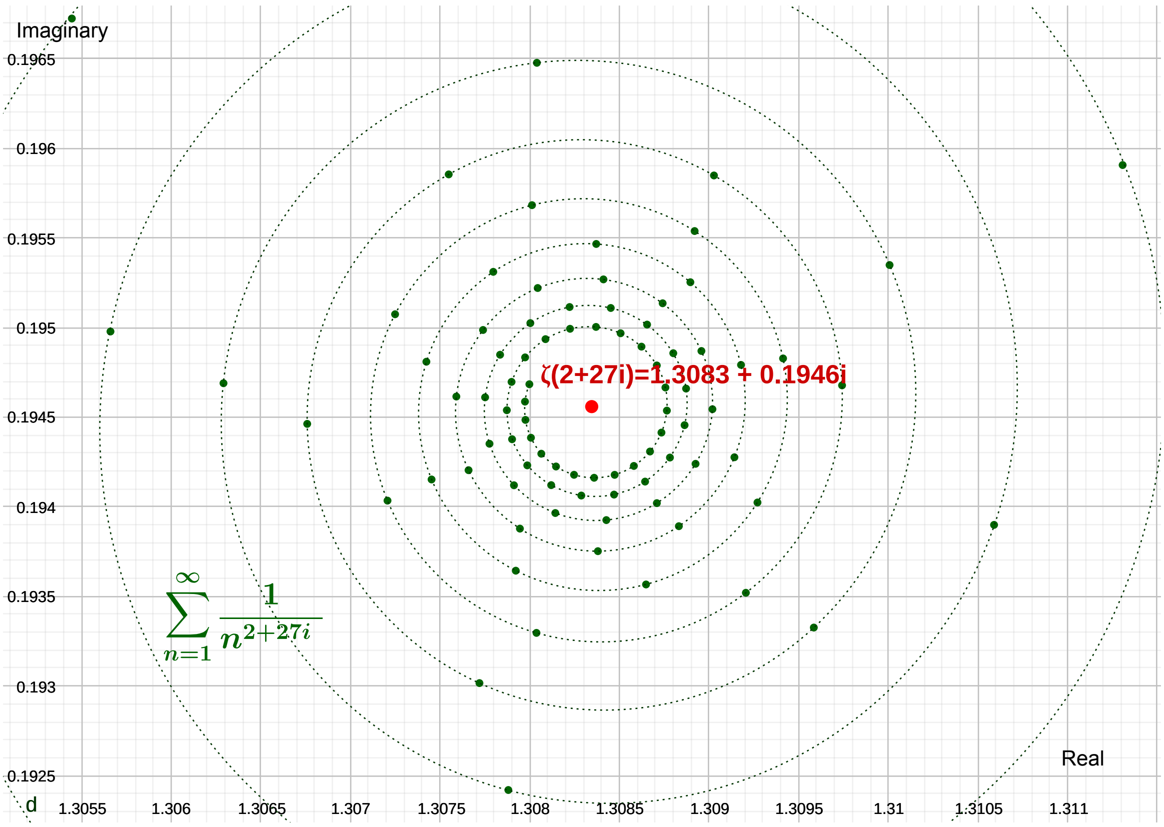

Figura 1: *Ejemplo de espiral logarítmica de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ para $s = 2 + 27i$ donde $\zeta(s)$ es el centro de la espiral.

Cuando $Re[s] > 1$, los puntos de la espiral convergen a su centro, pero si $Re[s] \leq 1$, la serie de puntos diverge de su centro. La función $S^*_{-s}(n)$, es una espiral con centro en el origen del plano complejo, pero al sumarle $\zeta(s)$, la espiral se aproxima a la serie de puntos, y, ambas espirales se unen cuando $n \to \infty$.

