

# Notes on prime numbers: regularity on composite numbers, formal representations and Riemann hypothesis

Federico Romagnoli

federico.romagnoli@libero.it

31/05/2022

## Abstract (En) - (Full paper on page 2)

The aim of this paper is to show, through the regularities that emerge on composite numbers, some formal representations of primality, set of prime numbers and sequence of prime numbers. These regularities will also be seen in the context of the Riemann hypothesis.

This work has been divided into three parts.

In the first part two formulas will be identified, defined in  $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ , that describe the infinite sequences of infinite composite odd numbers. On the basis of these formulas, two definitions will follow, both of primality and of sets of prime numbers. In addition, graphs will be used to better represent the results and the regularities that have emerged, as well as some examples on the efficiency of the formulas found for the purposes of primality.

In the second part, through an indicator function (or characteristic) and a generating function, we will try to represent a sequence of prime numbers starting both from the two primality definitions identified above, and from the simple definition of prime number.

In the third part we will try to generalize the two formulas found in the first part to domains other than  $\mathbb{N}_{>0}^2$ . The definitions given above will be adapted to the new formulas and, lastly, the results obtained will be analysed in the context of the Riemann hypothesis, an unprovable hypothesis. These are the conclusions.

**Keywords:** composite numbers, primes, primality, set of prime numbers, sequence of prime numbers, distribution of primes, Riemann hypothesis.

**MSC2010:** Primary 11A41, 11N32, 11Y11, 11N13, 11M06, 11M20, 11M26, 11N05, 97F60; Secondary: 1B25, 60E10, 97E60, 97E20.

## Abstract (It) - (Documento completo a pag. 19)

Lo scopo del presente paper è quello fornire, attraverso le regolarità che emergono sui numeri composti, alcune rappresentazioni formali di primalità, insieme di numeri primi e successione di numeri primi. Dette regolarità saranno inoltre inquadrare nel contesto dell'ipotesi di Riemann.

Il presente lavoro è stato diviso in tre parti.

Nella prima parte saranno individuate due formule definite in  $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  che descrivono le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti. Sulla base di dette formule, seguiranno due definizioni, sia di primalità che di insiemi di numeri primi. Inoltre, saranno utilizzati dei grafici atti a meglio rappresentare le regolarità emerse, nonché alcuni esempi sull'efficienza delle formule trovate ai fini della primalità.

Nella seconda parte, attraverso una funzione indicatrice (o caratteristica) e una funzione generatrice, si cercherà di rappresentare una successione di numeri primi partendo sia dalle due definizioni di primalità individuate sopra, che dalla semplice definizione di numero primo.

Nella terza parte si cercherà di generalizzare le due formule trovate nella prima parte a domini diversi da  $\mathbb{N}_{>0}^2$ . Le definizioni date in precedenza saranno riadattate alle nuove formule e, infine, le risultanze ottenute saranno analizzate nel contesto dell'ipotesi di Riemann, un'ipotesi non dimostrabile. Queste le conclusioni.

**Chiavi di ricerca:** numeri composti, numeri primi, primalità, insieme di numeri primi, successioni di numeri primi, ipotesi di Riemann.

**MSC2010:** Primaria 11A41, 11N32, 11Y11, 11N13, 11M06, 11M2, 11M26, 11N05, 97F60; Secondaria 1B25, 60E10, 97E60, 97E20

Version n. 2

# Notes on prime numbers: regularity on composite numbers, formal representations and Riemann hypothesis

## Introduction

The aim of this paper is to show, through the regularities that emerge on composite numbers, some formal representations of primality, set of prime numbers and sequence of prime numbers. These regularities will also be seen in the context of the Riemann hypothesis. This work has been divided into three parts (paragraphs).

In the first part two formulas will be identified, defined in  $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ , that describe the infinite sequences of infinite composite odd numbers. On the basis of these formulas, two definitions will follow, both of primality and of sets of prime numbers. In addition, graphs will be used to better represent the results and the regularities that have emerged, as well as some examples on the efficiency of the formulas found for the purposes of primality.

In the second part, through an indicator function (or characteristic) and a generating function, we will try to represent a sequence of prime numbers starting both from the two primality definitions identified above, and from the simple definition of prime number.

In the third part we will try to generalize the two formulas found in the first part to domains other than  $\mathbb{N}_{>0}$ . The definitions given above will be adapted to the new formulas and, lastly, the results obtained will be analysed in the context of the Riemann hypothesis, an unprovable hypothesis. These are the conclusions.

## 1. Primality, set of prime numbers and regularities through the sequences of composite odd numbers

To identify the infinite sequences of composite odd numbers, the following methodological approach will be used.

Let:  $i, j \in \mathbb{Z}$

Let:  $d_j = 2j + 1$  (The sequences of infinite odd numbers)

Let:  $a_{i,j} = 3d_j + (i - 1) * 2d_j$  (The infinite arithmetic sequences - with first term  $3d_j$  and common difference  $2d_j$  - of infinite odd numbers) with  $a_{i,j} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ . These double sequences have been identified starting from the simple multiplication table, excluding even numbers from it and comparing the different arithmetic sequences placed in correspondence with each row (or column) of the matrix starting from the second element of sequence.

Moreover, since  $d_j = 2j + 1$ , follows:

$$\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = 4ij + 2i + 2j + 1, \{a_{i,j}\} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

By varying  $i$  e  $j$  in  $\mathbb{Z}$ , we therefore obtain the infinite sequences of infinite odd numbers represented in table 1.1.

**Table 1.1 - INFINITE SEQUENCES  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  OF INFINITE ODD NUMBERS**

i \ j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

It is possible to think of table 1.1 as an infinite matrix  $(a_{i,j})$  associated with the application  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  and state some properties:

- a)  $a_{i,j} = a_{j,i}$  The matrix is symmetry with respect to the main diagonal, but also to the secondary one
- b)  $a_{i,j} = -a_{i,-(j+1)}$  For all row  $i$ , each element  $a_{i,j}$  has its opposite in  $a_{i,-(j+1)}$
- c)  $a_{i,j} = -a_{-(i+1),j}$  For all column  $j$ , each element  $a_{i,j}$  has its opposite in  $a_{-(i+1),j}$
- d)  $a_{i,-1/2} = a_{-1/2,j} = 0$  Solutions of the equation  $a_{i,j} = 0$  is the locus of the points described by  $i = -\frac{1}{2}$  and  $j = -\frac{1}{2}$ .

Restricting the analysis to  $i, j \in \mathbb{N}$ , from table 1 it can be seen that in the part highlighted in red ( $i, j > 0$ ) only composite numbers appear, while prime numbers greater than 2 can only exist in the part highlighted in green, i.e. within the row  $i = 0 \forall j > 0$  ( $a_{0,j} = \dots = 2j + 1$ ) and column  $j = 0 \forall i > 0$  ( $a_{i,0} = \dots = 2i + 1$ ).

**THEOREM 1.1** For all  $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ , the double sequence  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  with  $\{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  describes the infinite sequences formed by infinite odd composite numbers.

It is therefore possible to define an odd number  $d_n = 2n + 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ ) prime as follows:

**DEFINITION 1.1 – REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER**

Let:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Let:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)  
 Let:  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  with  $\{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (The infinite sequences of infinite composite odd numbers)  
 Let:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Or in an equivalent way:  $2ij + i + j \leq n$ ;  $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ ;  $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$ )

**$d_n$  is prime  $\Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$**   
 (but also:  $n$  identifies a  $d_n$  prime  $\Leftrightarrow \nexists 2ij + i + j = n \forall i, j, n$ )

Or:

**$d_n$  is composite  $\Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$ ; else  $d_n$  is prime**  
 (but also:  $n$  identifies a  $d_n$  composite  $\Leftrightarrow \exists 2ij + i + j = n \forall i, j, n$ ; else  $n$  identifies a  $d_n$  prime)

The condition " $a_{i,j} \leq d_n$ ", or those equivalent to it, is functional to avoid an infinite search if  $d_n$  is a prime number, but also to restrict the search if  $d_n$  is a composite number.

It is also possible to think in terms of numerical sets and define the set of infinite odd prime numbers as follows:

**DEFINITION 1.2 - REPRESENTATION OF A SET OF ODD PRIME NUMBERS**

Let:  $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Let:  $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$  or  $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$   
 Let:  $B = \{z \mid z = 4xy + 2x + 2y + 1\}$

**The set  $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$  defines the set of odd prime numbers**

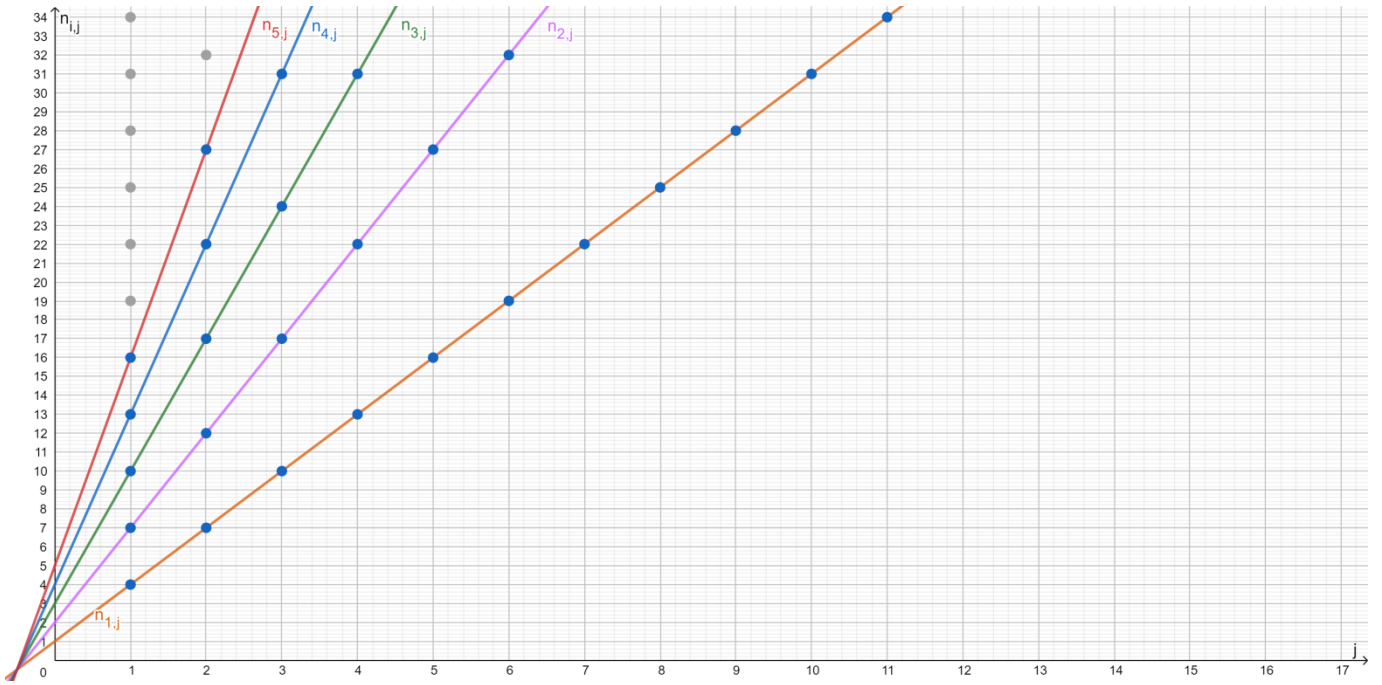
Below, a graphical reading of the methodological approach followed and of the **regularities** found in the infinite sequences of composite numbers that  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  describes.

To this end, it was decided to check for which values of  $n$  it is possible to obtain composite  $d_n$ , equalling to  $\{d_n\} = 2n + 1$  the infinite sequences of infinite composite numbers that  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  describes, hence:

$$\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2ij + i + j, \quad \{n_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>3} \tag{1.2}$$

By representing  $n$  on the ordinate axis,  $j$  (or in an equivalent way  $i$ ) on the abscissa axis and varying  $i$  (or in an equivalent way  $j$ ) for example from 1 to 5, we obtain the following sequences:

- $\{n_{i,j}\}_{i=1} = \{2 * 1 * j + 1 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 7, 10, 13, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=2} = \{2 * 2 * j + 2 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 2\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 12, 17, 22, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=3} = \{2 * 3 * j + 3 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 3\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 17, 24, 31, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=4} = \{2 * 4 * j + 4 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 4\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 22, 31, 40, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=5} = \{2 * 5 * j + 5 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 5\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 27, 38, 49, \dots\}$
- ...
- $\{n_{i,j}\}_{i=k} = \{2 * k * j + k + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2k + 1)j + k\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(3k + 1), (5k + 2), (7k + 3), (9k + 4), \dots\}$



**Graph 1.1 - SEQUENCES  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  OF  $n \mid d_n$  IS A COMPOSITE NUMBER**

The graph 1.1 above shows the regularities on the different sequences that, for greater visual clarity, have been represented in  $\mathbb{R}$ . The sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  can be thought of as a line bundle with center in  $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . The straight lines intersect the abscissa axis  $j$  at the point  $-\frac{i}{2i+1}$  and the ordinate axis at  $i$ ; they also have an angular coefficient equal to  $2i + 1$ . For  $i = 1$  we get the first line  $n_{1,j} = 3j + 1$ , while for very large  $i$  we obtain a straight line that intersects the abscissa axis at a point close to  $-\frac{1}{2}$  and it is almost parallel to the ordinate axis.

Returning to  $\mathbb{N}_{>0}$ , the regularities in the succession of numbers  $n$  that identify composite  $d_n$  are easily observable both on the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  (the straight lines), and  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ , i.e. the sequences present on the integer values of  $j$  on the abscissa axis.

As regards the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , the numbers  $n$  identifying composite  $d_n$  follow every  $2i + 1$  units of  $n$ , starting from  $n$  equal to  $3i + 1$ .

As regards the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2j + 1)i + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ , similarly to the previous case, the values of  $n$  identifying composite  $d_n$  follow every  $2j + 1$  units of  $n$ , starting from  $n$  equal to  $3j + 1$ .

After all, the part in red highlighted in table 1.1 shows the same sequences, whether they are analysed by rows or by columns. Of course, the law describing these regularities is as follows:  $\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2ij + i + j$ .

Using for example the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  for the **primality test** and, remembering that  $n$  identifies a composite  $d_n$  if and only if there is an element of the sequence  $\{n_{i,j}\} = n, \forall i \leq \frac{n-j}{2j+1}$  and  $j = 1$  (worst-case scenario), consider the following two examples.

- A.  $d_n = 47$ , from which  $n = 23$ . On the basis of the condition  $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$  placed in the "Definition 1.1" and under the worst hypothesis ( $j = 1$ ), are required checks on the first seven sequences ( $i \leq 7,3$ ), i.e. those whose first element ( $j = 1$ ) does not exceed 23 or, in other words, those whose inverse image shows, in correspondence with the number 23, a value greater than or equal to 1. The search is therefore less efficient than the canonical one which suggests dividing 47 by those odd numbers between 3 (inclusive) and  $\lceil \sqrt{47} \rceil = 6$ , and thus only two numbers, 3 and 5.
- B. The lower efficiency of the proposed method is more evident when the number to be checked is large. For example, for  $d_n = 123.456.789$ , from which  $n = 61.728.394$ , there follows a number of controls on the different sequences  $n_{i,j}$  equal to  $i \leq 20.576.131$ ; much higher than that proposed by the canonical method, i.e.  $\frac{\lceil \sqrt{123.456.789} \rceil}{2} = 5.555$ .

Moreover, in terms of efficiency, the results are completely identical to those of the canonical method if the **second approach** described below is followed. In fact, can be exploited the infinite sequences of odd composite numbers present on the secondary diagonal and on the other antidiagonals below (or above) it in the matrix  $(a_{i,j}) \forall i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ , with the elements  $a_{i,j}$  ranging from the lower left corner to the upper right corner (Table 1.2).

**Table 1.2** - MATRIX  $(a_{i,j})$  OBTAINED FROM  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1, \forall i, j \in \mathbb{N}_{>0}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

The formula that describes the sequences of numbers present on the secondary diagonal (dark red colour) and on the other antidiagonals below it (red colour) is easily obtained by "playing" with  $i$  and  $j$ ; in particular:

If  $j = i \implies \{a_{i,i}\} = \dots = 4i^2 + 4i + 1$  (antidiagonal: 9, 25, 49, 81, ...)  
 If  $j = i + 1 \implies \{a_{i,i+1}\} = \dots = 4i^2 + 8i + 3$  (antidiagonal: 15, 35, 63, 99, ...)  
 If  $j = i + 2 \implies \{a_{i,i+2}\} = \dots = 4i^2 + 12i + 5$  (antidiagonal: 21, 45, 77, 117, ...)  
 ...  
 If  $j = i + k \implies \{a_{i,i+k}\} = \dots = 4i^2 + (4k)i + (2k - 1)$

Continuing for convenience to use the variable  $j$ , it is possible to define the infinite sequences of infinite composite odd numbers present on antidiagonals as follows:

$$\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8} \tag{1.3}$$

From which follows the theorem:

**THEOREM 1.2** For all  $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ , the double sequences  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  with  $\{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  describes the infinite sequences formed by infinite odd composite numbers.

