

Notes on prime numbers: regularity on composite numbers, formal representations and Riemann hypothesis

Federico Romagnoli

federico.romagnoli@libero.it

01/01/2022

Abstract (En) - (Full paper on page 19)

The purpose of this paper is to show, through the regularities that emerge on composite numbers, some formal representations of primality, set of prime numbers and sequence of prime numbers. These regularities will also be seen in the context of the Riemann hypothesis.

This work has been divided into three parts.

In the first part two formulas will be identified, defined in $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$, that describe the infinite sequences of infinite composite odd numbers. On the basis of these formulas, two definitions will follow, both of primality and of sets of prime numbers. In addition, graphs will be used to better represent the results and the regularities that have emerged, as well as some examples on the efficiency of the formulas found for the purposes of primality.

In the second part, through an indicator function (or characteristic) and a generating function, we will try to represent a sequence of prime numbers starting both from the two primality definitions identified above, and from the simple definition of prime number.

In the third part we will try to generalize the two formulas found in the first part to domains other than $\mathbb{N}_{>0}$. The definitions given above will be adapted to the new formulas and, lastly, the results obtained will be analysed in the context of the Riemann hypothesis.

Keywords: composite numbers, primes, primality, set of prime numbers, sequence of prime numbers, distribution of primes, Riemann hypothesis.

MSC2010: Primary 11A41, 11N32, 11Y11, 11N13, 11M06, 11M20, 11M26, 11N05, 97F60; Secondary: 1B25, 60E10, 97E60, 97E20.

Abstract (It) - (Documento completo a pag. 2)

Lo scopo del presente paper è quello fornire, attraverso le regolarità che emergono sui numeri composti, alcune rappresentazioni formali di primalità, insieme di numeri primi e successione di numeri primi. Dette regolarità saranno inoltre inquadrare nel contesto dell'ipotesi di Riemann.

Il presente lavoro è stato diviso in tre parti.

Nella prima parte saranno individuate due formule definite in $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ che descrivono le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti. Sulla base di dette formule, seguiranno due definizioni, sia di primalità che di insiemi di numeri primi. Inoltre, saranno utilizzati dei grafici atti a meglio rappresentare le regolarità emerse, nonché alcuni esempi sull'efficienza delle formule trovate ai fini della primalità.

Nella seconda parte, attraverso una funzione indicatrice (o caratteristica) e una funzione generatrice, si cercherà di rappresentare una successione di numeri primi partendo sia dalle due definizioni di primalità individuate sopra, che dalla semplice definizione di numero primo.

Nella terza parte si cercherà di generalizzare le due formule trovate nella prima parte a domini diversi da $\mathbb{N}_{>0}^2$. Le definizioni date in precedenza saranno riadattate alle nuove formule e, infine, le risultanze ottenute saranno analizzate nel contesto dell'ipotesi di Riemann.

Chiavi di ricerca: numeri composti, numeri primi, primalità, insieme di numeri primi, successioni di numeri primi, ipotesi di Riemann.

MSC2010: Primaria 11A41, 11N32, 11Y11, 11N13, 11M06, 11M2, 11M26, 11N05, 97F60; Secondaria 1B25, 60E10, 97E60, 97E20

Appunti sui numeri primi: regolarità sui numeri composti, rappresentazioni formali e ipotesi di Riemann

Introduzione

Lo scopo del presente *paper* è quello fornire, attraverso le regolarità che emergono sui numeri composti, alcune rappresentazioni formali di primalità, insieme di numeri primi e successione di numeri primi. Dette regolarità saranno inoltre inquadrare nel contesto dell'ipotesi di Riemann. Il presente lavoro è stato diviso in tre parti (paragrafi).

Nella prima, saranno individuate due formule, definite in $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$, che descrivono le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti. Sulla base di dette formule, seguiranno due definizioni, sia di primalità che di insiemi di numeri primi. Inoltre, saranno utilizzati dei grafici atti a meglio rappresentare le regolarità emerse, nonché alcuni esempi sull'efficienza delle formule ai fini della primalità.

Nella seconda parte, con l'obiettivo di rappresentare una successione di numeri primi, saranno applicati i concetti di funzione indicatrice (o caratteristica) e di funzione generatrice alle definizioni di primalità di cui sopra. Altre rappresentazioni formali saranno date con riferimento anche alla semplice definizione di numero primo.

Nella terza parte si cercherà di generalizzare le due formule trovate nella prima parte a domini diversi da $\mathbb{N}_{>0}^2$. Le definizioni date in precedenza saranno riadattate alle nuove formule e, infine, le risultanze ottenute saranno analizzate nel contesto dell'ipotesi di Riemann.

1. Primalità, insieme di numeri primi e regolarità attraverso le successioni di numeri dispari composti

Per individuare le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti si seguirà la seguente impostazione metodologica.

Siano: $i, j \in \mathbb{Z}$

Sia: $d_j = 2j + 1$ (La successioni di infiniti numeri dispari)

Sia: $a_{i,j} = 3d_j + (i - 1) * 2d_j$ (Le infinite successioni aritmetiche - con primo termine $3d_j$ e ragione $2d_j$ - di infiniti numeri dispari), con $a_{i,j} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$. Inoltre, poiché $d_j = 2j + 1$, si ricava:

$$a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1, \quad a_{i,j} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Al variare i e j in \mathbb{Z} , si ottengono quindi le infinite successioni di infiniti numeri dispari rappresentati in tabella 1.1.

Tabella 1.1 - INFINITE SUCCESSIONI $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ DI INFINITI NUMERI DISPARI

i \ j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...

E' possibile pensare alla tabella 1.1 come una matrice infinita $(a_{i,j})$ associata all'applicazione $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ ed enunciare alcune proprietà:

- a) $a_{i,j} = a_{j,i}$ La matrice è simmetria rispetto alla diagonale principale, ma anche a quella secondaria
- b) $a_{i,j} = -a_{i,-(j+1)}$ Per ogni riga i , ogni elemento $a_{i,j}$ ha il suo opposto in $a_{i,-(j+1)}$
- c) $a_{i,j} = -a_{-(i+1),j}$ Per ogni colonna j , ogni elemento $a_{i,j}$ ha il suo opposto in $a_{-(i+1),j}$
- d) $a_{i,-1/2} = a_{-1/2,j} = 0$ Soluzioni dell'equazione $a_{i,j} = 0$ è il luogo geometrico dei punti descritti da $i = -\frac{1}{2}$ e $j = -\frac{1}{2}$.