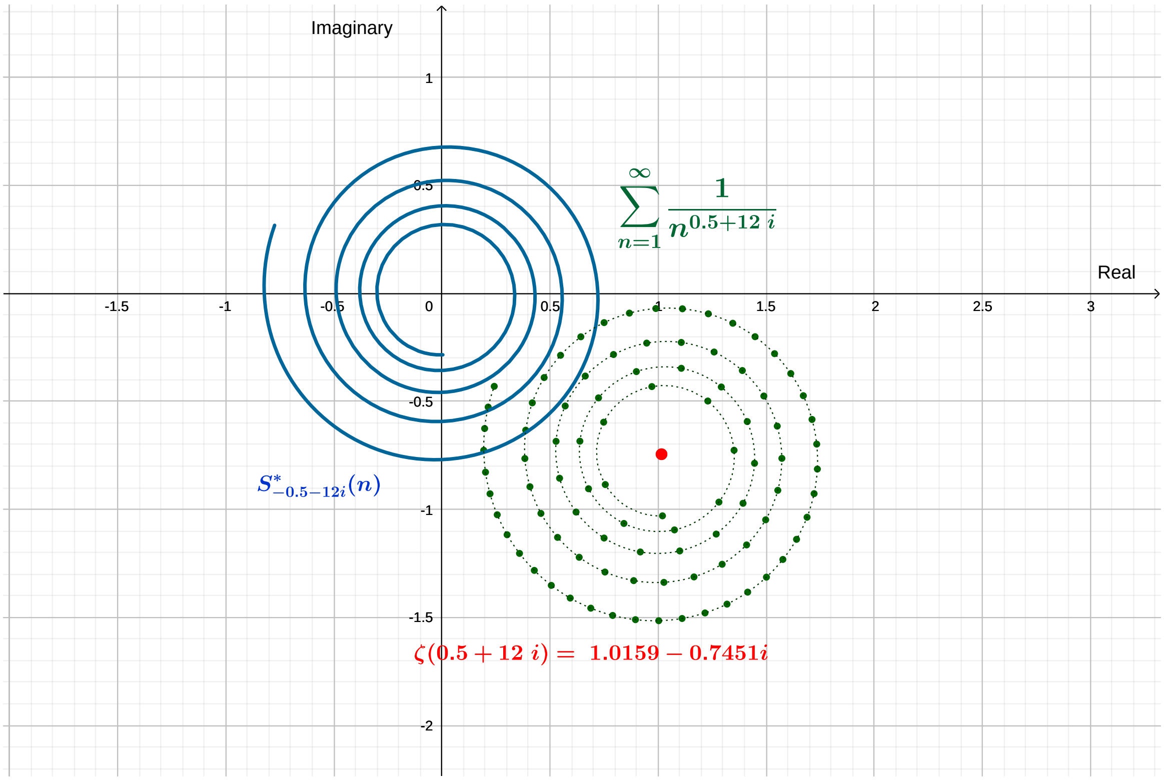

Figura 2: *Gráfica en el plano complejo de las espirales dadas por la función* $S^*_{-s}(n)$ *(en color azul),y la serie* $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^s}$ *(en color verde) y el punto* $\zeta(s)$ *(en color rojo).*

Si graficamos por separado la parte real y la parte imaginaria de la serie de puntos y la función$S^*_{-s}(n)$, se grafícan funciones periódicas, de amplitud y periodo variable. La amplitud será creciente cuando $Re[s] < 1$, y decreciente cuando $Re[s] > 1$, y la frecuencia dependerá del termino $Im[s] * \ln(n)$. El eje o valor medio de las funciones periodicas serán:

$$y_{Re} = Re[\zeta(s)]$$
$$y_{Im} = Im[\zeta(s)]$$

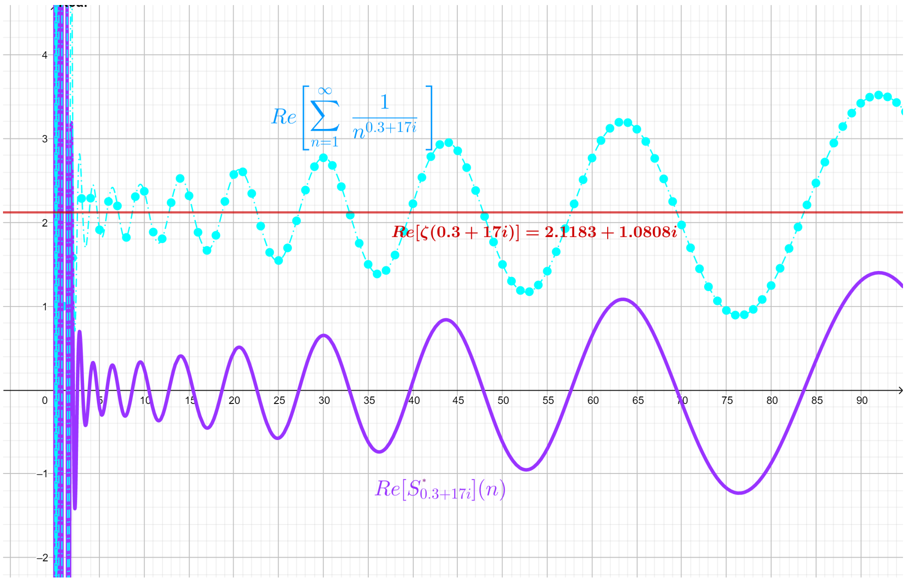

Figura 3: *Representación gráfica de las funciones* $Re\left[S^{*}_{-s}(n)\right]$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re[s]}} \cos(Re[s] * \ln n)$ *que oscila respecto a su valor medio* $Re\left[\zeta(s)\right]$.

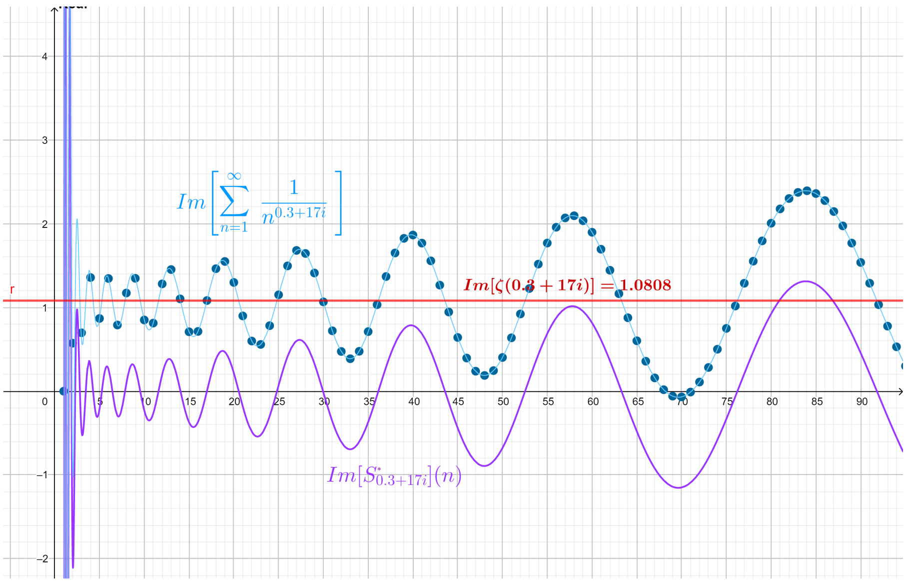

Figura 4: *Representación gráfica de las funciones* $Im\left[S^{*}_{-s}(n)\right]$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a}} \sin(-Im[s] * \ln n)$ *que oscila respecto a su valor medio* $Im\left[\zeta(s)\right]$.

6. La Hipótesis de Riemann.

6.1. Franja crítica de la Función Zeta.

Con la ecuación funcional de Riemann, ecuación (2), se puede obtener valores de $\zeta(s)$ para valores de $Re[s] < 0$, puesto que dependen de $\zeta(1-s)$, que es un valor convergente. Sin embargo no es posible obtener valores para $\zeta(s)$ cuando $0 \leq Re[s] \leq 1$, puesto que se necesitaría conocer el valor de $\zeta(1-s)$, pero no es posible puesto que para $0 \leq Re[1-s] \leq 1$, $\zeta(1-s)$ tampoco es convergente.