Hence the following matrix:

**Table 1.3** - MATRIX  $(a_{i,j})$  OBTAINED FROM  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \forall i, j \in \mathbb{N}_{>0}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

In this case, the solution of the equation  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1 = 0$  is the locus of the points described by straight lines  $i = -\frac{1}{2}$  and  $j = -i + \frac{1}{2}$ .

Of course, the set of sequences  $\{a_{i,j}\}$  does not change if  $i$  and  $j$  are exchanged ( $a_{i,j} = 4j^2 + 4ji + 2i - 1$ ): the matrix in table 1.3 is simply transposed.

As in the previous case, we can be provided the following primality definitions and a set of prime numbers greater than 2.

**DEFINITION 1.3 - REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER**

Let:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Let:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)  
 Let:  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  with  $\{a_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (The infinite sequences of infinite composite odd numbers)  
 Let:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Or in an equivalent way:  $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$ ;  $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$ ;  $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$ )

$$d_n \text{ is prime} \Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$$

(but also:  $n$  identifies a  $d_n$  prime  $\Leftrightarrow \nexists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$ )

Or:

$$d_n \text{ is composite} \Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n; \text{ else } d_n \text{ is prime}$$

(but also:  $n$  identifies a composite  $d_n \Leftrightarrow \exists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$ ; else  $n$  identifies a  $d_n$  prime)

**DEFINITION 1.4 - REPRESENTATION OF A SET OF ODD PRIME NUMBERS**

Let:  $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$

Let  $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$  or  $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$

Let  $B = \{z \mid z = 4x^2 + 4xy + 2y - 1\}$

**The set  $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$  defines the set of odd prime numbers**

Below is a graphical reading of the methodological approach used to better highlight the **regularities** found in the infinite sequences of odd composite numbers described by  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ .

As before, to identify the values of  $n$  that make  $d_n = 2n + 1$  a composite number, we set  $d_n = a_{i,j}$  from which we obtain:

$$\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ij + j - 1, \quad \{n_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>3} \quad (1.4)$$

In this case, always representing  $n_{i,j}$  on y-axis, we can however obtain two different graphs:

- one in which  $i$  is represented on the x-axis and we analyse the different sequences that are generated by varying  $j$  from 1 to 5 (for example);
- the other in which  $j$  is represented on the x-axis and we analyse the different sequences that are generated by varying  $i$  from 1 to 5.

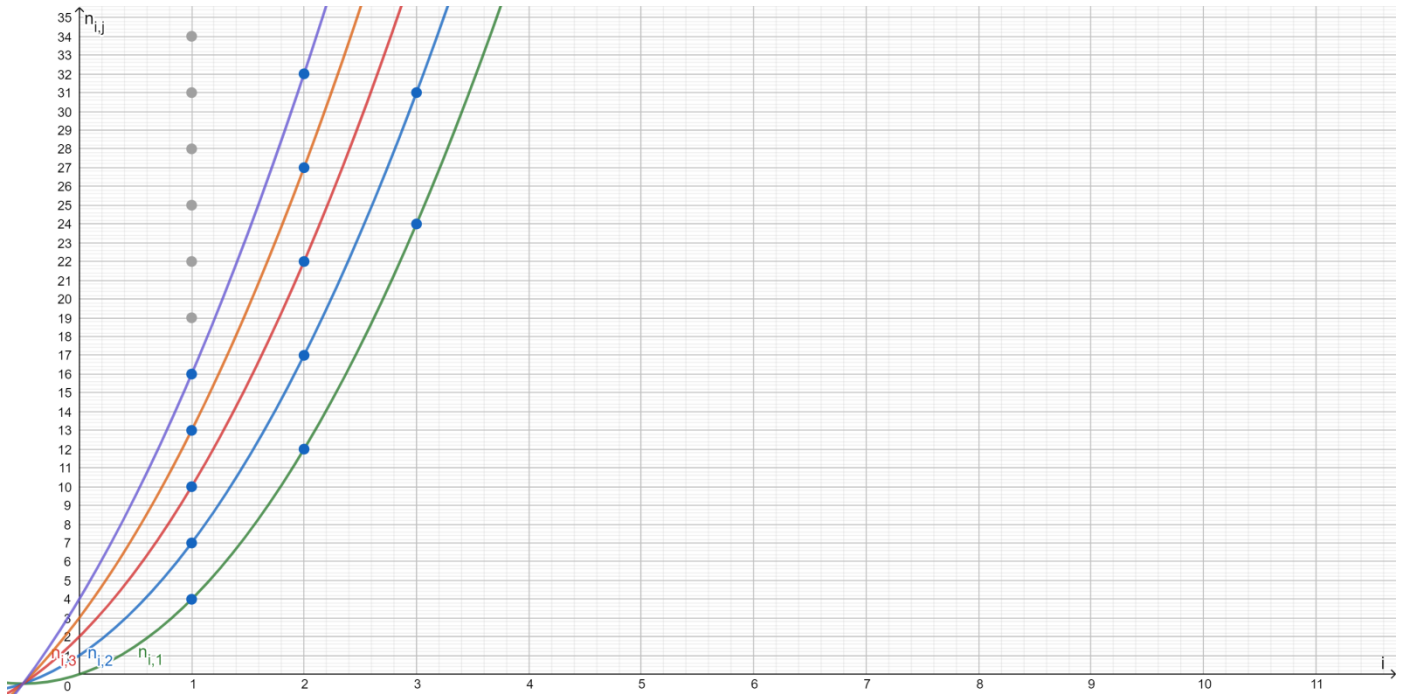
In the first case, with  $i$  on the x-axis and varying  $j$  from 1 to 5, we have:

$$\begin{aligned} \{\{n_{i,j}\}_{j=1}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 1 + 1 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 12, 24, 40 \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=2}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 2 + 2 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 4i + 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 17, 31, 49, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=3}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 3 + 3 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 6i + 2\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 22, 38, 58, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=4}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 4 + 4 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 8i + 3\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 27, 45, 67, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=5}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 5 + 5 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 10i + 4\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 32, 52, 76, \dots\} \\ \dots & \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=k}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * k + k - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2ki + k - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \\ &= \{(3k + 1), (5k + 7), (7k + 17), (9k + 31), \dots\} \end{aligned}$$

In the second case, with  $j$  on the x-axis and varying  $i$  from 1 to 5, we have:

$$\begin{aligned} \{\{n_{i,j}\}_{i=1}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 1^2 + 2 * 1 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 12, 24, 40 \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=2}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 2^2 + 2 * 2 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 7\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{12, 17, 22, 27, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=3}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 3^2 + 2 * 3 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 17\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{24, 31, 38, 45, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=4}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 4^2 + 2 * 4 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 31\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{40, 49, 58, 67, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=5}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 5^2 + 2 * 5 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 49\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{60, 71, 82, 93, \dots\} \\ \dots & \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=k}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * k^2 + 2 * k * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2k + 1)j + (2k^2 - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \\ &= \{(2k^2 + 2k), (2k^2 + 4k + 1), (2k^2 + 6k + 2), (2k^2 + 8k + 3), \dots\} \end{aligned}$$

Below are the graphs showing the regularities.



**Graph 1.2** - SEQUENCES  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  OF  $n \mid d_n$  IS A COMPOSITE NUMBER

Again, the graph was represented in  $\mathbb{R}$ . In particular, the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  can be thought of as a parabolic bundle that have a common point always in  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ , they intersect the abscissa axis in the points  $\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 2j + 2}}{2}$  and that of the ordinates in  $j - 1$ ; they have vertex in  $j - 1$  and axis  $i = -\frac{j}{2}$ .

**Regularities** are highlighted both on the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  and  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , the latter are the sequences that are highlighted in the correspondence of the single integer of  $i$  reported on the abscissa axis.

In particular, regarding  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  (the paraboles), the numbers  $n$  identifying composite  $d_n$  always start from  $3j + 1$ , but follow each other with a regularity that is no longer constant as seen previously (+3 units of  $n$  for the first sequence, +5 units of  $n$  for the second sequence, etc.), but follow a recursive law according to which each interval between two numbers  $n$  identifying composite  $d_n$  is equal to the length of the previous interval plus 4 units of  $n$ .

As for the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , i.e. those that are highlighted in correspondence with the single integer values of  $i$  reported on the abscissa axis, the composite  $d_n$  are identified by those values of  $n$  which, starting from  $n$  equal to  $2i^2 + 2i$ , follow each other every  $2i + 1$  unit of  $n$ .

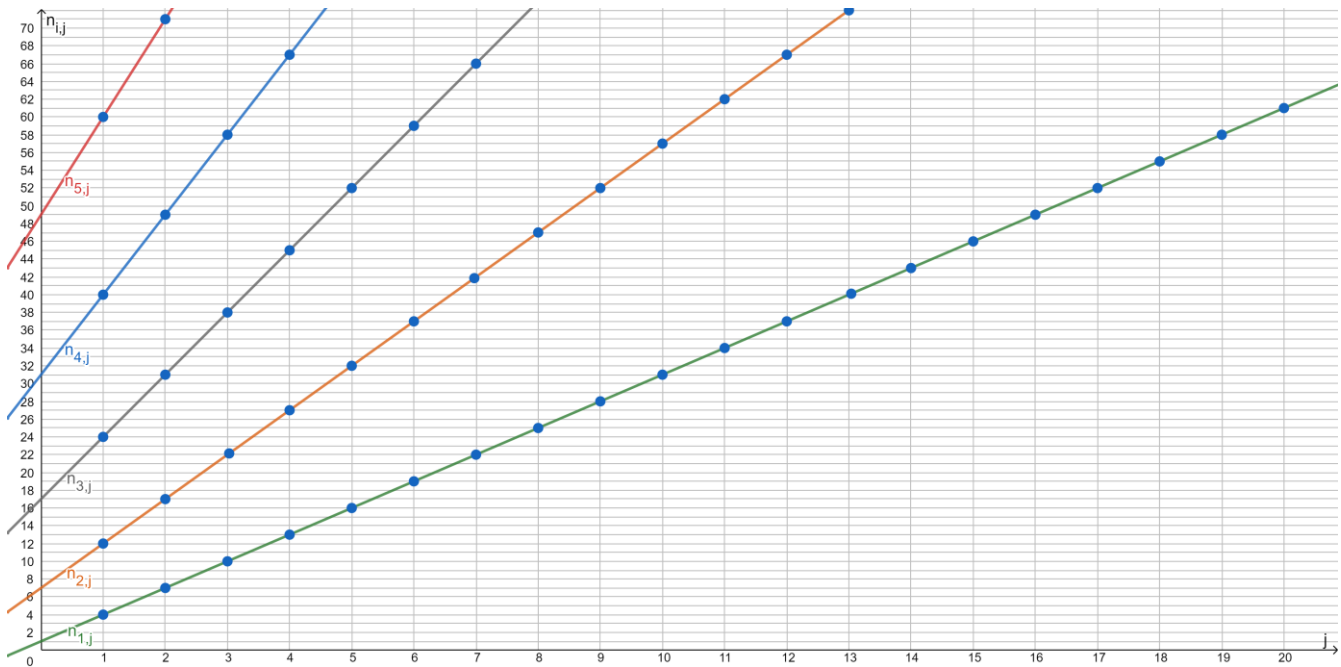
Of course, the law describing these regularities is (1.4).

Using the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  for the **primality test**, let us consider the usual two examples.

- A. We want to verify the primality of  $d_n = 47$ , hence  $n = 23$ . On the basis of the condition  $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$  posed in the "Definition 1.3" and under the worst hypothesis ( $i = 1$ ), the number of checks to be made is  $j \leq 7,3$ . Therefore, also in this case, the check must be made on the first 7 sequences, i.e. those that show as first element a number not higher than 23 or, in other words, those whose inverse image shows, in correspondence with the number 23, a value greater than or equal to 1. Research is therefore also in this case less efficient than canonical research.
- B. Similar conclusions for the number of checks to be carried out on  $d_n = 123.456.789$ .

However, from graph 1.2 it is perceived that greater efficiency would be obtained if the verification of primality takes place on the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  present in correspondence with the integer values of  $i$  reported on the abscissa axis, rather than on the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  (the paraboles) represented in graph 1.2.

To this end,  $j$  is represented on the x-axis (graph 1.3).



**Graph 1.3** - SEQUENCES  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  OF  $n \mid d_n$  IS A COMPOSITE NUMBER

In this case the straight lines that are generated when  $i = 1, 2, \dots, 5$  have no common point, the angular coefficient is equal to  $2i + 1$  (as in graph 1.1), the intersection with the abscissa and ordinate axis occurs respectively in the points  $-\frac{2i^2-1}{2i+1}$  and  $2i^2 - 1$ . In practice, as  $i$  increases, the straight line tends to increase the inclination and at the same time sees its intersection with the abscissa axis move away from the origin.

Of course, the **regularities** are the same as those seen above, but reversed.

In particular, about sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  (the straight lines), the values of  $n$  identifying composite  $d_n$  follow each other every  $2i + 1$  units of  $n$ , starting from  $n$  equal to  $2i^2 + 2i$ .

As for the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ , i.e. those that are highlighted in correspondence with the single integer values of  $j$  reported on the abscissa axis, the values of  $n$  that identify composite  $d_n$  always start from  $(3j + 1)$  and follow each other according to the usual recursive law according to which each interval between two values of  $n$  is determined by the length of the previous interval plus 4 units of  $n$ .

Of course, the law describing these regularities is always (1.4).

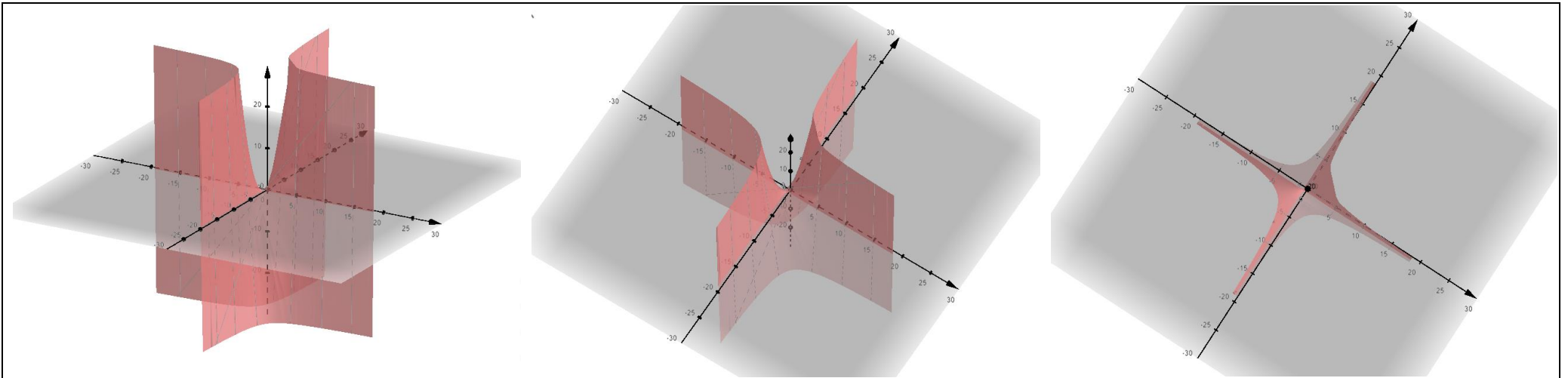
Taking up the usual examples for **primality test**, and with reference to the sequences  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , we want to verify again the primality of:

- A.  $d_n = 47$ , hence  $n = 23$ . This time, on the basis of the condition  $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$  posed in the "Definition 1.3" and under the worst hypothesis ( $j = 1$ ), we obtain in this case  $i \leq 2,9$ , so the verification of the primality of the number 47 requires only 2 checks ( $i = 1$  and  $i = 2$ ). Of course,  $n$  is different from both  $n_{1,j}$  and  $n_{2,j}$ , indeed  $d_n = 47$  is a prime number. In terms of efficiency, the results are completely identical to the canonical method.
- B. Analysing  $d_n = 123.456.789$ , from which  $n = 61.728.394$ , we obtain a number of controls equal to  $i \leq 5.555$ , completely identical to 5.555 suggested by canonical method.

