Amélioration des conjectures de Legendre et Opperman relatives à la répartition des nombres premiers

Réjean Labrie
(17 avril 2022)
(rlabrie2@hotmail.ca)

Résumé: Soit N, n et k des entiers plus grands que 1. Alors pour tout N il existe un plafond k tel que pour n>=N, si on découpe la suite des entiers consécutifs de 1 à n*(n+k) en n+k tranches de longueur n, on trouve toujours au moins un nombre premier dans chacune des n+k premières tranches au minimum.

Il s'ensuit que π(n*(n+k)) > π(n*(n+k-1)) > π(n*(n+k-2)) > π(n*(n+k-3)) > … > π(2n) > π(n) où π(n) est la quantité de nombres premiers plus petits ou égal à n.

Abstract: Let N, n and k be integers larger than 1. Then for all N there exists a minimum ceiling k such that for n>=N, if we cut the sequence of consecutive integers from 1 to n*(n+k) into n+k slices of length n, we always find at least a prime number in each of the first n+k slices at least.

It follows that π(n*(n+k)) > π(n*(n+k-1)) > π(n*(n+k-2)) > π(n*(n+k-3))> ...> π(2n)> π(n) where π(n) is the quantity of prime numbers smaller than or equal to n.

****

Pour illustrer cette conjecture prenons N=2 dont le plafond k associé est le nombre 2 (voir le tableau à la fin de cet article). Alors pour tout n>=N on a n+2 tranches de longueur n qui contiennent chacune au moins un nombre premier. Ainsi pour n=2 on a au moins 2+2=4 tranches de longueur 2 contenant chacune au moins un nombre premier.

Maintenant regardons le cas N=37 qui a comme plafond k le nombre 387. Alors pour tout n>=N on a n+387 tranches de longueur n. Si on prend n=40 ça implique que l'on a au moins 40+387=427 tranches de longueur 40, chacune contenant au moins un nombre premier.

Opperman en 1882 poussait un peu plus loin la conjecture de Legendre voulant qu'il y ait au moins un nombre premier entre 2 carrés parfaits. En effet, il énonçait que π(n^2+n) > π(n^2) > π(n^2-n) pour n>1, ce qui revient à dire qu'il y a au moins un nombre premier dans l'intervalle n^2-n à n^2 et un deuxième dans l'intervalle n^2 à n^2+n. Avec la présente conjecture on passe de 2 à n+k intervalles, au minimum, de longueur n contenant chacun au moins un nombre premier.

****

Tableau des premières valeurs pour le plafond k en fonction de la valeur N.

N	Plafond k
2	2
3	2
4	2
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	10
11	18
12	20
13	20
14	20
15	20
16	35
17	35
18	35
19	35
20	35
21	35
22	35
23	35
24	147
25	147
26	152
27	152
28	263
29	263
30	330
31	335
32	335
33	387
34	387
35	387
36	387
37	387

****