$$\zeta(s) = 2^{s}\pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

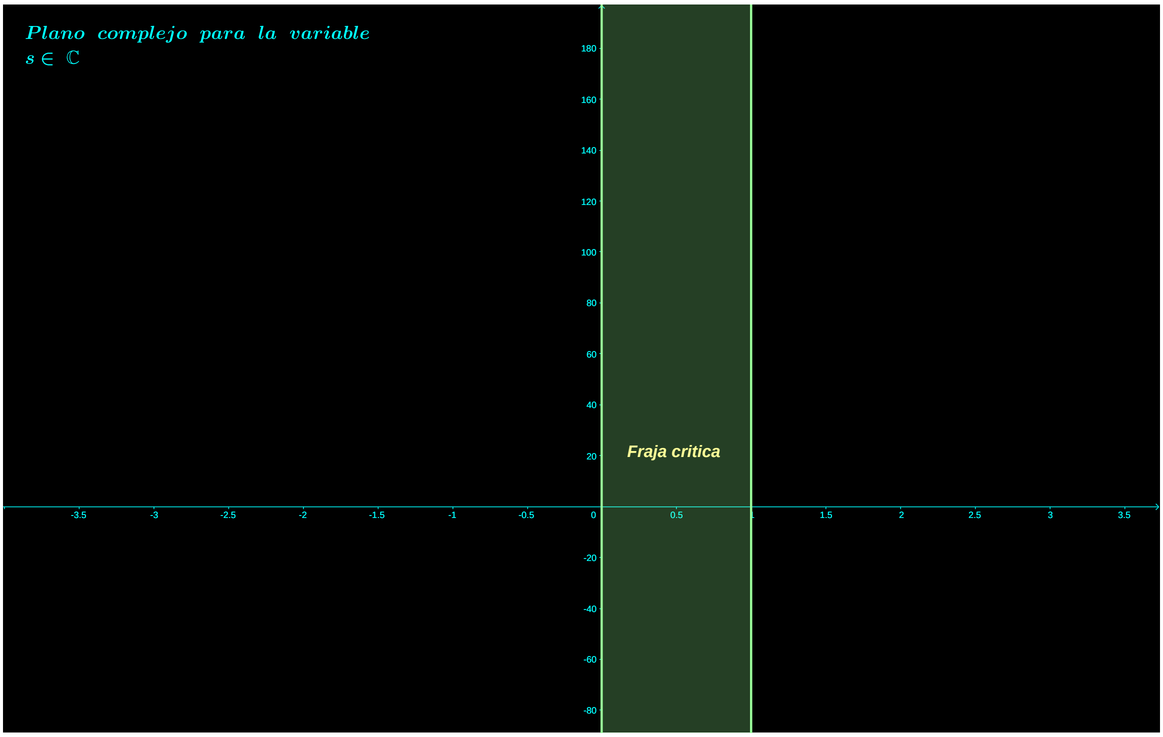

Figura 5: *Franja critica en el Plano complejo, para la variable $s \in \mathbb{C}$, donde no es posible determinar $\zeta(s)$, con la Ecuación Funcional de Riemann.*

6.1.1. Ceros triviales

De la ecuación funcional de Riemann, es fácil darse cuenta que para valores pares negativos de s, $\zeta(s) = 0$, esto debido a que el termino $\sin(\frac{s\pi}{2})$ se hace cero, a estos ceros o raices de la función, se denominan *ceros triviales.*

$$\zeta(-2k) = 2^{-2k}\pi^{-2k-1}\sin\left(\frac{-2k\pi}{2}\right)\Gamma(1+2k)\zeta(1+2k) = 0$$

Donde $k \in \mathbb{N}$

Cuando s es un número par positivo, la función $\zeta(s)$ no es cero, puesto que el termino $\sin(\frac{s\pi}{2})$ se anula con los polos de la función gama $\Gamma(1-s)$.

6.1.2. Ceros no triviales

Existen otros ceros de $\zeta(s)$, pero está demostrado que estos ceros se encuentran dentro de la *franja critica.* A estos ceros se los denomina *ceros no triviales*, que por estar dentro de la *franja critica*, solo se pueden encontrar con métodos numéricos.