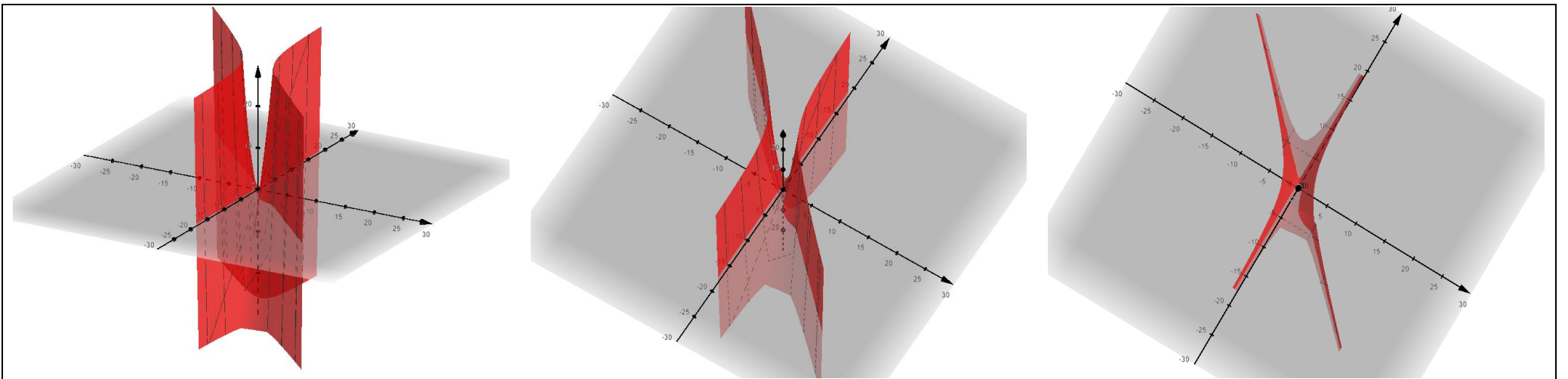
**In conclusion**, in addition to the regularities highlighted, what has been described - if repeated indefinitely - would allow to identify the succession of infinite prime numbers. In fact, given a sequence of odd numbers greater than 1 ( $d_n = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ ), excluding first those values of  $n$  identified by the sequence  $n_{1,j}$ , i.e. 4, 7, 10, 13, ..., then those identified by the sequence  $j$ , i.e. 12, 17, 22, ..., then those of the sequence  $n_{3,j}$  etc., what remains is the infinite sequence of odd numbers  $d_n$  prime. It is a kind of **Eratosthenes' sieve, but more efficient**.

Here are some representations in  $\mathbb{R}^3$  of  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  and  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$





Graph 1.4  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$



Graph 1.5  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$

## 2. The use of the indicator function and the generating function to represent a sequence of prime numbers

The purpose of this second part is to formally describe a sequence of prime numbers. The process is very simple. We take any natural number  $n \geq 2$  and divide it by an indicator (or characteristic) function  $I_p: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  which therefore assumes only two values, zero and one; in particular, zero when  $n$  is a composite number and one when  $n$  is a prime number. If the number  $n$  is divided by zero, it is undefined; if it is divided by 1, it remains equal to itself. It is possible to consider this relationship  $n/I_p$  as a generating function of a sequence<sup>1</sup> and call it elementary generating function,  $G_E(n)$ .

It follows the theorem 2.1.

**THEOREM 2.1** Let:  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_p: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  an indicator function equal to 1 when  $n$  is prime,  $G_E(n) = \frac{n}{I_p}$  an elementary generating function, then, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_E(n)$  defines the sequence of prime numbers.

Using the above mentioned primality definitions, the following definitions of a sequence of prime numbers greater than 2 can be obtained. In particular:

### DEFINITION 2.1 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Let:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (The infinite sequence of odd numbers greater than 1)  
 Let:  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  with  $\{a_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (The infinite sequences of infinite composite odd number)  
 Let:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Or in an equivalent way:  $2ij + i + j \leq n$ ;  $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ ;  $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$ )  
 Let:  $I_p(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \quad \forall i, j, n \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \forall d_n$  (The indicator function equal to 1 when  $d_n$  is a prime number)  
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_p(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined,} & \text{if } I_p(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_p(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$ , defines the sequence of prime numbers greater than 2.

### DEFINITION 2.2 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Let:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (The infinite sequence of odd numbers greater than 1)  
 Let:  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  with  $\{a_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (The infinite sequences of infinite composite odd number)  
 Let:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Or in an equivalent way:  $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$ ;  $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$ ;  $j \leq \frac{n + 1 - 2i^2}{2i + 1}$ )  
 Let:  $I_p(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \quad \forall i, j, n \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \forall d_n$  (The indicator function equal to 1 when  $d_n$  is a prime number)  
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_p(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined,} & \text{if } I_p(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_p(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$ , defines the sequence of prime numbers greater than 2.

However, it is possible to define  $I_p$  also by using the simple prime number definition, which allows to represent a sequence of prime numbers in at least 3 different ways. In particular:

1)  $I_p$  is defined by simply giving the literal definition of prime number (number greater than 1 divisible only by 1 and by itself), hence the following representation:

### DEFINITION 2.3 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF PRIME NUMBERS

Let:  $n, l \in \mathbb{N}$  with  $n \geq 2$  e  $2 \leq l \leq n - 1$   
 Let:  $I_p(n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists l | \frac{n}{l} \in \mathbb{N}, \quad \forall n, l \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \forall n$ , (The indicator function equal to 1 when  $n$  is a prime number)  
 $G_E(n) = \frac{n}{I_p(n)} = \begin{cases} \text{Undefined,} & \text{if } I_p(n) = 0 \\ n, & \text{if } I_p(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n$ , defines the sequence of prime numbers.

<sup>1</sup> Sure, we could define  $G_E(n) = n * I_p(n)$  and get a sequence consisting of prime numbers and zeros, but we prefer "undefined", "does not exist" or "has no meaning" to zero.

2)  $I_P$  is defined continuing to use the definition of prime number, but from another point of view, that of multiplication, hence the following representation:

**DEFINITION 2.4 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF PRIME NUMBERS**

<p>Let: <math>n, l, m \in \mathbb{N}</math> with <math>n \geq 2, 2 \leq l \leq n - 1, 2 \leq m \leq n - 1</math></p> <p>Let: <math>I_P(n) = \begin{cases} 0, &amp; \text{If } \exists l, m \mid l * m = n, \forall n, l, m \\ 1, &amp; \text{Otherwise} \end{cases} \forall n</math> (The indicator function equal to 1 when <math>n</math> is a prime number)</p> <p><math>G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Undefined,} &amp; \text{if } I_P(n) = 0 \\ n, &amp; \text{if } I_P(n) = 1 \end{cases} \forall n</math>, defines the sequence of prime numbers.</p>
--

3)  $I_P$  is defined using indirectly the definition of prime number and in particular by using the Module operator which returns the remainder of a division; we therefore obtain the following representation:

**DEFINITION 2.5 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF PRIME NUMBERS**

<p>Let: <math>n, l \in \mathbb{N}</math> with <math>n \geq 2</math> e <math>2 \leq l \leq n - 1</math></p> <p>Let: <math>I_P(n) = \begin{cases} 0, &amp; \text{If } \exists l \mid n \bmod l = 0, \forall n, l \\ 1, &amp; \text{Otherwise} \end{cases} \forall n</math>, (The indicator function equal to 1 when <math>n</math> is a prime number)</p> <p><math>G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Undefined,} &amp; \text{if } I_P(n) = 0 \\ n, &amp; \text{if } I_P(n) = 1 \end{cases} \forall n</math>, defines the sequence of prime numbers.</p>
---

Obviously, excluding the number 2, the search for prime numbers can be restricted to odd numbers only, verifying that they are divisible only by those odd numbers, if any, between 3 (inclusive) and the integer part of the square root of the odd number itself. A more efficient version of the one in point 1 follows. In particular:

**DEFINITION 2.6 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS**

<p>Let: <math>n, l \in \mathbb{N}_{&gt;0}; d_n = 2n + 1; d_l = 2l + 1</math> with <math>3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})</math></p> <p>Let: <math>I_P(d_n) = \begin{cases} 0, &amp; \text{If } \exists d_l \mid \frac{d_n}{d_l} \in \mathbb{N}, \forall n, l \\ 1, &amp; \text{Otherwise} \end{cases} \forall d_n</math> (The indicator function equal to 1 when <math>d_n</math> is a prime number)</p> <p><math>G_E(n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined,} &amp; \text{if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, &amp; \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall n</math>, defines the sequence of prime numbers greater than 2.</p>
---

Of course, the condition  $3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})$ , in addition to significantly reducing the search, excludes the  $d_l$  existence when  $d_n$  is equal to 3, 5 or 7 and the non-existence of  $d_l$  makes them prime numbers, according to the indicator function  $I_P(d_n)$ . Moreover, the last representation can be further improved in terms of efficiency, by circumscribing the sequence  $d_l$  to the set of prime numbers, but losing the simplicity and compactness of the representation.

### 3. Generalization of the formulas found and Riemann hypothesis

The formulas seen above (the two double sequences),  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  and  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ , have been obtained in such a way that they could describe the infinite sequences of infinite odd composed numbers for all  $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ . In practice, they are applications  $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  that do their job (generate sequences of composite odd numbers) if they operate in  $\mathbb{N}_{>0}^2$ , but also in  $\mathbb{Z}_{>-1}^2$ , as shown in table 3.1 proposed again and relating to the double sequences  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$ .

**Table 3.1 - INFINITE SEQUENCES  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  OF INFINITE ODD NUMBERS**

i\j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

However, it is possible to circumscribe  $\{a_{i,j}\}$  also in areas other than  $\mathbb{N}_{>0}^2$ , such as simply  $\mathbb{N}^2$ , or  $\mathbb{N}_{>1}^2$ , but also starting from integers negative, such as  $\mathbb{Z}_{>-3}^2$  and, if we also want to determine the infinite sequences of infinite even numbers, extend the domain of  $\{a_{i,j}\}$  to  $\mathbb{Q}^2$ , in particular to the odd numbers divided by 2. Operating on sets other than  $\mathbb{N}_{>0}^2$ , different formulas are obtained from those listed above, but it is still possible to define **general formulas** that depend on the set chosen, and in particular on its first value.

Taking as reference the least efficient formula,  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$ , substituting for convenience  $x$  in place of  $i$  and  $y$  in place of  $j$ , and with the aim of using an application defined in  $\mathbb{Z}_{>l}^2$  for all  $l \in \mathbb{Z}$ , we obtain the following formulas, from which the general one in the last row of Table 3.2.

**Table 3.2 - FORMULAS ASSOCIATED TO  $\{a_{x,y}\}$  AND SOLUTIONS OF  $\{a_{x,y}\} = 0$  WHEN DOMAIN VARIES**

Domain	Formulae	$\{a_{x,y}\} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 14x + 14y + 49$	$x = -\frac{7}{2}; y = -\frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 10x + 10y + 25$	$x = -\frac{5}{2}; y = -\frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 6x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; y = -\frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 2x + 2y + 1$	$x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 2x - 2y + 1$	$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 6x - 6y + 9$	$x = \frac{3}{2}; y = \frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 10x - 10y + 25$	$x = \frac{5}{2}; y = \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>4}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 14x - 14y + 49$	$x = \frac{7}{2}; y = \frac{7}{2}$
...	...	...
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)^2$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -\frac{1 - 2l}{2}$

The specific formulas described above can be obtained by the definition of arithmetic sequence, or by adding or subtracting units to the variables  $x$  and  $y$  in the sequence from which we started  $\{a_{x,y}\} = 4xy + 2x + 2y + 1$ . Eg,  $\{a_{x,y}\} = 4(x - 1)(y - 1) + 2(x - 1) + 2(y - 1) + 1 = \dots = 4xy + 6x + 6y + 9$ .

The general formula was obtained from the assumption that we are using hyperbole. In fact, given the general equation of a conic:  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , in our formulas  $b^2 - ac$  is greater than zero.

The reference formula is therefore the following:  $a_{x,y} = 2bxy + 2dx + 2ey + f$ , whose parameters are given by  $b = 2, d = e, f = d * e$ . Finally, table 3.2 shows the values for which  $\{a_{x,y}\} = 0$  and the formulas in function of  $l$  that generate these values.

Compared to table 3.1, the results obtained show how the parameter  $f$  assumes the values shown on the secondary diagonal and the parameters  $d$  and  $e$  are those in correspondence with the row  $i = 0$  and  $j = 0$ .

In the general formula shown in the last row of table 3.2, the domain of  $x$  and  $y$  is required to be the same. However, it is possible to further generalize formula (3.1) so that we can assign different domains to  $x$  and  $y$  and thus  $x \in \mathbb{Z}_{>l}$  and  $y \in \mathbb{Z}_{>m}$  (3.2).

Domain	First general formula	$\{a_{x,y}\} = 0$	
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}(l)\} = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)^2$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -\frac{1 - 2l}{2}$	(3.1)
$x \in \mathbb{Z}_{>l}$ $y \in \mathbb{Z}_{>m}$	$\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -\frac{1 - 2m}{2}$	(3.2)

It is therefore possible to enunciate the following theorem 3.1 which generalizes theorem 1.1 seen above.

**THEOREM 3.1** Fixed  $l, m \in \mathbb{Z}$ . For all  $x \in \mathbb{Z}_{>l}$  and  $y \in \mathbb{Z}_{>m}$ , the double sequence in  $x$  and  $y$   $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$  with  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l; y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  describes the infinite sequences formed by infinite composite odd numbers.

In a similar way, but with some more difficulty, it is possible to obtain a formula that generalizes the most efficient one seen above:  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ .

The infinite sequences of infinite odd numbers that  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  describes (Table 3.3) are again proposed, but this time in a more extended way in order to better grasp the affinities with the specific formulae listed below.

**Table 3.3 - INFINITE SEQUENCES  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  OF INFINITE ODD NUMBERS**

i \ j	...	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	...	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	...	-17	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	...	-45	-15	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	...	-65	-39	-13	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	...	-77	-55	-33	-11	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	...	-81	-63	-45	-27	-9	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	...	-77	-63	-49	-35	-21	-7	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	...	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	...	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	...
-3	...	115	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	...
-4	...	175	161	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	-7	-21	-35	-49	-63	-77	...
-5	...	243	225	207	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	-9	-27	-45	-63	-81	...
-6	...	319	297	275	253	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	-11	-33	-55	-77	...
-7	...	403	377	351	325	299	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	-13	-39	-65	...
-8	...	495	465	435	405	375	345	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	-15	-45	...
-9	...	595	561	527	493	459	425	391	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	-17	...
-10	...	703	665	627	589	551	513	475	437	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	...
-11	...	819	777	735	693	651	609	567	525	483	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Also in this case, after replacing  $i$  with  $x$  and  $j$  with  $y$ , the different specific formulae were obtained by adding or subtracting units to the variables  $x$  and  $y$  in the formula from which we started  $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$ .

The general formula was instead obtained always starting from the assumption that we are dealing with hyperbolae, but in this case of equation  $a_{x,y} = ax^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f$ , whose parameters are given by  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $d = 3(e - 1)$ ,  $f = d * e - e^2$ .

**Table 3.4** - FORMULAS ASSOCIATED TO  $\{a_{x,y}\}$  AND SOLUTIONS OF  $\{a_{x,y}\} = 0$  WHEN DOMAIN VARIES

Domain	Formulae	$\{a_{x,y}\} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(18)x + 2(7)y + 77$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 36x + 14y + 77$	$x = -\frac{7}{2}; y = -x - \frac{11}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(12)x + 2(5)y + 35$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 24x + 10y + 35$	$x = -\frac{5}{2}; y = -x - \frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(6)x + 2(3)y + 9$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 12x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; y = -x - \frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(0)x + 2(1)y - 1$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$	$x = -\frac{1}{2}; y = -x + \frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-6)x + 2(-1)y + 5$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 12x - 2y + 5$	$x = \frac{1}{2}; y = -x + \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-12)x + 2(-3)y + 27$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 24x - 6y + 27$	$x = \frac{3}{2}; y = -x + \frac{9}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-18)x + 2(-5)y + 65$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 36x - 10y + 65$	$x = \frac{5}{2}; y = -x + \frac{13}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>4}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-24)x + 2(-7)y + 119$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 48x - 14y + 119$	$x = \frac{7}{2}; y = -x + \frac{17}{2}$
...	...	...
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 2(-6l)x + 2(1 - 2l)y + (8l^2 - 2l - 1)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -x + \frac{4l + 1}{2}$

By comparing table 3.3 with the results obtained, it is confirmed that the parameter  $f$  assumes the values shown on the secondary diagonal and the parameter  $e$  is the one corresponding to row  $i = 0$  and column  $j = 1$ .

Also in this case, have been reported the values for which  $\{a_{x,y}\} = 0$  and the formulas in function of  $l$  that generate said values. In this regard, it can be noted that the relation  $\{a_{x,y}\} = 0$  is verified for the same constant  $(-3/2)$  only when the domain of  $\{a_{x,y}\}$  is  $\mathbb{N}^2$ .