Limitando l'analisi a $i, j \in \mathbb{N}$, dalla tabella 1 è possibile notare come nella parte evidenziata in rosso ($i, j > 0$) compaiano solo numeri composti, mentre numeri primi maggiori di 2 possono esistere solo nella parte evidenziata in verde, ossia all'interno della riga $i = 0 \forall j > 0$ ($a_{0,j} = \dots = 2j + 1$) e colonna $j = 0 \forall i > 0$ ($a_{i,0} = \dots = 2i + 1$).

TEOREMA 1.1 Per ogni $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$, la formula $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ con $a_{i,j}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti.

E' possibile quindi definire un numero dispari $d_n = 2n + 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$) primo nel seguente modo:

DEFINIZIONE 1.1 – RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI

Siano: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$

Sia: $d_n = 2n + 1$ (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)

Sia: $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ con $a_{i,j}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)

Sia: $a_{i,j} \leq d_n$ (Oppure in modo equivalente: $2ij + i + j \leq n$; $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$; $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$)

$$d_n \text{ è primo} \Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$$

(ma anche: n identifica un d_n primo $\Leftrightarrow \nexists 2ij + i + j = n \forall i, j, n$)

Oppure:

$$d_n \text{ è composto} \Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n; \text{ altrimenti } d_n \text{ è primo}$$

(ma anche: n identifica un d_n composto $\Leftrightarrow \exists 2ij + i + j = n \forall i, j, n$; altrimenti n identifica un d_n primo).

La condizione " $a_{i,j} \leq d_n$ ", o quelle ad essa equivalenti, è funzionale ad evitare una ricerca infinita qualora d_n sia un numero primo, ma anche a restringere la ricerca qualora d_n sia un numero composto.

E' possibile inoltre ragionare in termini di insiemi numerici e definire l'insieme degli infiniti numeri dispari primi.

DEFINIZIONE 1.2 – RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME DI NUMERI DISPARI PRIMI

Siano: $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$

Sia $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$ oppure $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$

Sia $B = \{z \mid z = 4xy + 2x + 2y + 1\}$

L'insieme $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$ definisce l'insieme dei numeri primi dispari.

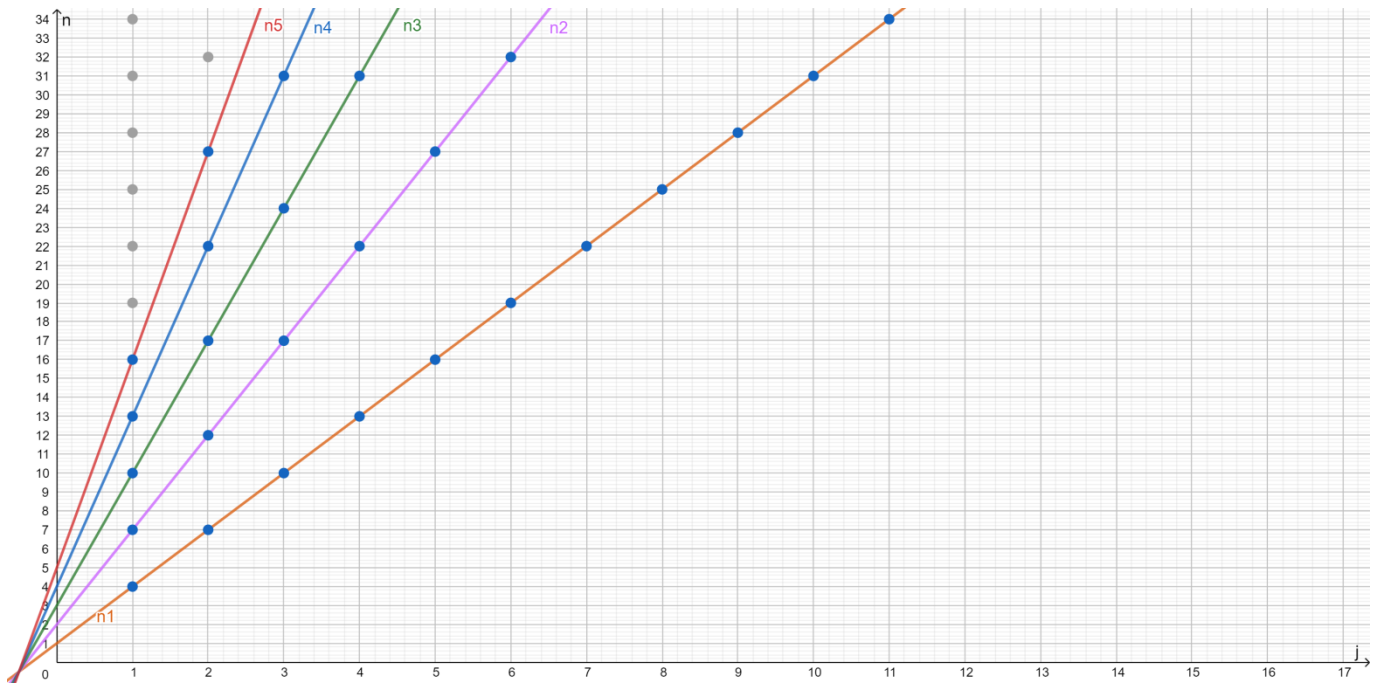
Di seguito, una lettura grafica dell'impostazione metodologica seguita e delle **regolarità** riscontrate nelle infinite successioni di numeri composti descritte da $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$.

