Démonstration de la Conjecture de Goldbach

Par Mr.ANNOUAOUI RACHID

Enoncé de la Conjecture : « Tout entier naturel pair est la somme de deux entiers premiers».

Démonstration :

Soit n un entier pair.

Notons P_n l'ensemble de tous les facteurs premiers inférieurs à n défini comme suit :

$P_n = \{1(p_1) ; 2(p_2) ; \ldots\ldots\ldots ; p_m\}$ ces p_i sont classés par ordre croissant :

$p_1 < p_2 < \ldots\ldots\ldots < p_{m-1} < p_m$.

Donc p_m est le plus grand facteur premier inférieur à n, autrement dit il n'y a plus de facteur premier entre p_m et n.

On a donc $\forall\ p_i \in P_n$, $p_i \leq p_m < n$ et $n-p_i < n$.

La contraposée de la Conjecture de Goldbach s'énonce comme suit :

« Il existe un entier naturel pair qui n'est égal à aucune somme de deux nombres premiers» : Supposition 1 $\rightarrow S_1$.

Nous allons donc étudier cette contraposée pour ce n.

La signification de cette contraposée avec ce qui a été défini précédemment est :

« $\forall p_i \in P_n$, $n-p_i \notin P_n$ ».

On a $p_1 < p_2 < \ldots\ldots < p_{m-1} < p_m$ donc

$n-pm < n-p_{m-1} < \ldots\ldots < n-p_2 < n-p_1$.

Supposons alors que $\forall p_i \in P_n$, $p_1 < n-p_i < p_m$: supposition 2 → S_2 .

Donc pour $p_i=p_m$ on obtient $p_1 < n-p_m < p_m$,

$p_1 < n-p_m \Rightarrow p_m < n-p_1$ Contradiction avec $n-p_i < p_m$

Cette supposition S_2 est donc fausse (S_2 est donc clôturée).

Et alors $\exists\, p_{j/n} \in P_n$ tel que $n- p_{j/n} \leq p_1$ ou $n- p_{j/n} \geq p_m$,

Et comme $n- p_{j/n} \notin P_n$ alors $n- p_{j/n} \neq p_1 = 1$.

Il nous reste donc uniquement le cas où $n- p_{j/n} \geq p_m$ plus exactement $n- p_{j/n} > p_m$ car $n- p_{j/n}$ n'est pas premier(S_1) et pm est premier.

$n- p_{j/n} > p_m \Rightarrow n- p_m > p_{j/n}$ et donc

$n- p_m > p_{j/n} > p_{(j/n)-1} > p_{(j/n)-2} > \ldots\ldots > p_2 > p_1$.

Nous allons continuer cette analyse avec le plus grand facteur premier $p_{j/n}$ qui permet l'inégalité $n- p_{j/n} > p_m$.

On aura alors $\boxed{n- p_{j/n} > p_m}$ et $\boxed{n- p_{(j/n)+1} < p_m}$

Avec $p_{(j/n)+1}$ le facteur premier successif au facteur premier $p_{j/n}$.

(nous pourrons écrire $p_{(j/n)+1}$ ou $p_{(j+1)/n}$; $p_{(j/n)+i}$ ou $p_{(j+i)/n}$).

Comme $p_{j/n} > p_{(j/n)-1} > p_{(j/n)-2} > \ldots\ldots\ldots > p_2 > p_1$ et

$p_{(j/n)+1} < p_{(j/n)+2} < \ldots\ldots\ldots < p_{m-1} < p_m$ on obtient alors :

$\rightarrow \forall\ p_k \leq p_{j/n}$, $\boxed{n- p_k > p_m}$ car $n- p_k \geq n- p_{j/n} > p_m$ (ce qui nous indique la non primalité des $n- p_k$ pour $p_k \leq p_{j/n}$ car pas de facteur premier entre p_m et n) Et

$\rightarrow \forall\ p_k \geq p_{j+1/n}$, $\boxed{n- p_k < p_m}$ ou $\boxed{p_1 < n-p_k < p_m}$ car $n- p_k < n-p_{(j/n)+1} < p_m$

Nous allons donc montrer tout d'abord l'existence de $p_{j/n}$:

$p_{j/n}$ a été défini comme suit :

$\exists\ p_{j/n} \in P_n$ tel que $n- p_{j/n} > p_m$ et $n- p_{(j/n)+1} < p_m$ avec $p_{(j/n)+1}$ le facteur premier successif au facteur premier $p_{j/n}$.