Similarly to what was done previously, the general formula shown in the last row of table 3.4 is extended to the case in which  $x$  and  $y$  have different domains ( $x \in \mathbb{Z}_{>l}; y \in \mathbb{Z}_{>m}$ ).

Domain	<b>Second general formula (more efficient)</b>	$\{a_{x,y}\} = 0$
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}(l)\} = 4x^2 + 4xy + 2(-6l)x + 2(1 - 2l)y + (8l^2 - 2l - 1)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -x + \frac{4l + 1}{2}$ (3.3)
$x \in \mathbb{Z}_{>l}$ $y \in \mathbb{Z}_{>m}$	$\{a_{x,y}(l, m)\} = 4x^2 + 4xy + 2(-4l - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (4l^2 + 4lm - 2m - 1)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -x + \frac{2l + 2m + 1}{2}$ (3.4)

It is therefore possible to enunciate the following theorem 3.2 which generalizes theorem 1.2 seen above.

**THEOREM 3.2** Fixed  $l, m \in \mathbb{Z}$ . For all  $x \in \mathbb{Z}_{>l}$  and  $y \in \mathbb{Z}_{>m}$ , the double sequence in  $x$  and  $y$   $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$  with  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l}^2; y>m \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  describes the infinite sequences formed by infinite composite odd numbers.

The new formulas found (theorem 3.1 and 3.2) allow to generalize the definitions given previously of primality and sequence of odd prime numbers (in this case in a single definition) and of a set of odd prime numbers.

**DEFINITION 3.1 - REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER AND A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS**

Let:  $\{d_n\} = 2n + 1$  con  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)  
 Fixed  $l, m \in \mathbb{Z}$ .  
 Let:  $x \in \mathbb{Z}_{>l}, y \in \mathbb{Z}_{>m}$   
 Let:  $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$ ,  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l, y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$   
 (The infinite sequences of infinite composite odd numbers)  
 Let:  $a_{x,y}(l, m) \leq d_n$  (Or in an equivalent way:  
 $2xy + (1 - 2m)x + (1 - 2l)y + (2lm - l - m) \leq n$ ;  $x \leq \frac{n+(2l-1)y+(l+m-2lm)}{2y+(1-2m)}$ ;  $y \leq \frac{n+(2m-1)x+(l+m-2lm)}{2x+(1-2l)}$ )  

$$d_n \text{ is prime} \Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n$$
 (but also:  $n$  identifies a  $d_n$  prime  $\Leftrightarrow \nexists 2xy + (1 - 2m)x + (1 - 2l)y + (2lm - l - m) = n \forall x, y, n$ )  
 Or  

$$d_n \text{ is composite} \Leftrightarrow \exists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n; \text{ else } d_n \text{ is prime}$$
 (but also:  $n$  identifies a  $d_n$  composite  $\Leftrightarrow \exists 2xy + (1 - 2m)x + (1 - 2l)y + (2lm - l - m) = n, \forall x, y, n$ ;  
 else  $n$  identifies a  $d_n$  prime)  
 Let:  $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{If } d_n \text{ is prime} \\ 0, & \text{If } d_n \text{ is composite} \end{cases} \forall d_n$  (The indicator function equal to 1 when  $d_n$  is a prime number)  

$$G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined, if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall d_n, \text{ defines the sequence of prime numbers greater than 2.}$$

**DEFINITION 3.2 - REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER AND A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS**

Let:  $\{d_n\} = 2n + 1$  con  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)  
 Fixed  $l, m \in \mathbb{Z}$   
 Let:  $x \in \mathbb{Z}_{>l}, y \in \mathbb{Z}_{>m}$   
 Let  $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4x^2 + 4xy + 2(-4l - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (4l^2 + 4lm - 2m - 1)$ ,  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l, y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$   
 (The infinite sequences of infinite composite odd numbers)  
 Let:  $a_{x,y}(l, m) \leq d_n$  (Or in an equivalent way:  $2x^2 + 2xy + (-4l - 2m)x + (1 - 2l)y + (2l^2 + 2lm - m - 1) \leq n$ ;  
 $\frac{2l+m-y-\sqrt{y^2-(2m+2)y+m^2+2m+2+2n}}{2} \leq x \leq \frac{2l+m-y+\sqrt{y^2-(2m+2)y+m^2+2m+2+2n}}{2}$ ;  $y \leq \frac{n-2x^2+(4l+2m)x-2l^2-2lm+m+1}{2x+1-2l}$ )  

$$d_n \text{ is prime} \Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n$$
 (but also:  $n$  identifies a  $d_n$  prime  $\Leftrightarrow \nexists 2x^2 + 2xy + (-4l - 2m)x + (1 - 2l)y + (2l^2 + 2lm - m - 1) = n \forall x, y, n$ )  
 Or  

$$d_n \text{ is composite} \Leftrightarrow \exists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n; \text{ else } d_n \text{ is prime}$$
 (but also:  $n$  identifies a  $d_n$  composite  $\Leftrightarrow \exists 2x^2 + 2xy + (-4l - 2m)x + (1 - 2l)y + (2l^2 + 2lm - m - 1) = n$ ,  
 $\forall x, y, n$ ; else  $n$  identifies a  $d_n$  prime)  
 Let:  $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{If } d_n \text{ is prime} \\ 0, & \text{If } d_n \text{ is composite} \end{cases} \forall d_n$  (The indicator function equal to 1 when  $d_n$  is a prime number)  

$$G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined, if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall d_n, \text{ defines the sequence of prime numbers greater than 2.}$$

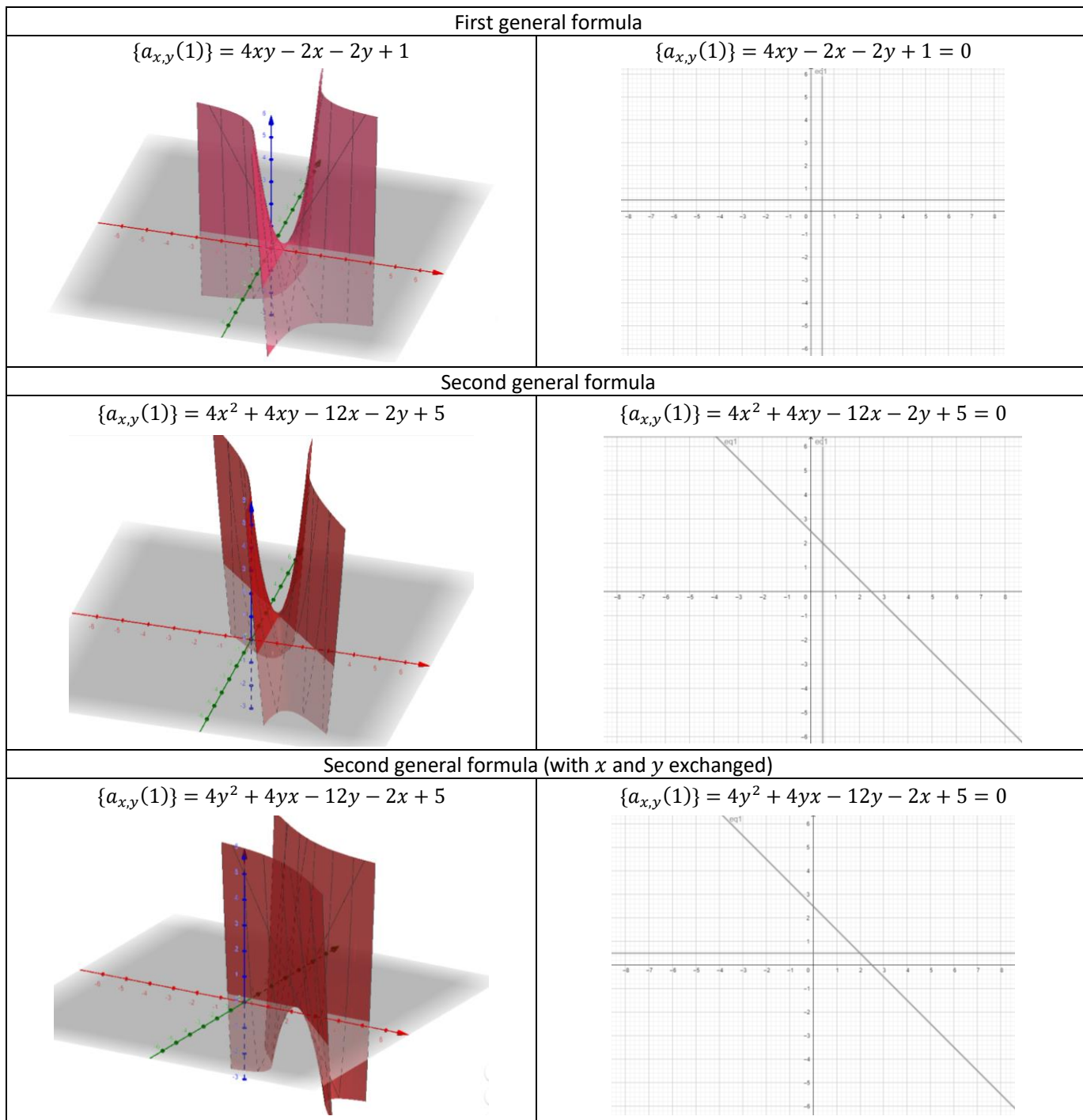
**DEFINITION 3.3 - REPRESENTATION OF A SET OF ODD PRIME NUMBERS**

Fixed  $l, m \in \mathbb{Z}$   
 Let:  $n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Let:  $x \in \mathbb{Z}_{>l}, y \in \mathbb{Z}_{>m}$   
 Let:  $A = \{z \in \mathbb{N}_{>2} \mid z = 2n + 1\}$   
 Let:  $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)\}$   
 or  
 Let:  $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4x^2 + 4xy + 2(-4l - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (4l^2 + 4lm - 2m - 1)\}$   

$$\text{The set } A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\} \text{ defines the set of infinite odd prime numbers.}$$

Returning to the results obtained, and in particular those with domain  $\mathbb{Z}_{>1}^2$ , first of all we highlight some coincidences with the **Riemann conjecture**. The zeta function was in fact studied by Riemann in the context of complex numbers with real part greater than 1 and is based on the assumption that non-trivial zeros are distributed around the real line  $x = \frac{1}{2}$ , the same that verifies  $\{a_{x,y}(l, m)\} = 0$  when  $l = m = 1$ , i.e. when  $x$  and  $y$  are greater than 1, both in the first and in the second general formula<sup>2</sup>. Of course we are talking about different things but in some ways complementary, since the zeta function is constructed in such a way as to be formed only by prime numbers and  $\{a_{x,y}(l, m)\}$  which, for  $x > l$  and  $y > m$ , certainly generates non-prime numbers<sup>3</sup>.

Below are the graphs in  $\mathbb{R}^3$  of  $\{a_{x,y}(l = m = 1)\}$  and those obtained by solving  $\{a_{x,y}(l = m = 1)\} = 0$ .



**Graph 3.1 - FIRST AND SECOND GENERAL FORMULA WITH  $l = m = 1$**

<sup>2</sup> In reality the second formula is also verified for  $y = -x + \frac{5}{2}$ .

<sup>3</sup> It should be remembered that - fixed  $l, m$  -  $\{a_{x,y}(l, m)\}$  identifies sequences of not-prime numbers also for certain values of  $x \leq l$  and  $y \leq m$ , as well as that sequence consisting of all odd numbers and therefore also primes.



After all, regardless of any coincidences, in this paper we have shown, both analytically and graphically, how the odd composite numbers are distributed. A distribution that follows very specific regularities.

Since composite numbers are distributed with regularity and are complementary to primes, then also the primes are distributed with regularity. The Riemann conjecture - understood, on the basis of non-trivial zeros, as a harmonic and non-random distribution of prime numbers - is therefore true.

However, if we exclude the set of composite numbers and analyse the distribution of primes separately, then, lacking the support of composite numbers and their complementarity, we could no longer argue that the distribution of prime numbers is regular. In fact, they show a distribution whose only certainty is that they become increasingly "rarefied" as the digits considered increase. The Riemann conjecture is therefore false.

**In conclusion, the Riemann hypothesis is true only if analysed together with the composite numbers, otherwise it is false.**

We therefore deduce that it is impossible to prove that the non-trivial zeros of the Riemann function are distributed around the real line  $x = \frac{1}{2}$ , since the zeta function is constructed in such a way as to be formed by only prime numbers, without having the support of composite numbers. At the same time it is impossible to prove its falsity, since non-trivial zeros will always be placed on the line  $x = \frac{1}{2}$ , due to the complementarity of prime numbers with "true regular" composite numbers.

**It could be closed by saying that the Riemann hypothesis is "falsely true".**

We want to conclude this paper with considerations that refer above all to Greek mythology, according to which "*In the beginning was the Chaos*" from which the order (the Cosmos) arose which did not erase the Chaos but coexists in balance with it.

**In fact, we can imagine the disorder of prime numbers as the representation not of randomness, but of chaos<sup>4</sup>, from which the order of composite numbers originates, which in turn explains the chaos of prime numbers. In a complementary relationship, the order of composite numbers and the chaos of prime numbers coexist in equilibrium in the set of natural numbers, almost in mutualistic symbiosis.**

Without the chaos of prime numbers there cannot exist the order of composite numbers and in general the order that characterizes arithmetic and perhaps the whole of mathematics, with its rules and all that mathematics itself can represent, including chaos of the prime numbers represented in this paper.

Find a simple formula (without factorials, summations, logarithms, etc.) that can describe all prime numbers would be finding the formula from which mathematics was generated, a contradiction.

Perhaps, as the Pythagoreans maintained, everything originates from the number 1, or rather the unit, from which the chaos of prime numbers has perhaps been generated, from which in turn arose the order of composite numbers and of all mathematics. **A sort of big bang, where Arithmetic can be understood as the numerical representation of the origin and evolution of the universe.**

---

<sup>4</sup> Intended as a set of signals that are placed halfway between "*a regular and predictable trend and an accidental and unpredictable one*" [6]

## References

- [1] E. Gracian, I numeri primi. Un lungo cammino verso l'infinito, RBA Italia S.r.l., 2018.
- [2] J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, (2003).
- [3] H. Iwaniec Almost-primes represented by quadratic polynomials. *Invent. Math.*, 47(2):171–188, (1978).
- [4] M. Wolf, F. Wolf. Representation theorem of composite odd numbers indices. *SCIREA Journal of Mathematics, Journal of Mathematics* 3(3), pp.106-117. hal-01832624, (2018).
- [5] Wikipedia: *Formulas for primes*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Formula\\_for\\_primes](https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes)
- [6] M.C. Catone, *La teoria del caos nelle scienze sociali*, Tesi di Dottorato, Firenze, (2010-2012).

# Appunti sui numeri primi: regolarità sui numeri composti, rappresentazioni formali e ipotesi di Riemann

## Introduzione

Lo scopo del presente *paper* è quello fornire, attraverso le regolarità che emergono sui numeri composti, alcune rappresentazioni formali di primalità, insieme di numeri primi e successione di numeri primi. Dette regolarità saranno inoltre inquadrare nel contesto dell'ipotesi di Riemann. Il presente lavoro è stato diviso in tre parti (paragrafi).

Nella prima, saranno individuate due formule, definite in  $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ , che descrivono le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti. Sulla base di dette formule, seguiranno due definizioni, sia di primalità che di insiemi di numeri primi. Inoltre, saranno utilizzati dei grafici atti a meglio rappresentare le regolarità emerse, nonché alcuni esempi sull'efficienza delle formule ai fini della primalità.

Nella seconda parte, con l'obiettivo di rappresentare una successione di numeri primi, saranno applicati i concetti di funzione indicatrice (o caratteristica) e di funzione generatrice alle definizioni di primalità di cui sopra. Altre rappresentazioni formali saranno date con riferimento anche alla semplice definizione di numero primo.

Nella terza parte si cercherà di generalizzare le due formule trovate nella prima parte a domini diversi da  $\mathbb{N}_{>0}^2$ . Le definizioni date in precedenza saranno riadattate alle nuove formule e, infine, le risultanze ottenute saranno analizzate nel contesto dell'ipotesi di Riemann, un'ipotesi non dimostrabile. Queste le conclusioni.

## 1. Primalità, insieme di numeri primi e regolarità attraverso le successioni di numeri dispari composti

Per individuare le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti si seguirà la seguente impostazione metodologica.

Siano:  $i, j \in \mathbb{Z}$

Sia:  $d_j = 2j + 1$  (La successioni di infiniti numeri dispari)

Sia:  $a_{i,j} = 3d_j + (i - 1) * 2d_j$  (Le infinite successioni aritmetiche - con primo termine  $3d_j$  e ragione  $2d_j$  - di infiniti numeri dispari), con  $a_{i,j} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ . Tali successioni a due indici sono state individuate partendo dalla semplice tavola pitagorica, escludendo da essa i numeri pari e comparando le diverse successioni aritmetiche poste in corrispondenza di ciascuna riga (o colonna) della matrice a partire dal secondo elemento della successione.