A tal fine, si è scelto di verificare per quali valori di n si ottengano d_n composti, eguagliano a $d_n = 2n + 1$ le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti descritte da $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$, da cui:

$$n = 2ij + i + j \tag{1.2}$$

Rappresentando n sull'asse delle ordinate, j (o in modo equivalente i) sull'asse delle ascisse e facendo variare i (o in modo equivalente j) ad esempio da 1 a 5, si ottengono le seguenti successioni:

- $\{n_{i,j}\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 7, 10, 13, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 2\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 12, 17, 22, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 3\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 17, 24, 31, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 4\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 22, 31, 40, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 5\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 27, 38, 49, \dots\}$
- ...
- $\{n_{i,j}\}_{i=k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=k; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + i\}_{i=1, 2, \dots, k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}}$



Graf. 1.1 - SUCCESIONI $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + i$ DI n RENDONO d_n UN NUMERO COMPOSTO

Il grafico 1.1 sopra esposto mostra le regolarità sulle diverse successioni che, per una maggiore chiarezza visiva, sono state rappresentate in \mathbb{R} . Le successioni $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$ possono essere infatti pensate come un fascio di rette con centro in $\mathbb{C} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; le rette intersecano l'asse delle ascisse j in $-\frac{i}{2i+1}$ e quello delle ordinate in i ; hanno inoltre coefficiente angolare pari a $2i + 1$. Per $i = 1$ si ricava la prima retta $n_{1,j} = 3j + 1$, mentre per i molto grande si ottiene una retta che interseca l'asse della ascisse in un punto prossimo a $-\frac{1}{2}$ e risulta quasi parallela all'asse delle ordinate.

Tornando a $\mathbb{N}_{>0}$, le regolarità nel susseguirsi di numeri n che identificano d_n composti possono essere facilmente osservate sia sulle singole successioni (le rette), che sui valori interi presenti sull'asse delle ascisse j .

Riguardo alle successioni $\{n_{i,j} = (2i + 1)j + i\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$, i numeri n che identificano d_n composti si susseguono ogni $2i + 1$ unità di n , a partire da n pari $3i + 1$.

Riguardo ai valori interi presenti sull'asse delle ascisse j , e in modo del tutto analogo al caso precedente, ad identificare d_n composti sono quei valori di n che si susseguono ogni $2j + 1$ unità di n a partire da n pari a $3j + 1$.

Del resto, la parte evidenziata in rosso nella tabella 1 mostra le stesse successioni, sia se esse vengano analizzate per righe, che per colonne. Naturalmente, la legge che descrive queste regolarità è la seguente: $\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2ij + i + j$.

Utilizzando le successioni $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$ per la **verifica della primalità** e ricordando che n identifica un d_n composto se e solo se esiste un elemento della successione $\{n_{i,j}\} = n$, $\forall i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ e $j = 1$ (ipotesi peggiore), si considerino i seguenti due esempi.

- A. $d_n = 47$, da cui $n = 23$. Sulla base della condizione $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ posta nella "prima rappresentazione formale" e sotto l'ipotesi peggiore ($j = 1$), si richiede di effettuare controlli sulle prime sette successioni ($i \leq 7,3$), ossia quelle che evidenziano, in corrispondenza del primo elemento della successione ($j = 1$), un valore non superiore a 23 o, in altre parole, quelle la cui anti-immagine mostra, in corrispondenza del numero 23, un valore maggiore o uguale a 1. La ricerca risulta quindi meno efficiente di quella canonica che suggerisce di dividere 47 per quei numeri dispari compresi tra 3 (incluso) e $\lceil \sqrt{47} \rceil = 6$, e quindi solo due numeri, 3 e 5.
- B. La minore efficienza del metodo proposto risulta più evidente quando il numero da sottoporre a verifica è grande. Ad esempio, per $d_n = 123.456.789$, da cui $n = 61.728.394$; segue un numero di controlli sulle diverse successioni $n_{i,j}$ pari a $i \leq 20.576.131$; un numero di gran lunga superiore a quello proposto dal metodo canonico, ossia $\frac{\lceil \sqrt{123.456.789} \rceil}{2} = 5.555$.

Tuttavia, in termini di efficienza, i risultati sono del tutto identici a quelli del metodo canonico seguendo il **secondo approccio** qui di seguito descritto. Si possono infatti sfruttare le infinite successioni di numeri dispari composti descritte dalla diagonale secondaria e dalle antidiagonali poste sotto (o sopra) ad essa nella matrice $(a_{i,j}) \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$, con gli elementi $a_{i,j}$ che vanno dall'angolo in basso a sinistra a quello in alto a destra (Tabella 1.2).

Tabella 1.2 - MATRICE $(a_{i,j})$ OTTENUTA DA $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1, \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

La formula che descrive le successioni di numeri presenti sulla diagonale secondaria (colore rosso scuro) e sulle altre antidiagonali poste sotto ad essa (colore rosso) è facilmente ricavabile "giocando" con i e j ; in particolare:

Se $j = i \Rightarrow a_{i,j} = \dots = 4i^2 + 4i + 1$ (antidiagonale: 9, 25, 49, 81, ...)
 Se $j = i + 1 \Rightarrow a_{i,i+1} = \dots = 4i^2 + 8i + 3$ (antidiagonale: 15, 35, 63, 99, ...)
 Se $j = i + 2 \Rightarrow a_{i,i+2} = \dots = 4i^2 + 12i + 5$ (antidiagonale: 21, 45, 77, 117, ...)

 Se $j = i + k \Rightarrow a_{i,i+k} = \dots = 4i^2 + 4ki + (2k - 1)$

Continuando per comodità ad utilizzare la variabile j , è possibile definire le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti presenti sulle antidiagonali nel seguente modo:

$$a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \quad a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}. \tag{1.3}$$

Da cui segue il teorema:

TEOREMA 1.2 Per ogni $i,j \in \mathbb{N}_{>0}$, la formula $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ con $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti.

Da cui la seguente matrice:

Tabella 1.3 - MATRICE $(a_{i,j})$ OTTENUTA DA $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

In questo caso, la soluzione dell'equazione $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1) = 0$ è data dal luogo geometrico descritto dalle rette $i = -\frac{1}{2}$ e $(i + j) = \frac{1}{2}$.

Naturalmente, l'insieme delle successioni $a_{i,j}$ non mutano se i e j vengono scambiati ($a_{i,j} = 4j^2 + 4ji + 2i - 1$): la matrice nella tabella 1.3 viene semplicemente trasposta.

Analogamente al caso precedente, è possibile fornire le seguenti definizioni di primalità di un numero dispari e di un insieme di numeri primi maggiori di 2.