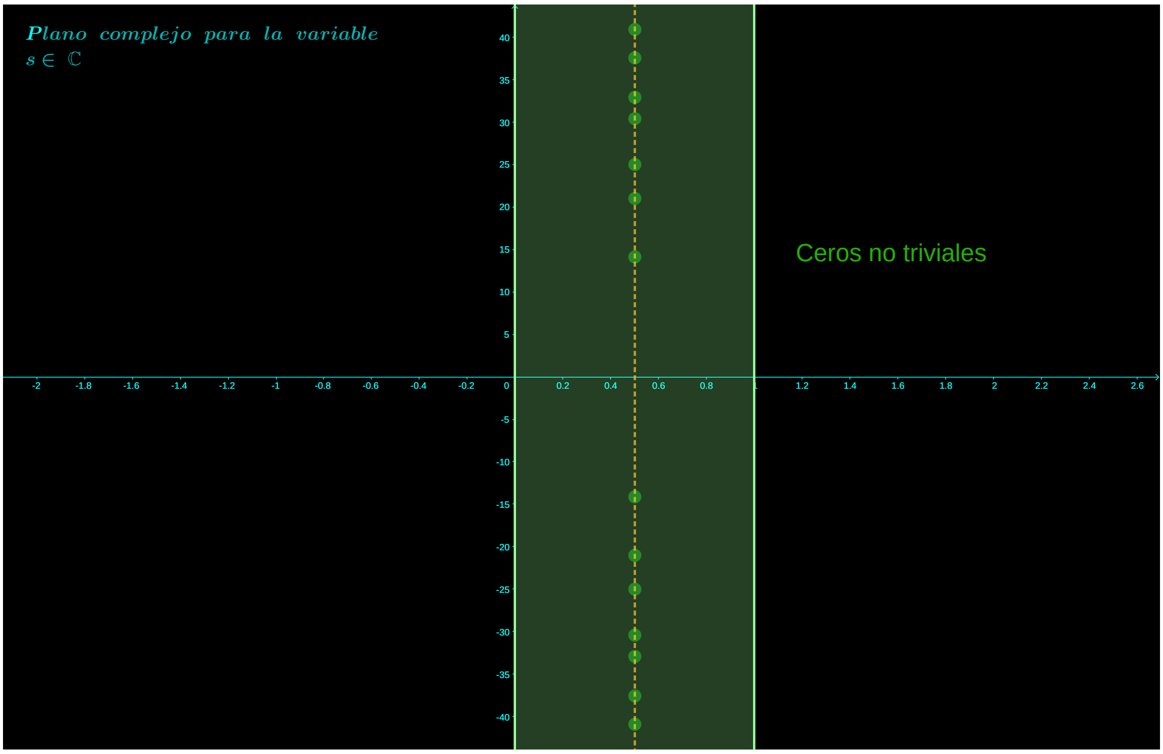

Figura 6: *Franja critica en el Plano complejo, para la variable $s \in \mathbb{C}$, donde no es posible determinar $\zeta(s)$, con la Ecuación Funcional de Riemann.*

En 1859 el matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann, en su tesis de doctorado "Sobre los números primos menores que una magnitud dada"[2], al desarrollar una fórmula explicita para calcular la cantidad de números primos menores que x, conjeturó que: ***"La parte real de todo cero no trivial de la Función Zeta $\zeta(s)$ es $\frac{1}{2}$"***. Riemann estaba seguro de esta afirmación, pero no pudo demostrarlo, quedando como una de las hipótesis mas importantes sin demostrarse por 163 años.

7. Demostración de la hipótesis

Sea $s \in \mathbb{C} : s = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y es un cero no trivial de modo que $\zeta(s) = 0$.