Supposons alors le contraire : $\forall\ p_j \in Pn$, $n-p_j > p_m$: Supposition 3 $\rightarrow S_3$

Donc pour $p_j = p_m$ on obtient alors $n- p_m > p_m \Rightarrow n > 2p_m$

Comme $n > p_m$ alors $p_m < n < 2p_m$

Or d'après le théorème de Tchebychev, il y a toujours un nombre premier entre q et 2q (avec q entier naturel >1) et comme il n'y a pas de facteur premier entre p_m et n alors il n'y a pas aussi de facteur premier entre p_m et $2p_m$ ce qui se contredit avec le théorème de

Tchebychev, on en déduit alors qu' $\exists\ p_{j/n} \in Pn$ tel que n- $p_{j/n} > p_m$ la supposition S_3 est donc clôturée.

Et en même temps on vient de démontrer que n- $p_m < p_m$.

D'autre part,

→ Si n- $p_{m-1} < p_m$ alors n- $p_{m-1} <$ n- $p_{j/n}$ car n- $p_{m-1} < p_m <$ n- $p_{j/n} \Rightarrow p_{j/n} < p_{m-1}$ et donc $p_{j/n}$ est compris entre p_1 et p_{m-1} et alors $p_{(j/n)+1}$ est compris entre p_2 et p_m.

→ Si n- $p_{m-1} > p_m$ alors on a n- $p_m < p_m$ et n- $p_{m-1} > p_m$ donc $p_{j/n} = p_{m-1}$ et $p_{(j/n)+1} = p_m$.

On vient donc de démontrer l'existence de $p_{j/n}$ et $p_{(j/n)+1}$.

On a donc $\forall\ p_i \in P_n$ tel que $p_i \geq p_{(j/n)+1}$

n- $p_{j/n} > p_m > p_i \Rightarrow$ n- $p_{j/n} > p_i \Rightarrow$ n- $p_i > p_{j/n}$

et plus particulièrement $\forall\ p_i \geq p_{(j/n)+1}$, $p_{j/n} <$ n- $p_i < p_m$.

Etudions alors la répartition de ces n- p_i entre $p_{j/n}$ et p_m :

Soit p_i entre $p_{j/n}$ et p_m, $\exists\,!\ p_{i1} > p_{j/n}$ et $\exists\,!\ p_{i2} > p_{j/n}$ tel que p_{i1} et p_{i2} facteurs premiers successifs avec $p_{i1} <$ n- $p_i < p_{i2}$, strictement car n- p_i n'est pas premier et p_{i1} et p_{i2} sont premiers (avec $p_1 <$ n- $p_i < p_m$).

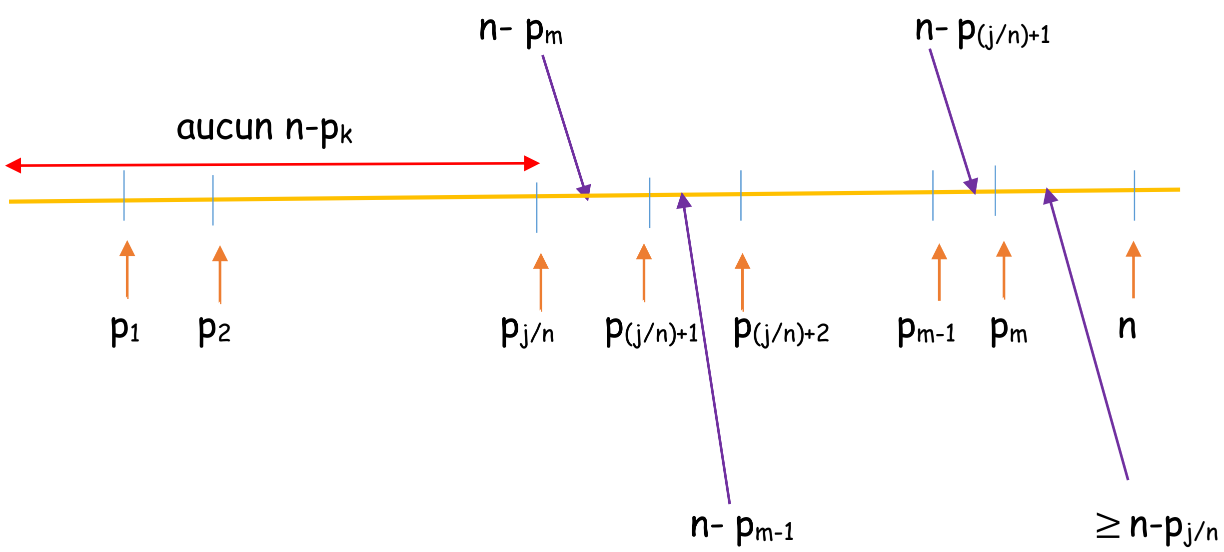
On a $p_{i1} <$ n- $p_i < p_{i2} \Rightarrow p_i <$ n- p_{i1} et $p_i >$ n- $p_{i2} \Rightarrow$ n- $p_{i2} < p_i <$ n- p_{i1}