DEFINIZIONE 1.3 - RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI

Siano: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$

Sia: $d_n = 2n + 1$ (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)

Sia: $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$ con $a_{i,j}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)

Sia: $a_{i,j} \leq d_n$ (Oppure in modo equivalente: $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$; $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$; $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$)

$$d_n \text{ è primo} \Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$$

(ma anche: n identifica un d_n primo $\Leftrightarrow \nexists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$)

Oppure:

$$d_n \text{ è composto} \Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n; \text{ altrimenti } d_n \text{ è primo}$$

(ma anche: n identifica un d_n composto $\Leftrightarrow \exists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$; altrimenti n identifica un d_n primo)

DEFINIZIONE 1.4 – RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME DI NUMERI DISPARI PRIMI

Siano: $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$

Sia: $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$ oppure $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$

Sia: $B = \{z \mid z = 4x^2 + 4xy + 2y - 1\}$

L'insieme $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$ definisce l'insieme dei numeri primi dispari.

Di seguito, la lettura grafica dell'impostazione metodologica seguita che permette di evidenziare meglio le **regolarità** riscontrate nelle infinite successioni di numeri dispari composti descritte da $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$.

Come in precedenza, con l'obiettivo di individuare i valori di n che rendono $d_n = 2n + 1$ un numero composto, si pone $d_n = a_{i,j}$, da cui si ricava:

$$n = 2i^2 + 2ij + j - 1 \tag{1.4}$$

In questo caso, rappresentando sempre $n_{i,j}$ sull'asse delle ordinate, si possono comunque ottenere due diversi grafici:

- I. uno nel quale si rappresenta i sull'asse delle ascisse e si analizzano le diverse successioni che si generano al variare di j da 1 a 5 (per esempio);
- II. l'altro nel quale si rappresenta j sull'asse delle ascisse e si analizzano le diverse successioni che si generano al variare di i da 1 a 5.

Nel primo caso, con i sull'asse delle ascisse e facendo variare j da 1 a 5, si hanno:

$$\begin{aligned} \{n_{i,j}\}_{j=1; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=1; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 12, 24, 40 \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=2; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=2; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 4i + 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 17, 31, 49, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=3; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=3; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 6i + 2\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 22, 38, 58, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=4; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=4; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 8i + 3\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 27, 45, 67, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=5; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=5; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 10i + 4\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 32, 52, 76, \dots\} \\ \dots \\ \{n_{i,j}\}_{j=k; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=k; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2ji + (j - 1)\}_{j=1,2,\dots,k; k, i \in \mathbb{N}_{>0}} \end{aligned}$$

Nel secondo caso, con j sull'asse delle ascisse e facendo variare i da 1 a 5, si hanno:

$$\begin{aligned} \{n_{i,j}\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 7, 10, 13, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 7\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{12, 17, 22, 27, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 17\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{24, 31, 38, 45, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 31\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{40, 49, 58, 67, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 49\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{60, 71, 82, 93, \dots\} \\ \dots \\ \{n_{i,j}\}_{i=k; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=k; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i=1,2,\dots,k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}} \end{aligned}$$

Di seguito i grafici che ne mostrano le regolarità.

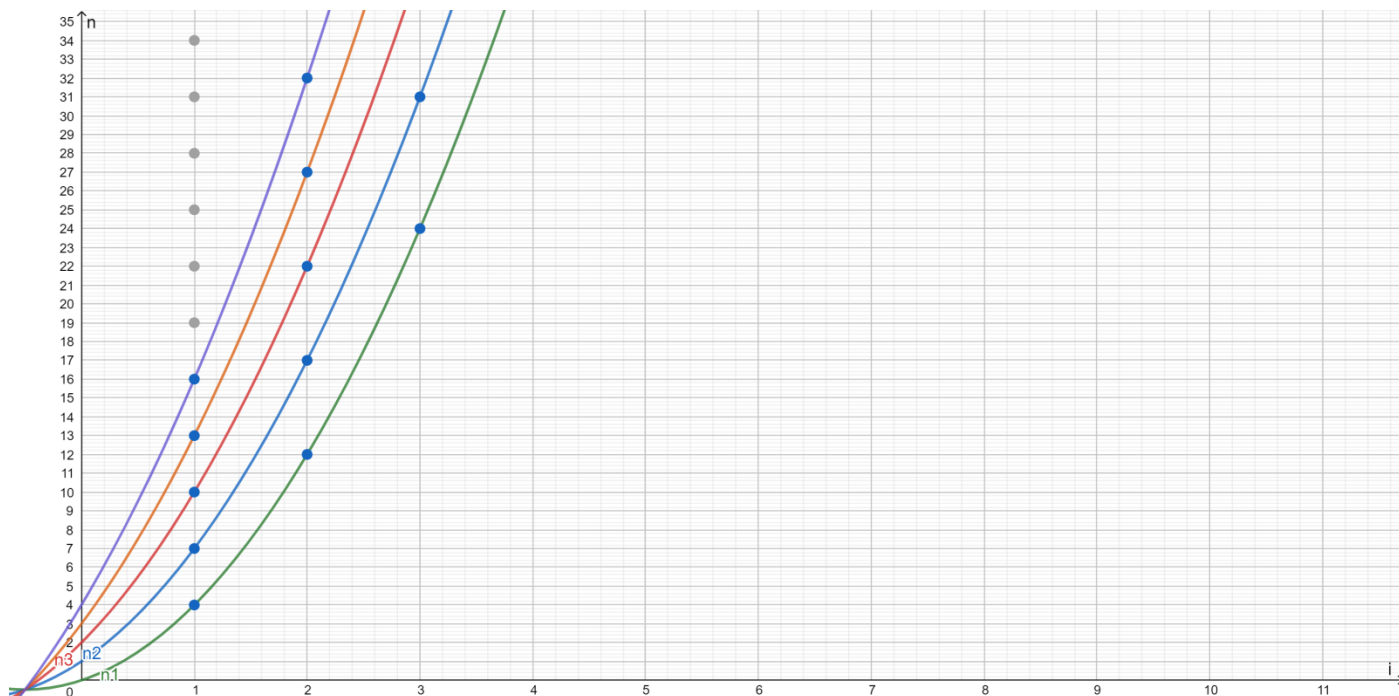


Grafico 1.2 - SUCCESIONI $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,5; i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$ DI n CHE RENDONO d_n UN NUMERO COMPOSTO

Anche in questo caso, il grafico è stato rappresentato in \mathbb{R} . In particolare, le successioni $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; i,k \in \mathbb{N}_{>0}}$ possono essere pensate come un fascio di parabole che hanno un punto in comune sempre in $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, intersecano l'asse delle ascisse nei punti $\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 2j + 2}}{2}$ e quello delle ordinate in $j - 1$ ed hanno vertice in $(-\frac{j}{2}; -\frac{j^2 - 2j + 2}{2})$ e asse $i = -\frac{j}{2}$.