Por la ecuación Funcional de Riemann, si s es un cero no trivial, se debe cumplir:

$$\zeta(a+bi) = \zeta(1-a-bi) = 0 \tag{28}$$

Si remplazamos $a + bi$ en la ecuación (26) y desarrollamos la expresión:

$$\zeta(a+bi) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{a+bi}} - \int\frac{1}{n^{a+bi}}dn - \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p B_p}{p!} * \frac{d^{p-1}}{dn^{p-1}}\left(\frac{1}{n^{a+bi}}\right)\right] \tag{29}$$

$$\zeta(a+bi) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{a+bi}} - \frac{1}{1-a-bi}n^{1-a-bi} - \frac{(-1)^1 B_1}{1!}n^{-a-bi} - \frac{(-1)^2 B_2}{2!}(-a-bi)n^{-1-a-bi}\cdots\right] \tag{30}$$

Como $0 < a < 1$, aplicando el límite, la ecuación se reduce a:

$$\zeta(a+bi) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{a+bi}} - \frac{1}{1-a-bi}n^{1-a-bi}\right] \tag{31}$$

Sabiendo que $\zeta(a+bi)=0$, y llevando a su forma polar se obtiene:

$$0=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-bi\ln(m)}}{m^a}-\frac{n^{1-a}}{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}e^{i\left[\arctan\left(\frac{b}{1-a}\right)-b\ln(n)\right]}\right] \tag{32}$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-bi\ln(m)}}{m^a}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{1-a}}{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}e^{i\left[\arctan\left(\frac{b}{1-a}\right)-b\ln(n)\right]}\right] \tag{33}$$

Aplicando propiedades Eulerianas:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^a}-i\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin(b\ln m)}{m^a}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{1-a}}{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}\left\{\cos\left[arctan\left(\frac{b}{1-a}\right)-b\ln n\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\sin\left[arctan\left(\frac{b}{1-a}\right)-b\ln n\right]\right\}\right] \tag{34}$$

Del mismo modo, para el cero no trivial $s=1-a-bi$ se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^{1-a}}+i\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin(b\ln m)}{m^{1-a}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{a}}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{\cos\left[arctan\left(\frac{b}{a}\right)-b\ln n\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.-i\sin\left[arctan\left(\frac{b}{a}\right)-b\ln n\right]\right\}\right] \tag{35}$$

Tomando la parte real de las ecuaciones (34) y (35) se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^a}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{1-a}}{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}\cos\left[arctan\left(\frac{b}{1-a}\right)-b\ln n\right]\right] \tag{36}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^{1-a}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{a}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left[arctan\left(\frac{b}{a}\right)-b\ln n\right]\right] \tag{37}$$

Igualando las amplitudes para poder comparar las ecuaciones (36) y (37), sabiendo que el eje de ambas funciones es $Re[\zeta(a+bi)]=Re[\zeta(1-a-bi)]=0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}{n^{1-a}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^a}\right]=\lim_{n\to\infty}\cos\left[arctan\left(\frac{b}{1-a}\right)-b\ln n\right] \tag{38}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n^{a}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^{1-a}}\right]=\lim_{n\to\infty}\cos\left[arctan\left(\frac{b}{a}\right)-b\ln n\right] \tag{39}$$

Sea $a>1/2$, entonces $a-1<1/2$, se verifica que para todo valor de $m\neq n$:

$$\frac{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}{n^{1-a}}\frac{\cos(b\ln m)}{m^a}>\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n^{a}}\frac{\cos(b\ln m)}{m^{1-a}} \tag{40}$$

por tanto para $n>1$, siempre se cumple que:

$$\frac{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}{n^{1-a}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^a}>\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n^{a}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\cos(b\ln m)}{m^{1-a}} \tag{41}$$