De plus pour les n- p_k, n- p_{i2} et n- p_{i1} sont aussi successifs car

$p_{i1} < p_{i2} < p_{i3} <$ ……… $\Rightarrow$ ……. $<$ n- $p_{i3} <$ n- $p_{i2} <$ n- $p_{i1} <$ …..

ceci montre deux n- p_k différents ne peuvent appartenir au même intervalle composé par deux facteurs premiers successifs puisqu'il existe un facteur premier entre les deux n- p_k ($n - p_{i2} < p_i < n - p_{i1}$)

Schématisons alors cette répartition sur la droite graduée suivante :



En effet,

$n - p_{j/n} > p_m \Rightarrow n - p_m > p_{j/n}$

et $n - p_{(j+1)/n} < p_m \Rightarrow n - p_m < p_{(j+1)/n}$ d'où $p_{j/n} < n - p_m < p_{(j+1)/n}$

le nombre de p_k entre p_m et $p_{(j+1)/n}$ est égal à m-(j+1)+1=m-j.

Et le nombre de n-p_k (avec p_k entre $p_{(j+1)/n}$ et p_{m-1} car p_m est déjà utilisé entre $p_{j/n}$ et $p_{(j+1)/n}$) est égal à (m-1)-(j+1)+1=m-j-1 qui correspond exactement au nombre d'intervalles entre $p_{(j+1)/n}$ et p_m, et comme on a $n - p_{m-1} < n - p_{m-2} < \ldots\ldots < n - p_{(j+1)/n}$ alors on a exactement la répartition suivante :

$p_{(j+1)/n} < n- p_{m-1} < p_{(j+2)/n}$; $p_{(j+2)/n} < n- p_{m-2} < n- p_{(j+3)/n}$ ……… Et $p_{m-1} < n- p_{(j+1)/n} < p_m$.

Car on avait démontré qu'entre deux facteurs premiers successifs ($\geq p_{(j+1)/n}$) il y a un unique n-p_k ($p_k \geq p_{(j+1)/n}$)

De même $n- p_{j/n} > p_m \Rightarrow p_m < n- p_{j/n} < n$,

Donc tous les n-p_k ($p_k \leq p_{j/n}$: $n- p_{j/n} < n-p_k$) sont au-delà de p_m ce qui confirme la répartition des n-p_i sur la régle graduée tracées ci-avant.

Récapitulons donc tout ce qui précède :

→ $\forall$ p_i entre $p_{(j+1)/n}$ et p_m on a $p_{j/n} < n- p_i < p_m$

→ Entre deux facteurs premiers successifs supérieurs à $p_{j/n}$, il y a un unique n-p_k avec $p_{j/n} \leq p_k \leq p_m$.

D'autre part,

On a $\forall$ p_k (entre $p_{j/n}$ et p_{m-1}) et $\forall$ p_{k+1} (entre $p_{(j+1)/n}$ et p_m), facteurs premiers successifs, p_k et p_{k+1} ne peuvent être des nombres premiers jumeaux ($p_{k+1} - p_k = 2$) car si c'était le cas alors le seul entier qui existe entre p_k et p_{k+1} est $p_k + 1$ et comme $p_k < n-p_i < p_{k+1}$ alors $n-p_i = p_k + 1$

Ce qui est impossible car n-p_i est impair et $p_k + 1$ est pair

D'où $\forall$ $p_k \geq p_{j/n}$ p_k et p_{k+1} ne peuvent être des entiers premiers jumeaux.