Analogamente al grafico 1, **regolarità** vengono evidenziate sia sui singoli valori interi di i presenti sull'asse delle ascisse, che sulle singole successioni $\{n_{i,j}\}$, sia pur in modo meno evidente su queste ultime.

In particolare, riguardo alle successioni $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; i,k \in \mathbb{N}_{>0}}$, i numeri n che identificano d_n composti iniziano sempre da $(3j + 1)$, ma si susseguono con una regolarità non più costante, come visto in precedenza (+3 unità di n per la prima successione, +5 unità di n per la seconda successione, etc.), bensì seguono una legge ricorsiva secondo la quale ogni intervallo tra due numeri n che identificano d_n composti è pari alla lunghezza dell'intervallo precedente più 4 unità di n . Naturalmente, la legge che descrive queste regolarità è la seguente: $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$.

Focalizzando invece l'attenzione sui valori interi di i riportati sull'asse delle ascisse, ad identificare d_n composti sono quei valori di n che, a partire da n pari a $2i^2 + 2i$, si susseguono ogni $2i + 1$ unità di n . La legge "madre" è la stessa, ma in questo caso le successioni sono generate ponendo $i = 1, 2, \dots, k$, da cui $\{i_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$.

Utilizzando le successioni $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}}$ per la **verifica della primalità**, si considerino i consueti due esempi.

- A. Si vuole verificare la primalità di $d_n = 47$, da cui $n = 23$. Sulla base della condizione $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$ posta nella "seconda rappresentazione formale" e sotto l'ipotesi peggiore ($i = 1$), il numero di controlli da effettuare è pari anche in questo caso a 7 ($j \leq 7,3$). Si dovrebbe quindi effettuare una verifica sulle prime 7 successioni, ossia quelle che evidenziano come primo elemento $i = 1$ un numero non superiore a 23 o, in altre parole, quelle successioni la cui contro-immagine in corrispondenza del numero 23 mostra un valore maggiore o uguale a 1. La ricerca risulta quindi anche in questo caso meno efficiente di quella canonica.
- B. Analoghe conclusioni su $d_n = 123.456.789$.

Tuttavia, dal grafico 2 si percepisce che si avrebbe una maggiore efficienza qualora la verifica della primalità avvenga sulle successioni presenti sui valori interi di i riportati sull'asse delle ascisse, piuttosto che sulle successioni $\{n_{i,j}\}$ ottenute al variare di $j = 1, \dots, k$.

A tal fine, si rappresenta questa volta j sull'asse delle ascisse (grafico 1.3).

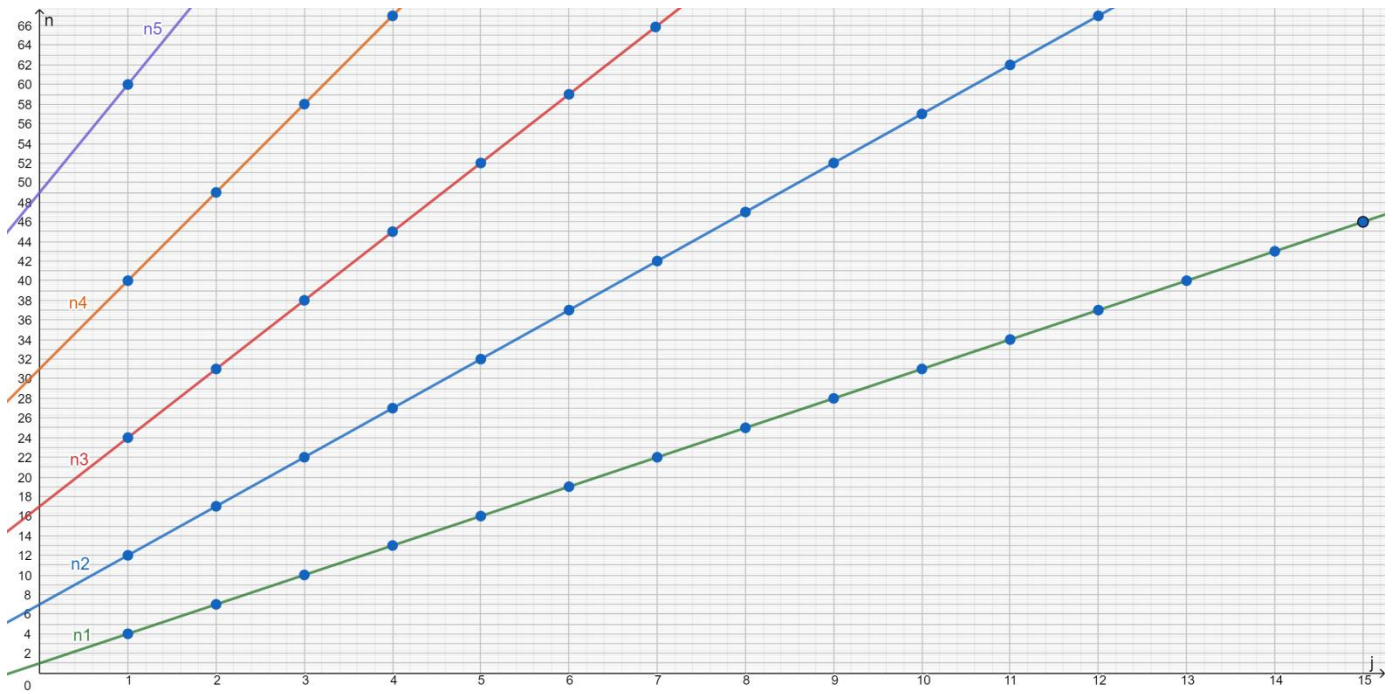


Grafico 1.3 - SUCCESIONI $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$ DI n CHE RENDONO d_n UN NUMERO COMPOSTO

In questo caso le rette che si generano al variare di $i = 1, 2, \dots, k$ non hanno alcun punto in comune, il coefficiente angolare assume valore pari a $2i + 1$ (lo stesso del grafico 1), l'intersezione con l'asse delle ascisse e delle ordinate avviene rispettivamente nei punti $-\frac{2i^2-1}{2i+1}$ e $2i^2 - 1$. In pratica, al crescere di i la retta tende ad aumentare l'inclinazione e al contempo vede allontanare dall'origine la sua intersezione con l'asse delle ascisse.