La desigualdad (41) implica que $\zeta(a+bi)\neq\zeta(1-a-bi)$ para $a\neq 1/2$

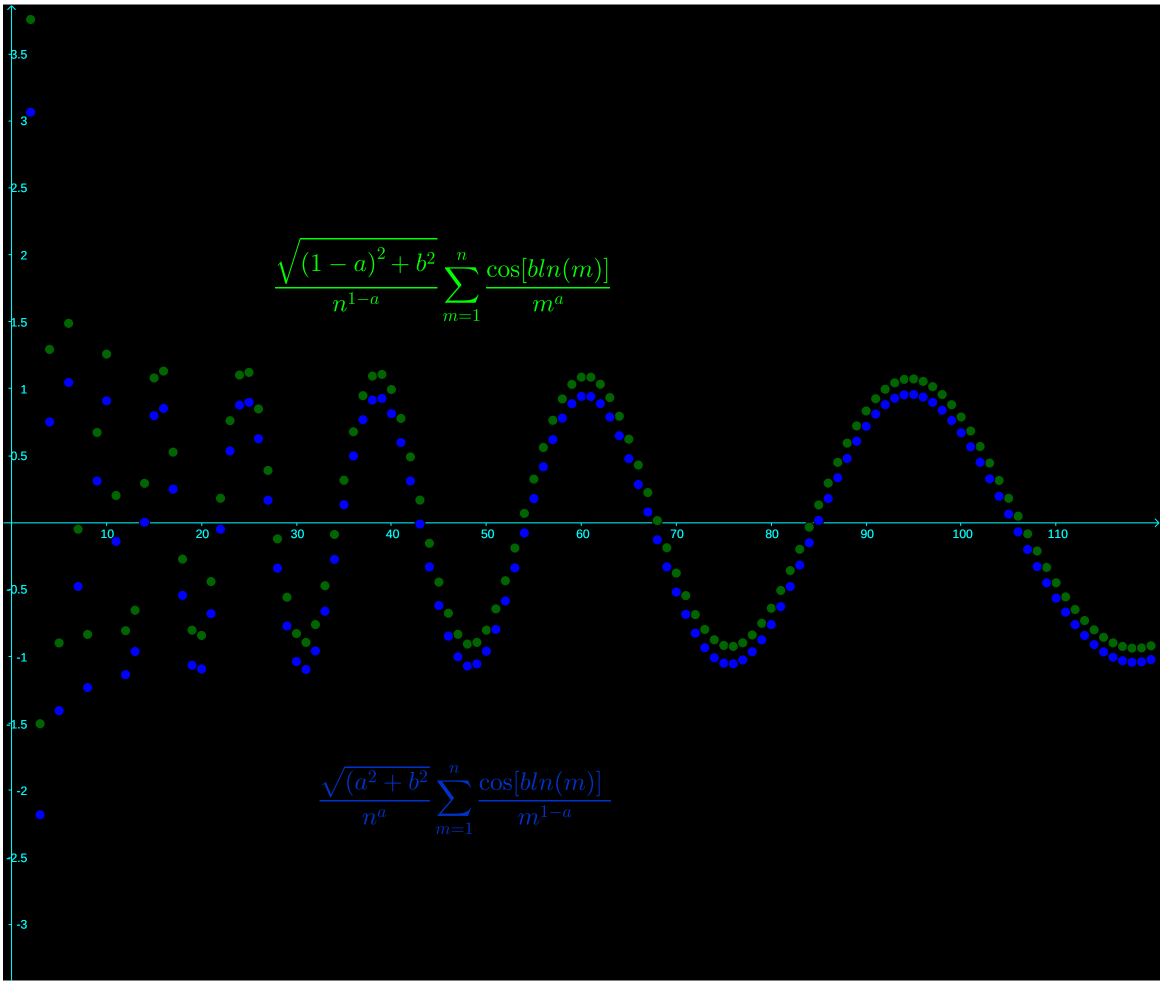

Figura 7: *Representación gráfica de la desigualdad (41)*

Finalmente podemos concluir indicando que $\exists\ b \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$Re[\zeta(a+bi)] = Re[\zeta(1-a-bi)] = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2} \tag{42}$$

Por tanto:

$$\zeta(a+bi) = \zeta(1-a-bi) = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2} \tag{43}$$

Con lo que queda demostrado que ***La Hipotesis de Riemann es verdadera***.

Referencias

[1] Jean-Marie De Koninck and Florian Luca. *Analytic number theory: Exploring the anatomy of integers*, volume 134. American Mathematical Soc., 2012.

[2] Bernhard Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse. *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß*, 2(145-155):2, 1859.