Inoltre, poiché  $d_j = 2j + 1$ , si ricava:

$$\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = 4ij + 2i + 2j + 1, \{a_{i,j}\} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Al variare  $i$  e  $j$  in  $\mathbb{Z}$ , si ottengono quindi le infinite successioni di infiniti numeri dispari rappresentati in tabella 1.1.

**Tabella 1.1** - INFINITE SUCCESSIONI  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  DI INFINITI NUMERI DISPARI

i \ j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Si può pensare alla tabella 1.1 come una matrice infinita  $(a_{i,j})$  associata all'applicazione  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  ed enunciare alcune proprietà:

- a)  $a_{i,j} = a_{j,i}$  La matrice è simmetria rispetto alla diagonale principale, ma anche a quella secondaria
- b)  $a_{i,j} = -a_{i,-(j+1)}$  Per ogni riga  $i$ , ogni elemento  $a_{i,j}$  ha il suo opposto in  $a_{i,-(j+1)}$
- c)  $a_{i,j} = -a_{-(i+1),j}$  Per ogni colonna  $j$ , ogni elemento  $a_{i,j}$  ha il suo opposto in  $a_{-(i+1),j}$
- d)  $a_{i,-1/2} = a_{-1/2,j} = 0$  Soluzioni dell'equazione  $a_{i,j} = 0$  è il luogo geometrico dei punti descritti da  $i = -\frac{1}{2}$  e  $j = -\frac{1}{2}$ .

Limitando l'analisi a  $i, j \in \mathbb{N}$ , dalla tabella 1 è possibile notare come nella parte evidenziata in rosso ( $i, j > 0$ ) compaiano solo numeri composti, mentre numeri primi maggiori di 2 possono esistere solo nella parte evidenziata in verde, ossia all'interno della riga  $i = 0 \forall j > 0$  ( $a_{0,j} = \dots = 2j + 1$ ) e colonna  $j = 0 \forall i > 0$  ( $a_{i,0} = \dots = 2i + 1$ ).

**TEOREMA 1.1** Per ogni  $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ , la successione a due indici  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4ij + 2i + 2j + 1$  con  $\{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti.

E' possibile quindi definire un numero dispari  $d_n = 2n + 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ ) primo nel seguente modo:

**DEFINIZIONE 1.1 – RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI**

Siano:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Sia:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)  
 Sia:  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  con  $\{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)  
 Sia:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Oppure in modo equivalente:  $2ij + i + j \leq n$ ;  $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ ;  $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$ )

$$d_n \text{ è primo} \Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$$

$$\text{(ma anche: } n \text{ identifica un } d_n \text{ primo} \Leftrightarrow \nexists 2ij + i + j = n \forall i, j, n)$$

Oppure:

$$d_n \text{ è composto} \Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n; \text{ altrimenti } d_n \text{ è primo}$$

$$\text{(ma anche: } n \text{ identifica un } d_n \text{ composto} \Leftrightarrow \exists 2ij + i + j = n \forall i, j, n; \text{ altrimenti } n \text{ identifica un } d_n \text{ primo)}$$

La condizione " $a_{i,j} \leq d_n$ ", o quelle ad essa equivalenti, è funzionale ad evitare una ricerca infinita qualora  $d_n$  sia un numero primo, ma anche a restringere la ricerca qualora  $d_n$  sia un numero composto.

E' possibile inoltre ragionare in termini di insiemi numerici e definire l'insieme degli infiniti numeri dispari primi.

**DEFINIZIONE 1.2 – RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME DI NUMERI DISPARI PRIMI**

Siano:  $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Sia  $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$  oppure  $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$   
 Sia  $B = \{z \mid z = 4xy + 2x + 2y + 1\}$   
**L'insieme  $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$  definisce l'insieme dei numeri primi dispari**

Di seguito, una lettura grafica dell'impostazione metodologica seguita e delle **regolarità** riscontrate nelle infinite successioni di numeri composti descritte da  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4ij + 2i + 2j + 1$ .

A tal fine, si è scelto di verificare per quali valori di  $n$  si ottengano  $d_n$  composti, eguagliano a  $\{d_n\} = 2n + 1$  le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti descritte da  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4ij + 2i + 2j + 1$ , da cui:

$$\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2ij + i + j, \quad \{n_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>3} \tag{1.2}$$

Rappresentando  $n$  sull'asse delle ordinate,  $j$  (o in modo equivalente  $i$ ) sull'asse delle ascisse e facendo variare  $i$  (o in modo equivalente  $j$ ) ad esempio da 1 a 5, si ottengono le seguenti successioni:

$$\{\{n_{i,j}\}_{i=1}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2 * 1 * j + 1 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4,7,10,13, \dots\}$$

$$\{\{n_{i,j}\}_{i=2}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2 * 2 * j + 2 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 2\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7,12,17,22, \dots\}$$

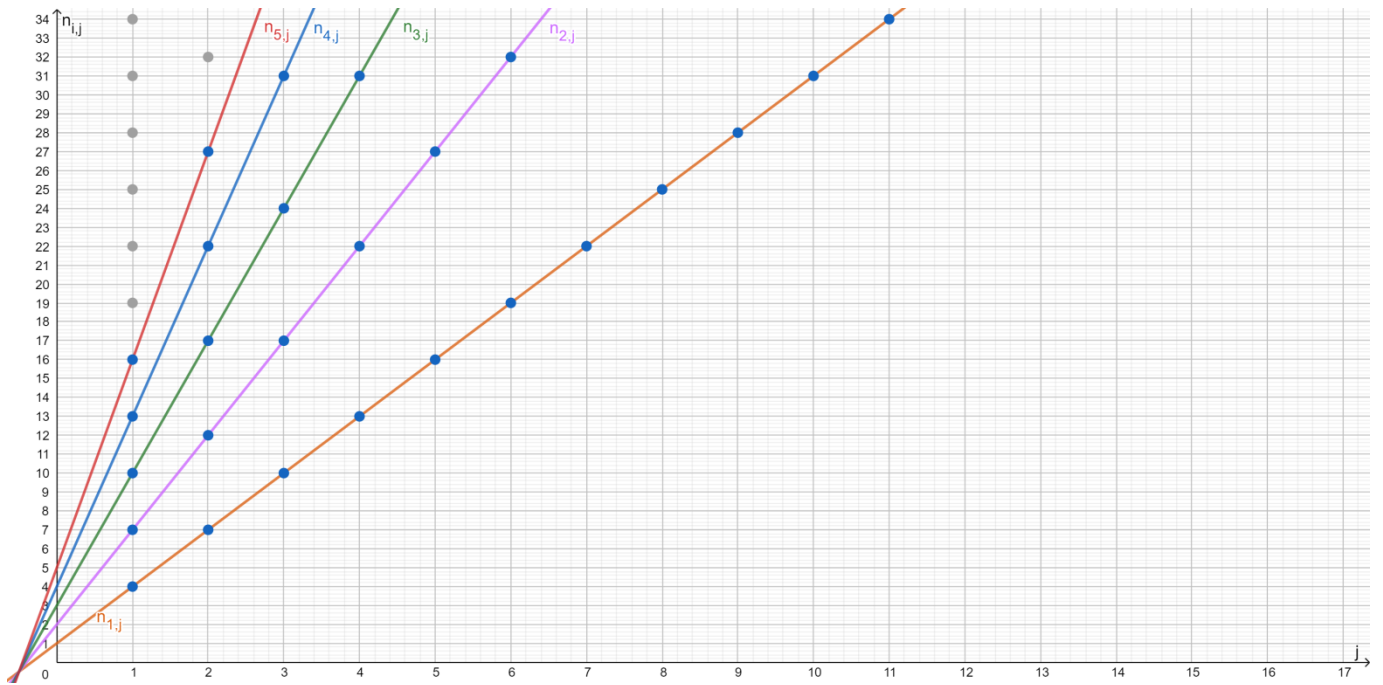
$$\{\{n_{i,j}\}_{i=3}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2 * 3 * j + 3 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 3\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10,17,24,31, \dots\}$$

$$\{\{n_{i,j}\}_{i=4}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2 * 4 * j + 4 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 4\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13,22,31,40, \dots\}$$

$$\{\{n_{i,j}\}_{i=5}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2 * 5 * j + 5 + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 5\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16,27,38,49, \dots\}$$

...

$$\{\{n_{i,j}\}_{i=k}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2 * k * j + k + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2k + 1)j + k\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(3k + 1), (5k + 2), (7k + 3), (9k + 4), \dots\}$$



**Grafico 1.1** - SUCCESIONI  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  DI  $n \mid d_n$  E' UN NUMERO COMPOSTO

Il grafico 1.1 sopra esposto mostra le regolarità sulle diverse successioni che, per una maggiore chiarezza visiva, sono state rappresentate in  $\mathbb{R}$ . Le successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  possono essere infatti pensate come un fascio di rette con centro in  $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ; le rette intersecano l'asse delle ascisse  $j$  in  $-\frac{i}{2i+1}$  e quello delle ordinate in  $i$ ; hanno inoltre coefficiente angolare pari a  $2i + 1$ . Per  $i = 1$  si ricava la prima retta  $n_{1,j} = 3j + 1$ , mentre per  $i$  molto grande si ottiene una retta che interseca l'asse delle ascisse in un punto prossimo a  $-\frac{1}{2}$  e risulta quasi parallela all'asse delle ordinate.

Tornando a  $\mathbb{N}_{>0}$ , le regolarità nel susseguirsi di numeri  $n$  che identificano  $d_n$  composti possono essere facilmente osservate sia sulle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  (le rette), che  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ , ossia le successioni che si osservano in corrispondenza dei valori interi di  $j$  presenti sull'asse delle ascisse.

Riguardo alle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , i numeri  $n$  che identificano  $d_n$  composti si susseguono ogni  $2i + 1$  unità di  $n$ , a partire da  $n$  pari a  $3i + 1$ .

Riguardo alle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2j + 1)i + j\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ , analogamente al caso precedente, ad identificare  $d_n$  composti sono quei valori di  $n$  che si susseguono ogni  $2j + 1$  unità di  $n$  a partire da  $n$  pari a  $3j + 1$ .

Del resto, la parte evidenziata in rosso nella tabella 1.1 mostra le stesse successioni, sia se esse vengano analizzate per righe, che per colonne. Naturalmente, la legge che descrive queste regolarità è la seguente:  $\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2ij + i + j$ .

Utilizzando per esempio le successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  per la **verifica della primalità** e ricordando che  $n$  identifica un  $d_n$  composto se e solo se esiste un elemento della successione  $\{n_{i,j}\} = n$ ,  $\forall i \leq \frac{n-j}{2j+1}$  e  $j = 1$  (ipotesi peggiore), si considerino i seguenti due esempi.

- A.  $d_n = 47$ , da cui  $n = 23$ . Sulla base della condizione  $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$  posta nella "Definizione 1.1" e sotto l'ipotesi peggiore ( $j = 1$ ), si richiede di effettuare controlli sulle prime sette successioni ( $i \leq 7,3$ ), ossia quelle che evidenziano, in corrispondenza del primo elemento della successione ( $j = 1$ ), un valore non superiore a 23 o, in altre parole, quelle la cui anti-immagine mostra, in corrispondenza del numero 23, un valore maggiore o uguale a 1. La ricerca risulta quindi meno efficiente di quella canonica che suggerisce di dividere 47 per quei numeri dispari compresi tra 3 (incluso) e  $\lceil \sqrt{47} \rceil = 6$ , e quindi solo due numeri, 3 e 5.
- B. La minore efficienza del metodo proposto risulta più evidente quando il numero da sottoporre a verifica è grande. Ad esempio, per  $d_n = 123.456.789$ , da cui  $n = 61.728.394$ ; segue un numero di controlli sulle diverse successioni  $n_{i,j}$  pari a  $i \leq 20.576.131$ ; un numero di gran lunga superiore a quello proposto dal metodo canonico, ossia  $\frac{\lceil \sqrt{123.456.789} \rceil}{2} = 5.555$ .

Tuttavia, in termini di efficienza, i risultati sono del tutto identici a quelli del metodo canonico seguendo il **secondo approccio** qui di seguito descritto. Si possono infatti sfruttare le infinite successioni di numeri dispari composti descritte dalla diagonale secondaria e dalle antidiagonali poste sotto (o sopra) ad essa nella matrice  $(a_{i,j}) \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$ , con gli elementi  $a_{i,j}$  che vanno dall'angolo in basso a sinistra a quello in alto a destra (Tabella 1.2).

**Tabella 1.2** - MATRICE  $(a_{i,j})$  OTTENUTA DA  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1, \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

La formula che descrive le successioni di numeri presenti sulla diagonale secondaria (colore rosso scuro) e sulle altre antidiagonali poste sotto ad essa (colore rosso) è facilmente ricavabile "giocando" con  $i$  e  $j$ ; in particolare:

$$\text{Se } j = i \Rightarrow \{a_{i,i}\} = \dots = 4i^2 + 4i + 1 \text{ (antidiagonale: 9, 25, 49, 81, ...)}$$

$$\text{Se } j = i + 1 \Rightarrow \{a_{i,i+1}\} = \dots = 4i^2 + 8i + 3 \text{ (antidiagonale: 15, 35, 63, 99, ...)}$$

$$\text{Se } j = i + 2 \Rightarrow \{a_{i,i+2}\} = \dots = 4i^2 + 12i + 5 \text{ (antidiagonale: 21, 45, 77, 117, ...)}$$

....

$$\text{Se } j = i + k \Rightarrow \{a_{i,i+k}\} = \dots = 4i^2 + (4k)i + (2k - 1)$$

Continuando per comodità ad utilizzare la variabile  $j$ , è possibile definire le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti presenti sulle antidiagonali nel seguente modo:

$$\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \quad \{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}. \quad (1.3)$$

Da cui segue il teorema:

**TEOREMA 1.2** Per ogni  $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ , la successione a due indici  $\{a_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  con  $\{a_{i,j}\} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti.

Da cui la seguente matrice:

**Tabella 1.3** - MATRICE  $(a_{i,j})$  OTTENUTA DA  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

In questo caso, la soluzione dell'equazione  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1 = 0$  è data dal luogo geometrico descritto dalle rette  $i = -\frac{1}{2}e$  e  $j = -i + \frac{1}{2}$ .

Naturalmente, l'insieme delle successioni  $\{a_{i,j}\}$  non mutano se  $i$  e  $j$  vengono scambiati ( $a_{i,j} = 4j^2 + 4ji + 2i - 1$ ): la matrice nella tabella 1.3 viene semplicemente trasposta.

Analogamente al caso precedente, è possibile fornire le seguenti definizioni di primalità di un numero dispari e di un insieme di numeri primi maggiori di 2.

**DEFINIZIONE 1.3 - RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI**

Siano:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$

Sia:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)

Sia:  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  con  $\{a_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)

Sia:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Oppure in modo equivalente:  $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$ ;  $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$ ;  $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$ )

$d_n$  è primo  $\Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$

(ma anche:  $n$  identifica un  $d_n$  primo  $\Leftrightarrow \nexists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$ )

Oppure:

$d_n$  è composto  $\Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$ ; altrimenti  $d_n$  è primo

(ma anche:  $n$  identifica un  $d_n$  composto  $\Leftrightarrow \exists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$ ; altrimenti  $n$  identifica un  $d_n$  primo)

**DEFINIZIONE 1.4 – RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME DI NUMERI DISPARI PRIMI**

Siano:  $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$

Sia:  $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$  oppure  $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$

Sia:  $B = \{z \mid z = 4x^2 + 4xy + 2y - 1\}$

**L'insieme  $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$  definisce l'insieme dei numeri primi dispari**

Di seguito, la lettura grafica dell'impostazione metodologica seguita che permette di evidenziare meglio le **regolarità** riscontrate nelle infinite successioni di numeri dispari composti descritte da  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ .

Come in precedenza, con l'obiettivo di individuare i valori di  $n$  che rendono  $d_n = 2n + 1$  un numero composto, si pone  $d_n = a_{i,j}$ , da cui si ricava:

$$\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ij + j - 1, \quad \{n_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>3} \quad (1.4)$$

In questo caso, rappresentando sempre  $n_{i,j}$  sull'asse delle ordinate, si possono comunque ottenere due diversi grafici:

1. uno nel quale si rappresenta  $i$  sull'asse delle ascisse e si analizzano le diverse successioni che si generano al variare di  $j$  da 1 a 5 (per esempio);
2. l'altro nel quale si rappresenta  $j$  sull'asse delle ascisse e si analizzano le diverse successioni che si generano al variare di  $i$  da 1 a 5.