Naturalmente, le **regolarità** sono le stesse di quelle viste in precedenza, ma invertite.

In particolare, riguardo alle successioni $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$, i valori di n che identificano d_n composti si susseguono ogni $2i + 1$ unità di n , a partire da n pari a $2i^2 + 2i$. Naturalmente, la legge che descrive queste regolarità è la seguente: $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$.

Riguardo invece ai valori interi di j riportati sull'asse delle ascisse (in modo del tutto identico alle regolarità del grafico 1.2 sulle successioni $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k}$), i valori di n che identificano d_n composti iniziano sempre da $(3j + 1)$ e si susseguono secondo la consueta legge ricorsiva in base alla quale ogni intervallo tra due valori di n è determinato dalla lunghezza dell'intervallo precedente più 4 unità di n : $\{j_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$.

Riprendendo i consueti esempi per la **verifica della primalità**, e con riferimento alle successioni $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$, si vuole nuovamente verificare la primalità di:

- A. $d_n = 47$, da cui $n = 23$. Sulla base questa volta della condizione $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$ posta nella "seconda rappresentazione formale" e sotto l'ipotesi peggiore ($j = 1$), si ricava in questo caso $i \leq 2,9$, per cui la verifica della primalità del numero 47 richiede solo 2 controlli ($i = 1$ ed $i = 2$). Naturalmente, n è diverso sia da $n_{1,1}$ che $n_{2,1}$ e $d_n = 47$ è un numero primo. In termini di efficienza si otterrebbero quindi gli stessi risultati che si otterrebbero dividendo 47 per i numeri dispari compresi tra 3 (incluso) e $\lceil \sqrt{47} \rceil = 6$, ossia i numeri 3 e 5.
- B. Analizzando $d_n = 123.456.789$, da cui $n = 61.728.394$, si ricava un numero di controlli pari a $i \leq 5.555$, un numero di gran lunga inferiore ai 20.576.131 visti in precedenza e del tutto identico ai 5.555 suggeriti dal metodo canonico.

In **conclusione**, oltre alle regolarità evidenziate, quanto descritto - se reiterato all'infinito - permetterebbe di individuare la successione di infiniti numeri primi. Infatti, data una successione di numeri dispari maggiori di 1, $d_n = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}_{>0}$, escludendo prima quei valori di n individuati dalla successione $n_{1,1}$ ossia 4, 7, 10, ..., poi quelli individuati dalla successione $n_{2,1}$ ossia 12, 17, 22, ..., poi quelli della successione $n_{3,1}$ etc., quello che resta è l'infinita successione di numeri dispari d_n primi. Si tratta di una sorta di **crivello di Eratostene, ma più efficiente**.

Di seguito alcune rappresentazioni in \mathbb{R}^3 di $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ e $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$.