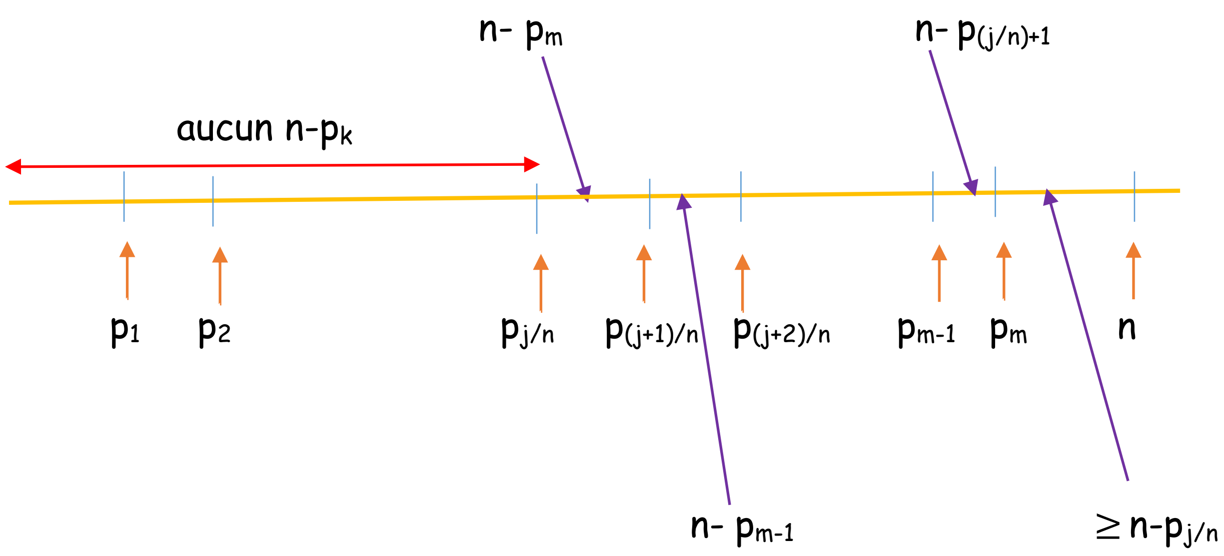
Donc les seuls nombres premiers jumeaux sont ceux compris entre p_1 et $p_{j/n}$.

Récapitulons :

→ $n \in E_p$ (ensemble des entiers pairs), $\forall\ p_i \in P_n$, $n\text{-}p_i \notin P_n$.

→ Entre chaque p_k et p_{k+1} (avec k entre j/n et m-1) il y a un unique $n\text{-}p_i$ (avec i entre (j+1)/n et m).

Schématisé sur la droite graduée suivante :



→ Il n' y a pas de nombres premiers jumeaux entre $p_{j/n}$ et p_m.

→ Les seuls nombres premiers jumeaux existent entre p_1 et $p_{j/n}$.

Nous allons étudier par la suite les nombres pairs entre p_m et n,

Le premier entier(sens croissant) dans ce cas est $p_m + 1$, mais il est égal à la somme de deux nombres premiers, de même pour $p_m + 3$; $p_m + 5$; $p_m + 7$.

Nous allons raisonner par la suite sur les nombres de la forme $p_m + 2k+1$ qui sont les nombres pairs entre p_m strictement et n, avec 2k+1 non premier car les nombres de la forme $p_m + 2k+1$ avec 2k+1 premier répondent au critère : somme de deux nombres premiers ($\exists\ k_1 \in$

$\mathbb{N}$ tel que $n= p_m + 2k_1 + 1$).

Les nombres de la forme $p_m + 2k$ sont impairs ce qui ne nous intéresse pas dans notre cas.

Le premier nombre tel que $p_m + 2k+1$ pair et 2k+1 non premier est le nombre $p_m+ 9$ qu'on notera n_1.

Remarquons que $P_{n1} = P_n$ car il n'y a plus de facteur premier entre p_m et $n(p_m(n_{1)} = p_m(n))$.

Supposons alors que n_1 n'est égal à aucune somme de deux facteurs premiers de P_n, on adoptera alors le même raisonnement que pour n, dons $\exists$ $p_{j/n1} \in P_n$ tel que $p_{j/n1} < n_1 - p_m < p_{(j+1)/n1} \Rightarrow$ $p_{j/n1} < p_m + 9 - p_m < p_{(j+1)/n1} \Rightarrow$

$p_{j/n1} < 9 < p_{(j+1)/n1} \Rightarrow$

$p_{j/n1} = 7$ et $p_{(j+1)/n1} = 11$

Or on avait démontré comme pour n qu'il n'y a pas de nombres premiers jumeaux entre $p_{j/n1}$ et p_m alors que dans ce cas il y a plusieurs nombres premiers jumeaux au-delà de $p_{j/n1} = 7$, contradiction $\Rightarrow n_1 = p_m + 9$ s'écrit comme somme de deux facteurs premiers.

Idem pour le deuxième nombre tel que $p_m + 2k+1$ pair et 2k+1 non premier, ce nombre est égal à $n_2 = p_m + 15$ ($Pn_2 = Pn_1 = P_n$) $\Rightarrow p_{j/n2} = 13$ et $p_{(j+1)/n2} = 17$ et comme il y a plusieurs nombres premiers jumeaux au-delà de $p_{j/n2} = 13$ alors contradiction et donc $p_m + 15$ s'écrit comme somme de deux facteurs premiers.

Idem pour $n_3 = p_m + 21 \Rightarrow p_{j/n3} = 19$ et $p_{(j+1)/n3} = 23$ et ainsi de suite….

-Fin-