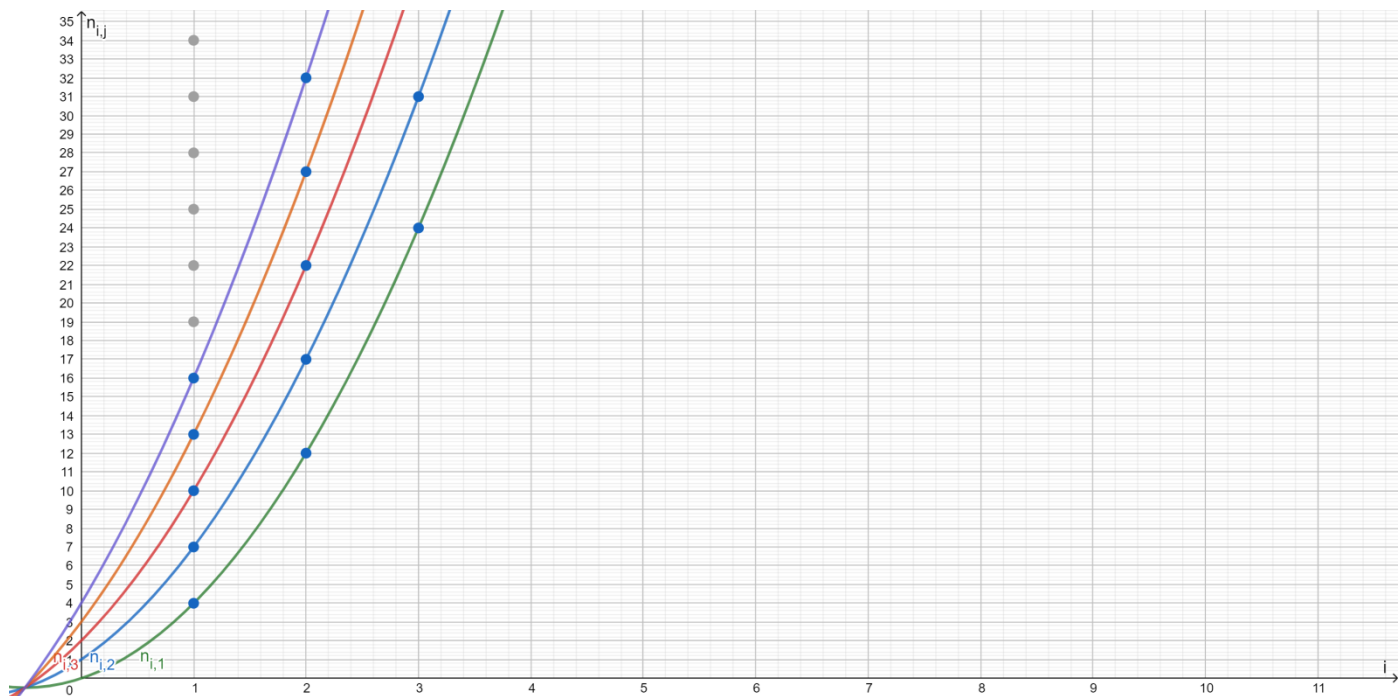
Nel primo caso, con  $i$  sull'asse delle ascisse e facendo variare  $j$  da 1 a 5, si hanno:

$$\begin{aligned} \{\{n_{i,j}\}_{j=1}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 1 + 1 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 12, 24, 40 \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=2}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 2 + 2 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 4i + 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 17, 31, 49, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=3}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 3 + 3 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 6i + 2\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 22, 38, 58, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=4}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 4 + 4 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 8i + 3\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 27, 45, 67, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=5}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * 5 + 5 - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 10i + 4\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 32, 52, 76, \dots\} \\ \dots & \\ \{\{n_{i,j}\}_{j=k}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2 * i * k + k - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2ki + k - 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \\ &= \{(3k + 1), (5k + 7), (7k + 17), (9k + 31), \dots\} \end{aligned}$$

Nel secondo caso, con  $j$  sull'asse delle ascisse e facendo variare  $i$  da 1 a 5, si hanno:

$$\begin{aligned} \{\{n_{i,j}\}_{i=1}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 1^2 + 2 * 1 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 12, 24, 40 \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=2}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 2^2 + 2 * 2 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 7\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{12, 17, 22, 27, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=3}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 3^2 + 2 * 3 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 17\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{24, 31, 38, 45, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=4}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 4^2 + 2 * 4 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 31\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{40, 49, 58, 67, \dots\} \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=5}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * 5^2 + 2 * 5 * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 49\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{60, 71, 82, 93, \dots\} \\ \dots & \\ \{\{n_{i,j}\}_{i=k}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2 * k^2 + 2 * k * j + j - 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2k + 1)j + (2k^2 - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \\ &= \{(2k^2 + 2k), (2k^2 + 4k + 1), (2k^2 + 6k + 2), (2k^2 + 8k + 3), \dots\} \end{aligned}$$

Di seguito i grafici che ne mostrano le regolarità.



**Grafico 1.2 - SUCCESIONI**  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j-1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  **DI**  $n \mid d_n$  **E' UN NUMERO COMPOSTO**

Anche in questo caso, il grafico è stato rappresentato in  $\mathbb{R}$ . In particolare, le successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  possono essere pensate come un fascio di parabole che hanno un punto in comune sempre in  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ , intersecano l'asse delle ascisse nei punti  $\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 2j + 2}}{2}$  e quello delle ordinate in  $j - 1$  ed hanno vertice in  $(-\frac{j}{2}; -\frac{j^2 - 2j + 2}{2})$  e asse  $i = -\frac{j}{2}$ .

**Regolarità** vengono evidenziate sia sulle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  che  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , queste ultime sono le successioni che si evidenziano in corrispondenza dei singoli valori interi di  $i$  riportati sull'asse delle ascisse.

In particolare, riguardo a  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j-1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  (le parabole), i numeri  $n$  che identificano  $d_n$  composti iniziano sempre da  $3j + 1$ , ma si susseguono con una regolarità non più costante come visto in precedenza (+3 unità di  $n$  per la prima successione, +5 unità di  $n$  per la seconda successione, etc.), bensì seguono una legge ricorsiva secondo la quale ogni intervallo tra due numeri  $n$  che identificano  $d_n$  composti è pari alla lunghezza dell'intervallo precedente più 4 unità di  $n$ .

Riguardo invece alle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i+1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , ovvero quelle che si evidenziano in corrispondenza dei singoli valori interi di  $i$  riportati sull'asse delle ascisse, ad identificare  $d_n$  composti sono quei valori di  $n$  che, a partire da  $n$  pari a  $2i^2 + 2i$ , si susseguono ogni  $2i + 1$  unità di  $n$ .

Naturalmente, la legge che descrive queste regolarità è la (1.4).

Utilizzando le successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j-1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  per la **verifica della primalità**, si considerino i consueti due esempi.

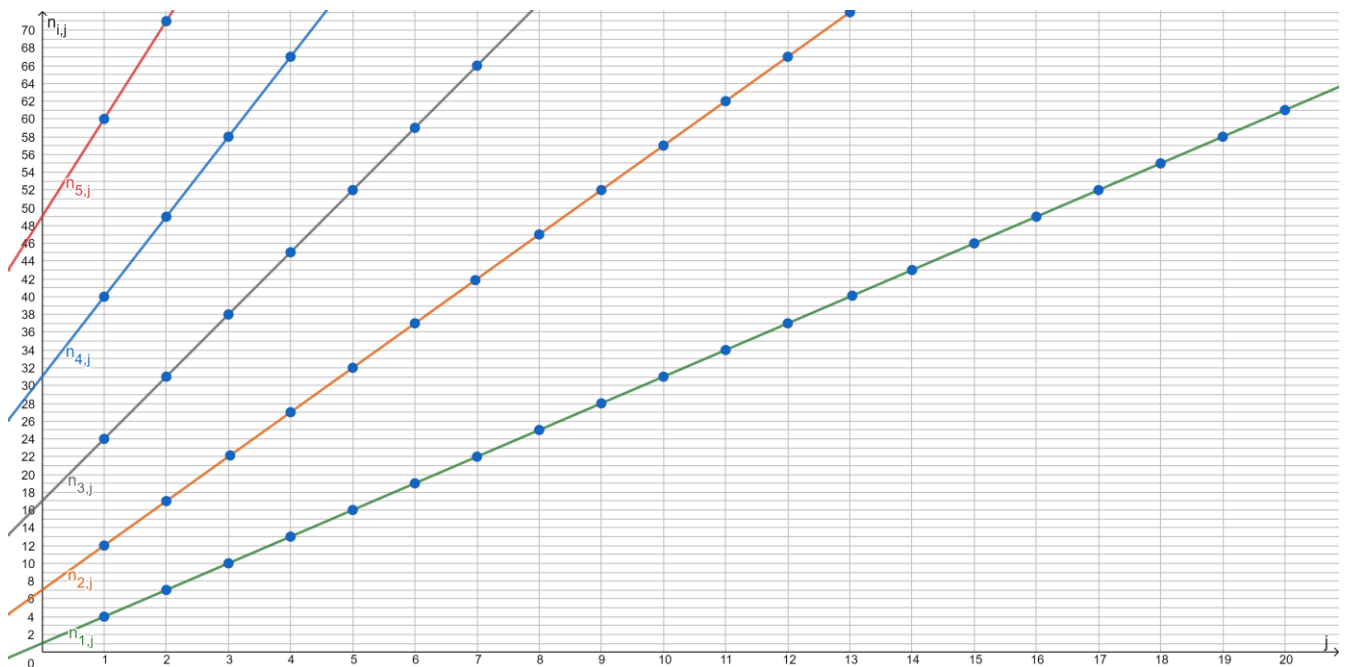
A. Si vuole verificare la primalità di  $d_n = 47$ , da cui  $n = 23$ . Sulla base della condizione  $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$  posta nella "Definizione 1.3" e sotto l'ipotesi peggiore ( $i = 1$ ), il numero di controlli da effettuare è pari anche in questo caso a 7 ( $j \leq 7,3$ ). Si dovrebbe quindi effettuare una verifica sulle prime 7 successioni, ossia quelle che evidenziano come primo elemento un numero non superiore a 23 o, in altre parole, quelle successioni la cui contro-immagine in corrispondenza del numero 23 mostra un valore maggiore o uguale a 1. La ricerca risulta quindi anche in questo caso meno efficiente di quella canonica.

B. Analoghe conclusioni per  $d_n = 123.456.789$ .

Tuttavia, dal grafico 1.2 si percepisce che si avrebbe una maggiore efficienza qualora la verifica della primalità avvenga sulle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  presenti in corrispondenza dei valori interi di  $i$  riportati sull'asse delle ascisse, piuttosto che sulle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  (le parabole) rappresentate nel grafico 1.2.

A tal fine, si rappresenta questa volta  $j$  sull'asse delle ascisse (grafico 1.3).





**Grafico 1.3** - SUCCESIONI  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  DI  $n \mid d_n$  E' UN NUMERO COMPOSTO

In questo caso le rette che si generano al variare di  $i = 1, 2, \dots, 5$  non hanno alcun punto in comune, il coefficiente angolare è pari a  $2i + 1$  (lo stesso del grafico 1.1), l'intersezione con l'asse delle ascisse e delle ordinate avviene rispettivamente nei punti  $-\frac{2i^2-1}{2i+1}$  e  $2i^2 - 1$ . In pratica, al crescere di  $i$  la retta tende ad aumentare l'inclinazione e al tempo vede allontanare dall'origine la sua intersezione con l'asse delle ascisse.

Naturalmente, le **regolarità** sono le stesse di quelle viste in precedenza, ma invertite.

In particolare, riguardo alle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$  (le rette) i valori di  $n$  che identificano  $d_n$  composti si susseguono ogni  $2i + 1$  unità di  $n$ , a partire da  $n$  pari a  $2i^2 + 2i$ .

Riguardo invece alle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{2i^2 + (2j)i + (j - 1)\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ , ovvero quelle che evidenziano in corrispondenza dei valori interi di  $j$  riportati sull'asse delle ascisse, i valori di  $n$  che identificano  $d_n$  composti iniziano sempre da  $(3j + 1)$  e si susseguono secondo la consueta legge ricorsiva in base alla quale ogni intervallo tra due valori di  $n$  è determinato dalla lunghezza dell'intervallo precedente più 4 unità di  $n$ .

Naturalmente, la legge che descrive queste regolarità è sempre la (1.4).

Riprendendo i consueti esempi per la **verifica della primalità**, e con riferimento alle successioni  $\{\{n_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{\{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}}$ , si vuole nuovamente verificare la primalità di:

- A.  $d_n = 47$ , da cui  $n = 23$ . Sulla base questa volta della condizione  $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$  posta nella "Definizione 1.3" e sotto l'ipotesi peggiore ( $j = 1$ ), si ricava in questo caso  $i \leq 2,9$ , per cui la verifica della primalità del numero 47 richiede solo 2 controlli ( $i = 1$  ed  $i = 2$ ). Naturalmente,  $n$  è diverso sia da  $n_{1,j}$  che  $n_{2,j}$  e  $d_n = 47$  è un numero primo. In termini di efficienza si otterrebbero quindi gli stessi risultati che si otterrebbero dividendo 47 per i numeri dispari compresi tra 3 (incluso) e  $\lceil \sqrt{47} \rceil = 6$ , ossia i numeri 3 e 5.
- B. Analizzando  $d_n = 123.456.789$ , da cui  $n = 61.728.394$ , si ricava un numero di controlli pari a  $i \leq 5.555$ , del tutto identico ai 5.555 suggeriti dal metodo canonico.

In **conclusione**, oltre alle regolarità evidenziate, quanto descritto - se reiterato all'infinito - permetterebbe di individuare la successione di infiniti numeri primi. Infatti, data una successione di numeri dispari maggiori di 1,  $d_n = 2n + 1$  con  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , escludendo prima quei valori di  $n$  individuati dalla successione  $n_{1,j}$  ossia 4, 7, 10, ..., poi quelli individuati della successione  $n_{2,j}$  ossia 12, 17, 22, ..., poi quelli della successione  $n_{3,j}$  etc., quello che resta è l'infinita successione di numeri dispari  $d_n$  primi. Si tratta di una sorta di **crivello di Eratostene, ma più efficiente**.

Di seguito alcune rappresentazioni in  $\mathbb{R}^3$  di  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  e  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ .

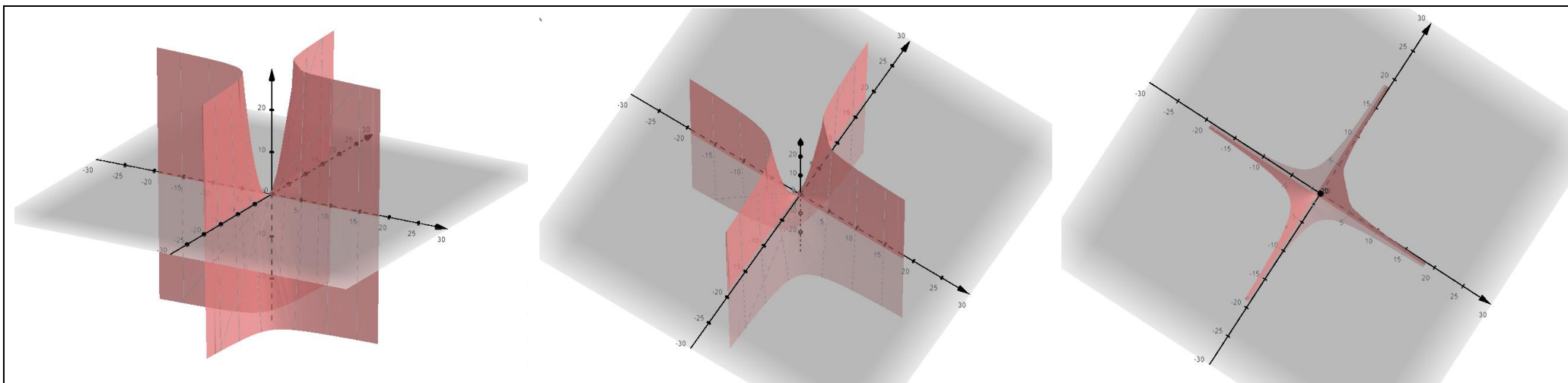


Grafico 1.4  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$

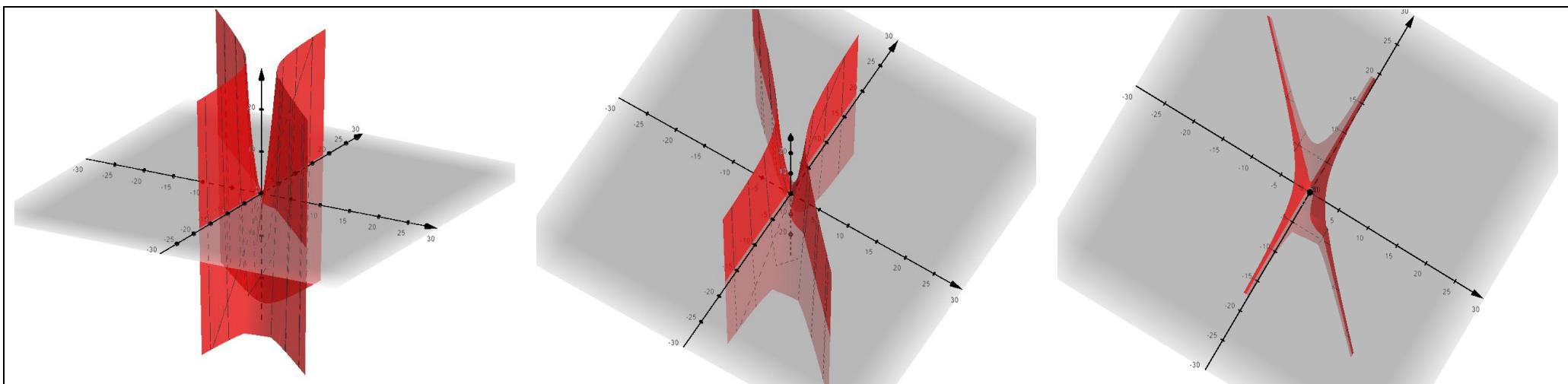


Grafico 1.5  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$

## 2. L'utilizzo della funzione indicatrice e della funzione generatrice per rappresentare un successione di numeri primi

Lo scopo di questa seconda parte è descrivere formalmente una successione di numeri primi. Il procedimento è molto semplice. Si prende un qualsiasi numero naturale  $n \geq 2$  e lo si divide per una funzione indicatrice (o caratteristica)  $I_P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  che assume quindi solo due valori, zero e uno; in particolare, zero quando  $n$  è un numero composto e 1 quando  $n$  è un numero primo. Se il numero  $n$  è diviso per zero, esso non è definito; se è diviso per 1, rimane uguale a se stesso. E' possibile considerare questo rapporto  $n/I_P$  come una funzione generatrice di una successione<sup>5</sup> e chiamarla funzione generatrice elementare,  $G_E(n)$ . Segue il teorema 2.1.