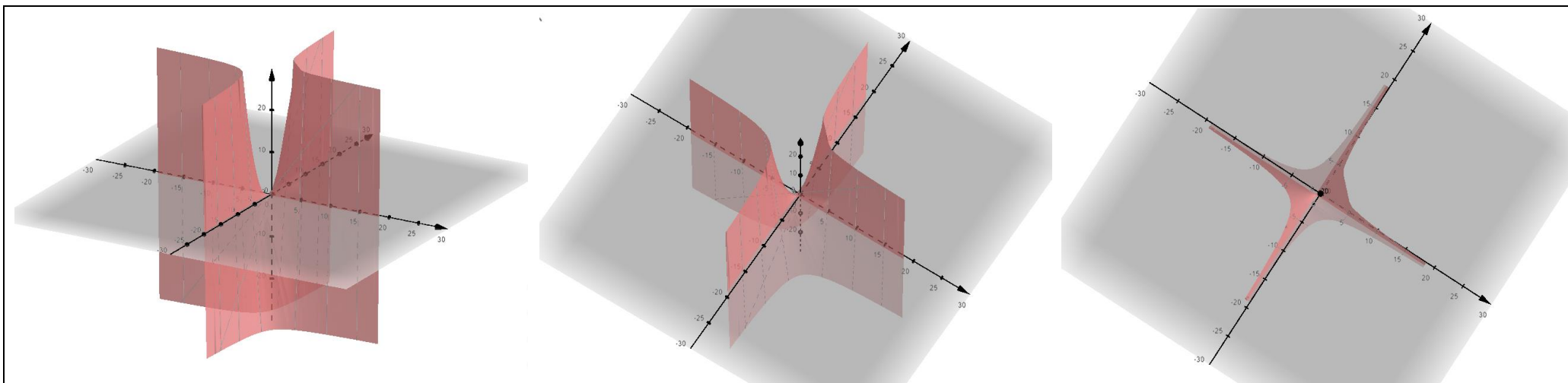


Grafico 1.4 $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$

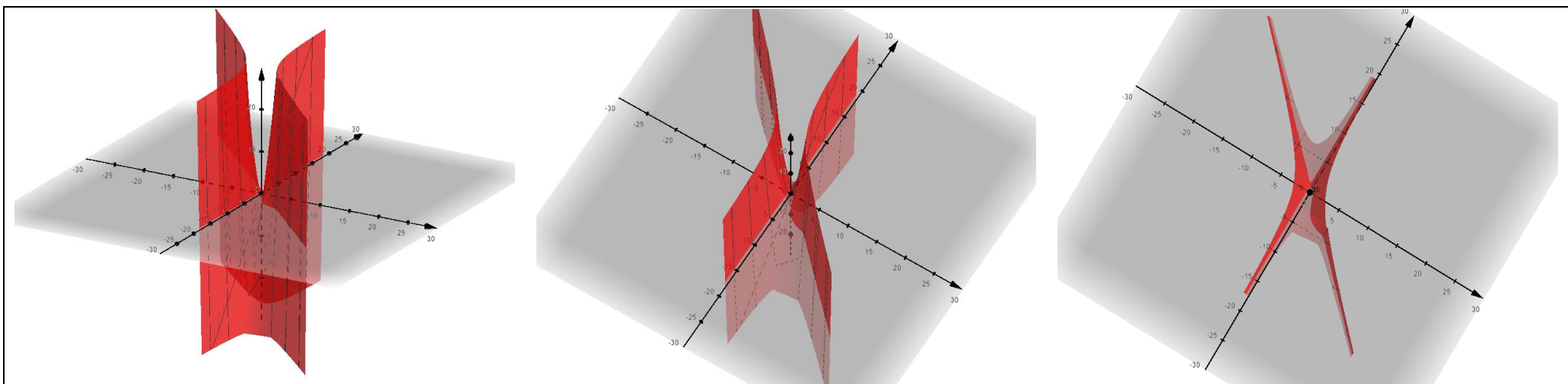


Grafico 1.5 $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$

2. L'utilizzo della funzione indicatrice e della funzione generatrice per rappresentare un successione di numeri primi

Lo scopo di questa seconda parte è descrivere formalmente una successione di numeri primi. Il procedimento è molto semplice. Si prende un qualsiasi numero naturale $n \geq 2$ e lo si divide per una funzione indicatrice (o caratteristica) $I_P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ che assume quindi solo due valori, zero e uno; in particolare, zero quando n è un numero composto e 1 quando n è un numero primo. Se il numero n è diviso per zero, esso non è definito; se è diviso per 1, rimane uguale a se stesso. E' possibile considerare questo rapporto n/I_P come una funzione generatrice di una successione¹ e chiamarla funzione generatrice elementare, $G_E(n)$. Segue il teorema 2.1.

TEOREMA 2.1 Siano: $n \in \mathbb{N}$, $I_P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ una funzione indicatrice pari a 1 quando n è primo, $G_E(n) = \frac{n}{I_P}$ una funzione generatrice elementare, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, $G_E(n)$ genera la successione di numeri primi.

Utilizzando le definizioni di primalità viste in precedenza si possono quindi ottenere le seguenti definizioni di una successione di numeri primi maggiori di 2. In particolare:

DEFINIZIONE 2.1 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI

Siano: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$
 Sia: $d_n = 2n + 1$ (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)
 Sia: $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ con $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)
 Sia: $a_{i,j} \leq d_n$ (Oppure in modo equivalente: $2ij + i + j \leq n$; $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$; $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$)
 Sia: $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \forall i, j, n \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \forall d_n$ (La funzione indicatrice pari ad 1 quando d_n è un numero primo)
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall d_n$, definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.

DEFINIZIONE 2.2 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI

Siano: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$
 Sia: $d_n = 2n + 1$ (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)
 Sia: $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ con $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)
 Sia: $a_{i,j} \leq d_n$ (Oppure in modo equivalente: $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$; $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$; $j \leq \frac{n + 1 - 2i^2}{2i + 1}$)
 Sia: $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \forall i, j, n \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \forall d_n$ (La funzione indicatrice pari ad 1 quando d_n è un numero primo)
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \forall d_n$, definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.

Tuttavia, è possibile definire I_P ricorrendo anche alla semplice definizione di numero primo, che permette di rappresentare una successione di numeri primi almeno in 3 modi diversi. In particolare:

1) Si definisce I_P fruttando semplicemente la definizione "alla lettera" di numero primo (numero maggiore di 1 divisibile solo per 1 e per se stesso), da cui la seguente rappresentazione:

DEFINIZIONE 2.3 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI

Siano: $n, l \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $2 \leq l \leq n - 1$
 Sia: $I_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists l | \frac{n}{l} \in \mathbb{N}, \forall n, l \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \forall n$, la funzione indicatrice pari ad 1 quando n è un numero primo
 $G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(n) = 0 \\ n, & \text{se } I_P(n) = 1 \end{cases} \forall n$, definisce la successione di numeri primi.

¹ Certo, avrei potuto definire $G_E(n) = n * I_P(n)$ ed ottenere una successione formata da numeri primi e da zeri, ma personalmente, preferisco allo zero il "non definito", "non esiste" o "non ha significato".

2) Si definisce I_P continuando a sfruttare la definizione di numero primo, ma da un altro punto di vista, quello della moltiplicazione, da cui la seguente rappresentazione:

DEFINIZIONE 2.4 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI

Siano: $n, l, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2, 2 \leq l \leq n - 1, 2 \leq m \leq n - 1$
 Sia: $I_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists l, m \mid l * m = n, \forall n, l, m \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \quad \forall n, \text{ la funz. indicatrice pari ad 1 quando } n \text{ è un numero primo}$
 $G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(n) = 0 \\ n, & \text{se } I_P(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n, \text{ definisce la successione di numeri primi.}$

3) Si definisce I_P utilizzando indirettamente la definizione di numero primo ed in particolare ricorrendo all'operatore Modulo che restituisce il resto di una divisione, da cui la seguente rappresentazione:

DEFINIZIONE 2.5 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI

Siano: $n, l \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $2 \leq l \leq n - 1$
 Sia: $I_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists l \mid n \bmod l = 0, \forall n, l \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \quad \forall n, \text{ la funzione indicatrice pari ad 1 quando } n \text{ è un numero primo}$
 $G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(n) = 0 \\ n, & \text{se } I_P(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n, \text{ definisce la successione di numeri primi.}$

Del resto, escludendo il numero 2, la ricerca dei numeri primi può essere circoscritta ai soli numeri dispari, verificando che essi siano divisibili solo per quei numeri dispari, se esistono, compresi tra 3 (incluso) e la parte intera della radice quadrata del numero dispari stesso. Ne segue una versione più efficiente di quella al punto 1. In particolare:

DEFINIZIONE 2.6 - RAPPRESENTAZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI

Siano: $n, l \in \mathbb{N}_{>0}; d_n = 2n + 1; d_l = 2l + 1$ con $3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})$.
 Sia: $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{Se } \exists d_l \mid \frac{d_n}{d_l} \in \mathbb{N}, \forall n, l \\ 1, & \text{Altrimenti} \end{cases} \quad \forall d_n, \text{ la funzione indicatrice pari ad 1 quando } d_n \text{ è un numero primo}$
 $G_E(n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall n, \text{ definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.}$

Naturalmente, la condizione $3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})$, oltre a ridurre sensibilmente la ricerca, esclude l'esistenza di d_l quando d_n è pari a 3, 5 o 7 e la non esistenza di d_l li rende numeri primi, sulla base della funzione indicatrice $I_P(d_n)$. Del resto, l'ultima rappresentazione può essere ulteriormente migliorata in termini di efficienza, andando a circoscrivere la successione d_l all'insieme dei numeri primi, ma perdendo in semplicità e compattezza della rappresentazione.