**TEOREMA 2.1** Siano:  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  una funzione indicatrice pari a 1 quando  $n$  è primo,  $G_E(n) = \frac{n}{I_P}$  una funzione generatrice elementare, allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_E(n)$  genera la successione di numeri primi.

Utilizzando le definizioni di primalità viste in precedenza si possono quindi ottenere le seguenti definizioni di una successione di numeri primi maggiori di 2. In particolare:

### DEFINIZIONE 2.1 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI

Siano:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Sia:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)  
 Sia:  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  con  $\{a_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)  
 Sia:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Oppure in modo equivalente:  $2ij + i + j \leq n$ ;  $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ ;  $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$ )  
 Sia:  $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \forall i, j, n \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \forall d_n$  (La funzione indicatrice pari ad 1 quando  $d_n$  è un numero primo)  
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall d_n$ , definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.

### DEFINIZIONE 2.2 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI

Siano:  $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Sia:  $\{d_n\} = 2n + 1$  (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)  
 Sia:  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  con  $\{a_{i,j}\}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)  
 Sia:  $a_{i,j} \leq d_n$  (Oppure in modo equivalente:  $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$ ;  $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$ ;  $j \leq \frac{n + 1 - 2i^2}{2i + 1}$ )  
 Sia:  $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \forall i, j, n \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \forall d_n$  (La funzione indicatrice pari ad 1 quando  $d_n$  è un numero primo)  
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall d_n$ , definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.

Tuttavia, è possibile definire  $I_P$  ricorrendo anche alla semplice definizione di numero primo, che permette di rappresentare una successione di numeri primi almeno in 3 modi diversi. In particolare:

1) Si definisce  $I_P$  fruttando semplicemente la definizione "alla lettera" di numero primo (numero maggiore di 1 divisibile solo per 1 e per se stesso), da cui la seguente rappresentazione:

### DEFINIZIONE 2.3 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI

Siano:  $n, l \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  e  $2 \leq l \leq n - 1$   
 Sia:  $I_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists l | \frac{n}{l} \in \mathbb{N}, \forall n, l \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \forall n$ , la funzione indicatrice pari ad 1 quando  $n$  è un numero primo  
 $G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(n) = 0 \\ n, & \text{se } I_P(n) = 1 \end{cases} \forall n$ , definisce la successione di numeri primi.

<sup>5</sup> Certo, si poteva definire  $G_E(n) = n * I_P(n)$  ed ottenere una successione formata da numeri primi e da zeri, ma si preferisce allo zero il "non definito", "non esiste" o "non ha significato".

2) Si definisce  $I_P$  continuando a sfruttare la definizione di numero primo, ma da un altro punto di vista, quello della moltiplicazione, da cui la seguente rappresentazione:

**DEFINIZIONE 2.4 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI**

<p>Siano: <math>n, l, m \in \mathbb{N}</math> con <math>n \geq 2, 2 \leq l \leq n - 1, 2 \leq m \leq n - 1</math></p> <p>Sia: <math>I_P(n) = \begin{cases} 0, &amp; \text{Se } \exists l, m \mid l * m = n, \forall n, l, m \\ 1, &amp; \text{Altrimenti} \end{cases} \quad \forall n, \text{ la funz. indicatrice pari ad 1 quando } n \text{ è un numero primo}</math></p> <p><math>G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(n) = 0 \\ n, &amp; \text{se } I_P(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n, \text{ definisce la successione di numeri primi.}</math></p>
---

3) Si definisce  $I_P$  utilizzando indirettamente la definizione di numero primo ed in particolare ricorrendo all'operatore Modulo che restituisce il resto di una divisione, da cui la seguente rappresentazione:

**DEFINIZIONE 2.5 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI**

<p>Siano: <math>n, l \in \mathbb{N}</math> con <math>n \geq 2</math> e <math>2 \leq l \leq n - 1</math></p> <p>Sia: <math>I_P(n) = \begin{cases} 0, &amp; \text{Se } \exists l \mid n \text{ mod } l = 0, \forall n, l \\ 1, &amp; \text{Altrimenti} \end{cases} \quad \forall n, \text{ la funzione indicatrice pari ad 1 quando } n \text{ è un numero primo}</math></p> <p><math>G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(n) = 0 \\ n, &amp; \text{se } I_P(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n, \text{ definisce la successione di numeri primi.}</math></p>
---

Del resto, escludendo il numero 2, la ricerca dei numeri primi può essere circoscritta ai soli numeri dispari, verificando che essi siano divisibili solo per quei numeri dispari, se esistono, compresi tra 3 (incluso) e la parte intera della radice quadrata del numero dispari stesso. Ne segue una versione più efficiente di quella al punto 1. In particolare:

**DEFINIZIONE 2.6 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI**

<p>Siano: <math>n, l \in \mathbb{N}_{&gt;0}; d_n = 2n + 1; d_l = 2l + 1</math> con <math>3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})</math>.</p> <p>Sia: <math>I_P(d_n) = \begin{cases} 0, &amp; \text{Se } \exists d_l \mid \frac{d_n}{d_l} \in \mathbb{N}, \forall n, l \\ 1, &amp; \text{Altrimenti} \end{cases} \quad \forall d_n, \text{ la funzione indicatrice pari ad 1 quando } d_n \text{ è un numero primo}</math></p> <p><math>G_E(n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, &amp; \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall n, \text{ definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.}</math></p>
---

Naturalmente, la condizione  $3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})$ , oltre a ridurre sensibilmente la ricerca, esclude l'esistenza di  $d_l$  quando  $d_n$  è pari a 3, 5 o 7 e la non esistenza di  $d_l$  li rende numeri primi, sulla base della funzione indicatrice  $I_P(d_n)$ . Del resto, l'ultima rappresentazione può essere ulteriormente migliorata in termini di efficienza, andando a circoscrivere la successione  $d_l$  all'insieme dei numeri primi, ma perdendo in semplicità e compattezza della rappresentazione.

### 3. Generalizzazione delle formule trovate e ipotesi di Riemann

Le formule viste in precedenza (le due successioni a due indici),  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  e  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ , sono state ottenute in modo tale che potessero descrivere le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti per ogni  $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ . In pratica, sono delle applicazioni  $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  che assolvono alla loro compito (generare delle successioni di numeri dispari positivi composti) se operano in  $\mathbb{N}_{>0}^2$ , ma anche in  $\mathbb{Z}_{<-1}^2$ , come mostra la tabella 3.1 qui di seguito riproposta e relativa alla successione a due indici  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$ .

**Tabella 3.1 - INFINITE SUCCESSIONI  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$  DI INFINITI NUMERI DISPARI**

i\j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...

Tuttavia, è possibile circoscrivere  $\{a_{i,j}\}$  anche in ambiti diversi da  $\mathbb{N}_{>0}^2$ , come ad esempio semplicemente  $\mathbb{N}^2$ , oppure  $\mathbb{N}_{>1}^2$ , ma anche a partire da numeri interi negativi, come ad esempio  $\mathbb{Z}_{>-3}^2$  e, se vogliamo determinare anche le infinite successioni di infiniti numeri pari, allargare il dominio di  $\{a_{i,j}\}$  all'insieme  $\mathbb{Q}^2$ , in particolare ai numeri dispari rapportati a 2. Operando su insiemi diversi da  $\mathbb{N}_{>0}^2$  si ottengono formule diverse da quelle sopra riportate, ma è comunque possibile definire delle **formule generali** che dipendono dall'insieme scelto, ed in particolare dal suo primo valore.

Prendendo come riferimento la formula meno efficiente,  $\{a_{i,j}\} = 4ij + 2i + 2j + 1$ , sostituendo per comodità  $x$  al posto di  $i$  e  $y$  al posto di  $j$  e, con lo scopo di utilizzare un'applicazione definita in  $\mathbb{Z}_{>l}^2$  per ogni  $l \in \mathbb{Z}$ , si ricavano le seguenti formule, da cui quella generale riportata nell'ultima riga della tabella 3.2.

**Tabella 3.2 – FORMULE ASSOCIATE A  $\{a_{x,y}\}$  E SOLUZIONI DI  $\{a_{x,y}\} = 0$  AL VARIARE DEL DOMINIO**

Dominio	Formule	$\{a_{x,y}\} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 14x + 14y + 49$	$x = -\frac{7}{2}; y = -\frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 10x + 10y + 25$	$x = -\frac{5}{2}; y = -\frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 6x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; y = -\frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 2x + 2y + 1$	$x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 2x - 2y + 1$	$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 6x - 6y + 9$	$x = \frac{3}{2}; y = \frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 10x - 10y + 25$	$x = \frac{5}{2}; y = \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>4}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4xy - 14x - 14y + 49$	$x = \frac{7}{2}; y = \frac{7}{2}$
...	...	...
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)^2$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -\frac{1 - 2l}{2}$

Le formule specifiche sopra esposte si possono ricavare attraverso la definizione di successione aritmetica, oppure aggiungendo o togliendo delle unità alle variabili  $x$  e  $y$  nella successione da cui siamo partiti  $\{a_{x,y}\} = 4xy + 2x + 2y + 1$ . Ad esempio,  $\{a_{x,y}\} = 4(x - 1)(y - 1) + 2(x - 1) + 2(y - 1) + 1 = \dots = 4xy + 6x + 6y + 9$ .

La formula generale è stata invece ricavata partendo dal presupposto che siamo di fronte a delle iperbole. Infatti, data l'equazione generale di una conica:  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , nelle nostre formule  $b^2 - ac$  è maggiore di zero. La formula di riferimento è quindi la seguente:  $a_{x,y} = 2bxy + 2dx + 2ey + f$ , i cui parametri sono dati da  $b = 2, d = e, f = d * e$ . Nella tabella 3.2 sono stati infine riportati i valori per i quali  $\{a_{x,y}\} = 0$  e le formule in funzione di  $l$  che generano detti valori.

Rispetto alla tabella 3.1, le risultanze ottenute mostrano come il parametro  $f$  assuma i valori riportati sulla diagonale secondaria e i parametri  $d$  ed  $e$  siano quelli in corrispondenza della riga  $i = 0$  e  $j = 0$ .

Nella formula generale riportata nell'ultima riga della tabella 3.2 si impone che il dominio di  $x$  e  $y$  sia lo stesso. Tuttavia, è possibile generalizzare ulteriormente la formula (3.1) in modo da poter assegnare domini diversi a  $x$  e  $y$  e quindi  $x \in \mathbb{Z}_{>l}$  e  $y \in \mathbb{Z}_{>m}$  (3.2).

Dominio	Prima formula generale	$\{a_{x,y}\} = 0$	
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}(l)\} = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)^2$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -\frac{1 - 2l}{2}$	(3.1)
$x \in \mathbb{Z}_{>l}$ $y \in \mathbb{Z}_{>m}$	$\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -\frac{1 - 2m}{2}$	(3.2)

E' possibile quindi enunciare il seguente teorema 3.1 che generalizza il teorema 1.1 visto in precedenza.

**TEOREMA 3.1** Fissati  $l, m \in \mathbb{Z}$ . Per ogni  $x \in \mathbb{Z}_{>l}$  e  $y \in \mathbb{Z}_{>m}$ , la successione a due indici in  $x$  e  $y$   $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$  con  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l, y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti.

In modo analogo, ma con qualche difficoltà in più, è possibile ricavare una formula che generalizza quella più efficiente vista in precedenza, ossia:  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ .

Si ripropongono anche in questo caso le infinite successioni di infiniti numeri dispari che  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  descrive (tabella 3.3), ma questa volta in modo più esteso per poter meglio cogliere le affinità con le formule specifiche di seguito elencate.

**Tabella 3.3 - INFINITE SUCCESSIONI  $\{a_{i,j}\} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$  DI INFINITI NUMERI DISPARI**

i \ j	...	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	...	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	...	-17	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	...	-45	-15	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	...	-65	-39	-13	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	...	-77	-55	-33	-11	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	...	-81	-63	-45	-27	-9	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	...	-77	-63	-49	-35	-21	-7	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	...	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	...	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...
-0.5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	...
-3	...	115	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	...
-4	...	175	161	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	-7	-21	-35	-49	-63	-77	...
-5	...	243	225	207	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	-9	-27	-45	-63	-81	...
-6	...	319	297	275	253	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	-11	-33	-55	-77	...
-7	...	403	377	351	325	299	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	-13	-39	-65	...
-8	...	495	465	435	405	375	345	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	-15	-45	...
-9	...	595	561	527	493	459	425	391	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	-17	...
-10	...	703	665	627	589	551	513	475	437	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	...
-11	...	819	777	735	693	651	609	567	525	483	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Anche in questo caso, dopo aver sostituito  $i$  con  $x$  e  $j$  con  $y$ , le diverse formule specifiche sono state ottenute aggiungendo o togliendo delle unità alle variabili  $x$  e  $y$  nella formula da cui siamo partiti  $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$ .

La formula generale è stata invece ricavata partendo sempre dal presupposto che siamo di fronte a delle iperbole, ma in questo caso di equazione  $a_{x,y} = ax^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f$ , i cui parametri sono dati da  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $d = 3(e - 1)$ ,  $f = d * e - e^2$ .

**Tabella 3.4** - FORMULE ASSOCIATE A  $\{a_{x,y}\}$  E SOLUZIONI DI  $\{a_{x,y}\} = 0$  AL VARIARE DEL DOMINIO

Dominio	Formule	$\{a_{x,y}\} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(18)x + 2(7)y + 77$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 36x + 14y + 77$	$x = -\frac{7}{2}; y = -x - \frac{11}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(12)x + 2(5)y + 35$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 24x + 10y + 35$	$x = -\frac{5}{2}; y = -x - \frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(6)x + 2(3)y + 9$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 12x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; y = -x - \frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(0)x + 2(1)y - 1$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$	$x = -\frac{1}{2}; y = -x + \frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-6)x + 2(-1)y + 5$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 12x - 2y + 5$	$x = \frac{1}{2}; y = -x + \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-12)x + 2(-3)y + 27$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 24x - 6y + 27$	$x = \frac{3}{2}; y = -x + \frac{9}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-18)x + 2(-5)y + 65$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 36x - 10y + 65$	$x = \frac{5}{2}; y = -x + \frac{13}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>4}^2)$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-24)x + 2(-7)y + 119$ $\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy - 48x - 14y + 119$	$x = \frac{7}{2}; y = -x + \frac{17}{2}$
...	...	...
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}\} = 4x^2 + 4xy + 2(-6l)x + 2(1 - 2l)y + (8l^2 - 2l - 1)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -x + \frac{4l + 1}{2}$

Confrontando la tabella 3.3 con le risultanze ottenute, si ribadisce come il parametro  $f$  assuma i valori riportati sulla diagonale secondaria e il parametro  $e$  sia quello in corrispondenza della riga  $i = 0$  e colonna  $j = 1$ .

Sono stati, anche in questo caso, riportati i valori per i quali  $\{a_{x,y}\} = 0$  e le formule in funzione di  $l$  che generano detti valori. Al riguardo, è possibile notare come la relazione  $\{a_{x,y}\} = 0$  sia verificata per la stessa costante  $(-3/2)$  solo quando  $\{a_{x,y}\}$  è definito in  $\mathbb{N}^2$ .

Analogamente a quanto fatto in precedenza, la formula generale riportata nell'ultima riga della tabella 3.4 viene estesa al caso in cui  $x$  ed  $y$  abbiano domini diversi ( $x \in \mathbb{Z}_{>l}; y \in \mathbb{Z}_{>m}$ ).

Dominio	<b>Seconda formula generale (più efficiente)</b>	$\{a_{x,y}\} = 0$	
$\mathbb{Z}_{>l}^2$	$\{a_{x,y}(l)\} = 4x^2 + 4xy + 2(-6l)x + 2(1 - 2l)y + (8l^2 - 2l - 1)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -x + \frac{4l + 1}{2}$	(3.3)
$x \in \mathbb{Z}_{>l}$ $y \in \mathbb{Z}_{>m}$	$\{a_{x,y}(l, m)\} = 4x^2 + 4xy + 2(-4l - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (4l^2 + 4lm - 2m - 1)$	$x = -\frac{1 - 2l}{2}; y = -x + \frac{2l + 2m + 1}{2}$	(3.4)

E' possibile quindi enunciare il seguente teorema 3.2 che generalizza il teorema 1.2 visto in precedenza.

**TEOREMA 3.2** Fissati  $l, m \in \mathbb{Z}$ . Per ogni  $x \in \mathbb{Z}_{>l}$  e  $y \in \mathbb{Z}_{>m}$  la successione a due indici in  $x$  e  $y$   $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$  con  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l; y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$  descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti.

Le nuove formule trovate (teorema 3.1 e 3.2) permettono di generalizzare le definizioni date in precedenza di primalità e successione di numeri primi dispari (in questo caso in un'unica definizione) e di un insieme di numeri primi dispari.

**DEFINIZIONE 3.1 RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI E DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI**

Sia:  $\{d_n\} = 2n + 1$  con  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)  
 Fissati:  $l, m \in \mathbb{Z}$ .  
 Siano:  $x \in \mathbb{Z}_{>l}, y \in \mathbb{Z}_{>m}$   
 Sia:  $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)$ ,  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l; y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$   
 (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)  
 Sia:  $a_{x,y}(l, m) \leq d_n$  (Oppure in modo equivalente:  
 $2xy + (1 - 2m)x + (1 - 2l)y + (2lm - l - m) \leq n$ ;  $x \leq \frac{n+(2l-1)y+(l+m-2lm)}{2y+(1-2m)}$ ;  $y \leq \frac{n+(2m-1)x+(l+m-2lm)}{2x+(1-2l)}$ )  

$$d_n \text{ è primo} \Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n$$
 (ma anche:  $n$  identifica un  $d_n$  primo  $\Leftrightarrow \nexists 2xy + (1 - 2m)x + (1 - 2l)y + (2lm - l - m) = n \forall x, y, n$ )  
 Oppure  

$$d_n \text{ è composto} \Leftrightarrow \exists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n; \text{ altrimenti } d_n \text{ è primo}$$
 (ma anche:  $n$  identifica un  $d_n$  composto  $\Leftrightarrow \exists 2xy + (1 - 2m)x + (1 - 2l)y + (2lm - l - m) = n, \forall x, y, n$ ;  
 altrimenti  $n$  identifica un  $d_n$  primo)  
 Sia:  $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{Se } d_n \text{ è primo} \\ 0, & \text{Se } d_n \text{ è composto} \end{cases} \quad \forall d_n$  (La funzione indicatrice pari ad 1 quando  $d_n$  è un numero primo)  

$$G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n, \text{ definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.}$$

**DEFINIZIONE 3.2 RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI E DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI**

Sia:  $\{d_n\} = 2n + 1$  con  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)  
 Fissati:  $l, m \in \mathbb{Z}$   
 Siano:  $x \in \mathbb{Z}_{>l}, y \in \mathbb{Z}_{>m}$   
 Sia  $\{a_{x,y}(l, m)\} = 4x^2 + 4xy + 2(-4l - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (4l^2 + 4lm - 2m - 1)$ ,  $\{a_{x,y}(l, m)\} : \mathbb{Z}_{x>l; y>m}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$   
 (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)  
 Sia:  $a_{x,y}(l, m) \leq d_n$  (Oppure in modo equivalente:  $2x^2 + 2xy + (-4l - 2m)x + (1 - 2l)y + (2l^2 + 2lm - m - 1) \leq n$ ;  
 $\frac{2l+m-y-\sqrt{y^2-(2m+2)y+m^2+2m+2+2n}}{2} \leq x \leq \frac{2l+m-y+\sqrt{y^2-(2m+2)y+m^2+2m+2+2n}}{2}$ ;  $y \leq \frac{n-2x^2+(4l+2m)x-2l^2-2lm+m+1}{2x+1-2l}$ )  

$$d_n \text{ è primo} \Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n$$
 (ma anche:  $n$  identifica un  $d_n$  primo  $\Leftrightarrow \nexists 2x^2 + 2xy + (-4l - 2m)x + (1 - 2l)y + (2l^2 + 2lm - m - 1) = n \forall x, y, n$ )  
 Oppure  

$$d_n \text{ è composto} \Leftrightarrow \exists a_{x,y}(l, m) = d_n \forall x, y, n; \text{ altrimenti } d_n \text{ è primo}$$
 (ma anche:  $n$  identifica un  $d_n$  composto  $\Leftrightarrow \exists 2x^2 + 2xy + (-4l - 2m)x + (1 - 2l)y + (2l^2 + 2lm - m - 1) = n, \forall x, y, n$ ;  
 altrimenti  $n$  identifica un  $d_n$  primo)  
 Sia:  $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{Se } d_n \text{ è primo} \\ 0, & \text{Se } d_n \text{ è composto} \end{cases} \quad \forall d_n$  (La funzione indicatrice pari ad 1 quando  $d_n$  è un numero primo)  

$$G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n, \text{ definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.}$$

**DEFINIZIONE 3.3 - RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME DI NUMERI DISPARI PRIMI**

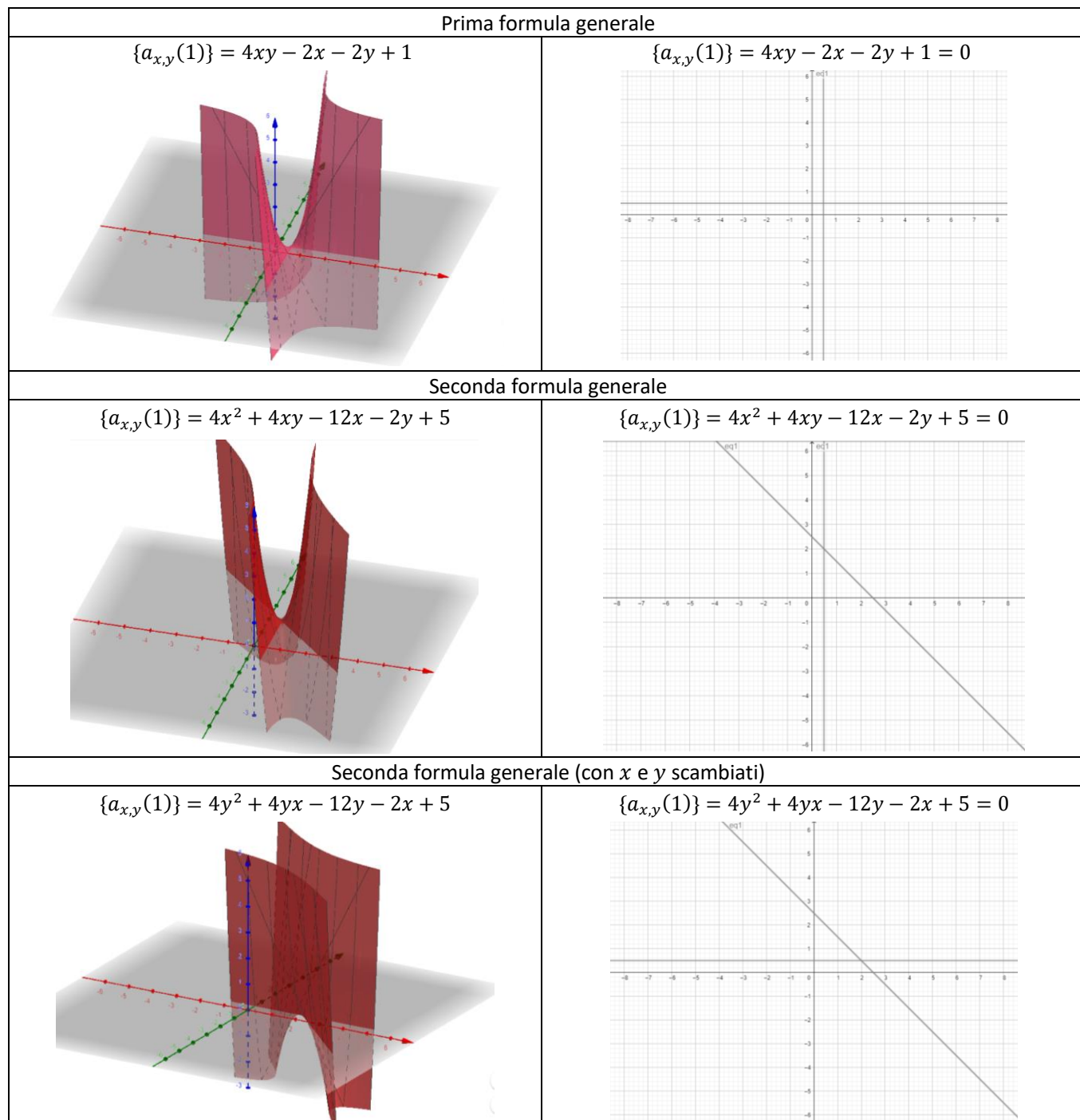
Fissati  $l, m \in \mathbb{Z}$   
 Sia:  $n \in \mathbb{N}_{>0}$   
 Siano:  $x \in \mathbb{Z}_{>l}, y \in \mathbb{Z}_{>m}$   
 Sia:  $A = \{z \in \mathbb{N}_{>2} \mid z = 2n + 1\}$   
 Sia:  $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4xy + 2(1 - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (1 - 2l)(1 - 2m)\}$   
 oppure  
 Sia:  $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4x^2 + 4xy + 2(-4l - 2m)x + 2(1 - 2l)y + (4l^2 + 4lm - 2m - 1)\}$   

$$\text{L'insieme } A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\} \text{ definisce l'insieme degli infiniti numeri primi dispari.}$$



Tornando ai risultati ottenuti, ed in particolare quelli con dominio  $\mathbb{Z}_{>1}^2$ , si segnalano innanzitutto alcune coincidenze con la **congettura di Riemann**. La funzione zeta è stata infatti studiata da Riemann nell'ambito di numeri complessi con parte reale maggiore di 1 e si basa sull'assunto che gli zeri non banali si distribuiscano intorno alla retta reale  $x = \frac{1}{2}$ , la stessa che verifica  $\{a_{x,y}(l, m)\} = 0$  quando  $l = m = 1$ , ossia quando  $x$  e  $y$  sono maggiori di 1, sia nella prima che nella seconda formula generale<sup>6</sup>. Naturalmente parliamo di cose diverse ma per certi versi complementari, essendo la funzione zeta costruita in modo tale da essere formata da soli numeri primi e  $\{a_{x,y}(l, m)\}$  che, per valori di  $x > l$  ed  $y > m$ , genera sicuramente numeri non primi<sup>7</sup>.

Di seguito i grafici in  $\mathbb{R}^3$  di  $\{a_{x,y}(l = m = 1)\}$  e quelli ottenuti risolvendo  $\{a_{x,y}(l = m = 1)\} = 0$ .



**Grafico 3.1 - PRIMA E SECONDA FORMULA GENERALE CON  $l = m = 1$**

<sup>6</sup> In realtà la seconda formula è verificata anche per  $y = -x + \frac{5}{2}$ .

<sup>7</sup> Va precisato che, fissati  $l, m$ ,  $\{a_{x,y}(l, m)\}$  individua delle successioni di numeri non primi anche per determinati valori di  $x \leq l$  e  $y \leq m$ , nonché quella successione costituita da tutti i numeri dispari e quindi anche primi.

Del resto, a prescindere dalle eventuali coincidenze, in questo *paper* abbiamo mostrato, sia analiticamente che graficamente, come si distribuiscano i numeri dispari composti. Una distribuzione che segue delle regolarità ben precise.

Poiché quindi i numeri composti si distribuiscono con regolarità e sono complementari ai numeri primi, allora anche i numeri primi si distribuiscono con regolarità. La congettura di Riemann - intesa, sulla base degli zeri non banali, come distribuzione armonica e non casuale dei numeri primi - risulta quindi vera.

Tuttavia, se escludiamo l'insieme dei numeri composti e analizziamo separatamente la distribuzione dei numeri primi, allora, venendo meno il supporto dei numeri composti e la loro complementarietà, non potremmo più sostenere che la distribuzione dei numeri primi sia regolare. Essi, infatti, mostrano un andamento la cui unica certezza è solo quella di diventare più "rarefatti" man mano che si considerano cifre più grandi. La congettura di Riemann risulta quindi falsa.

**In conclusione, l'ipotesi di Riemann è vera solo se analizzata congiuntamente ai numeri composti, altrimenti risulta falsa.** Si desume quindi che è impossibile dimostrare che gli zeri non banali della funzione di Riemann si distribuiscano intorno alla retta reale  $x = \frac{1}{2}$ , poiché la funzione zeta è costruita in modo tale da essere formata da soli numeri primi, senza avere il supporto dei numeri composti. Allo stesso tempo è impossibile dimostrarne la sua falsità, poiché gli zeri non banali si collocheranno sempre sulla retta  $x = \frac{1}{2}$ , per via della complementarietà dei numeri primi con i "veri regolari" numeri composti.

**Si potrebbe chiosare dicendo che l'ipotesi di Riemann è "falsamente vera".**

Si vuole infine concludere questo *paper* con delle considerazioni che si rifanno soprattutto all'antica mitologia greca, secondo la quale "*In principio era il Caos*" da cui è scaturito l'ordine (il Cosmo) che tuttavia non ha annullato il Caos ma convive in equilibrio con esso.

**Possiamo infatti immaginare il disordine dei numeri primi come la rappresentazione non della casualità, ma del caos<sup>8</sup>, da cui ha origine l'ordine dei numeri composti che, a sua volta, spiega il caos dei numeri primi. In un rapporto di complementarietà, l'ordine dei numeri composti e il caos dei numeri primi convivono in equilibrio nell'insieme dei numeri naturali, quasi in simbiosi mutualistica.**

Senza il caos dei numeri primi non può esistere l'ordine dei numeri composti e in generale l'ordine che caratterizza l'aritmetica e forse l'intera matematica, con le sue regole e tutto quello che la matematica stessa riesce a raffigurare, incluso il caos dei numeri primi che si è voluto rappresentare in questo *paper*.

Trovare una formula semplice (senza fattoriali, sommatorie, logaritmi, etc.) che possa descrivere tutti i numeri primi sarebbe come trovare la formula dalla quale si è generata la matematica, una contraddizione.

Forse, come sostenevano i pitagorici, tutto ha origine dal numero 1, o meglio l'unità, dalla quale si è forse generato il caos dei numeri primi, dal quale a sua volta è scaturito l'ordine dei numeri composti e di tutta la matematica. **Una sorta di big bang, dove l'Aritmetica può essere intesa come la rappresentazione numerica dell'origine ed evoluzione dell'universo.**

---

<sup>8</sup> Inteso come un insieme di segnali che si collocano a metà strada tra "un andamento regolare e prevedibile e uno accidentale ed imprevedibile" [6].

## Bibliografia

- [1] E. Gracian, *I numeri primi. Un lungo cammino verso l'infinito*, RBA Italia S.r.l., 2018.
- [2] J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, (2003).
- [3] H. Iwaniec *Almost-primes represented by quadratic polynomials*. *Invent. Math.*, 47(2):171–188, (1978).
- [4] M. Wolf, F. Wolf. *Representation theorem of composite odd numbers indices*. *SCIREA Journal of Mathematics, Journal of Mathematics* 3(3), pp.106-117. hal-01832624, (2018).
- [5] Wikipedia: *Formulas for primes*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Formula\\_for\\_primes](https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes)
- [6] M.C. Catone, *La teoria del caos nelle scienze sociali*, Tesi di Dottorato, Firenze, (2010-2012).