3. Generalizzazione delle formule trovate e ipotesi di Riemann

Le formule viste in precedenza, $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ e $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$, sono state ottenute in modo tale che potessero descrivere le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti per ogni $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$. In pratica, sono delle applicazioni $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ che assolvono alla loro compito (generare delle successioni di numeri dispari positivi composti) se operano in $\mathbb{N}_{>0}^2$ o in $\mathbb{Z}_{<-1}^2$, come mostra la tabella 3.1 qui di seguito riproposta.

Tabella 3.1 - INFINITE SUCCESSIONI $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ DI INFINITI NUMERI DISPARI

i\j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...

Tuttavia, è possibile circoscrivere $a_{i,j}$ anche in ambiti diversi da $\mathbb{N}_{>0}^2$, come ad esempio semplicemente \mathbb{N}^2 , oppure $\mathbb{N}_{>1}^2$, ma anche a partire da numeri interi negativi, come ad esempio $\mathbb{Z}_{>-3}^2$ e, se vogliamo determinare anche le infinite successioni di infiniti numeri pari, allargare il dominio di $a_{i,j}$ all'insieme \mathbb{Q}^2 , in particolare ai numeri dispari rapportati a 2.

Operando su insiemi diversi da $\mathbb{N}_{>0}^2$ si ottengono formule diverse da quelle sopra riportate, ma è comunque possibile definire delle **formule generali** che dipendono dall'insieme scelto, ed in particolare dal suo primo valore.

Prendendo come riferimento la formula meno efficiente, $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$, sostituendo per comodità x al posto di i e y al posto di j e, con lo scopo di utilizzare un'applicazione definita in $\mathbb{Z}_{>k}^2$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ricavano le seguenti formule, da cui quella "quasi generale" riportata nell'ultima riga della tabella 3.2.

Tabella 3.2 – FORMULE ASSOCIATE A $a_{x,y}$ E SOLUZIONI DI $a_{x,y} = 0$ AL VARIARE DEL DOMINIO

Dominio	Formula	$a_{x,y} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 14x + 14y + 49$	$x = -\frac{7}{2}; y = -\frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 10x + 10y + 25$	$x = -\frac{5}{2}; y = -\frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$a_{x,y} = 4xy + 6x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; y = -\frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$a_{x,y} = 4xy + 2x + 2y + 1$	$x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 2x - 2y + 1$	$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 6x - 6y + 9$	$x = \frac{3}{2}; y = \frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 10x - 10y + 25$	$x = \frac{5}{2}; y = \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 14x - 14y + 49$	$x = \frac{7}{2}; y = \frac{7}{2}$
...
$\mathbb{Z}_{>1-k}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 2(2k - 1)x + 2(2k - 1)y + (2k - 1)^2$	$x = -\frac{2k - 1}{2}; y = -\frac{2k - 1}{2}$

Le formule specifiche sopra esposte si possono ricavare attraverso la definizione di successione aritmetica, oppure aggiungendo o togliendo delle unità alle variabili x e y nella formula da cui siamo partiti $a_{x,y} = 4xy + 2x + 2y + 1$. Ad esempio, $a_{x,y} = 4(x - 1)(y - 1) + 2(x - 1) + 2(y - 1) + 1 = \dots = 4xy + 6x + 6y + 9$.

La formula "quasi generale" è stata invece ricavata partendo dal presupposto che siamo di fronte a delle iperbole. Infatti, data l'equazione generale di una conica: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, nelle nostre formule $b^2 - ac$ è maggiore di zero. La formula di riferimento è quindi la seguente: $a_{x,y} = 2bxy + 2dx + 2ey + f$, i cui parametri sono dati da $b = 2$, $d = e$, $f = d * e$. Inoltre, i parametri d ed e appartengono all'insieme dei numeri dispari descritti da $2k - 1$ con $k \in \mathbb{Z}$; mentre la relazione che lega k con l'insieme di definizione \mathbb{Z}^2 è la seguente: $\mathbb{Z}_{>1-k}^2$.

Rispetto alla tabella 1.1, le risultanze ottenute mostrano come il parametro f assuma i valori riportati sulla diagonale secondaria e i parametri d ed e siano quelli in corrispondenza della riga $i = 0$ e $j = 0$.

Sono stati infine riportati i valori per i quali $a_{x,y} = 0$ e le formule in funzione di k che generano detti valori.

Tuttavia, per migliorare l'applicabilità della formula "quasi generale", in essa si sostituisce $1 - k$ a k , da cui la seguente **prima formula generale** che descrive le infinite successioni di infiniti numeri dispari positivi composti, sia che x ed y abbiano un comune insieme di definizione ($\mathbb{Z}_{>k}^2$), che diverso ($x \in \mathbb{Z}_{>k}$; $y \in \mathbb{Z}_{>l}$).

Dominio	Prima formula generale	$a_{x,y} = 0$	
$\mathbb{Z}_{>k}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 2(1 - 2k)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)^2$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}; y = -\frac{1 - 2k}{2}$	(3.1)
$x \in \mathbb{Z}_{>k}$ $y \in \mathbb{Z}_{>l}$	$a_{x,y} = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}; y = -\frac{1 - 2l}{2}$	(3.2)

E' possibile quindi enunciare il seguente teorema 3.1 che generalizza il teorema 1.1 visto in precedenza.

TEOREMA 3.1 Fissati $k, l \in \mathbb{Z}$. Per ogni $x \in \mathbb{Z}_{>k}$ e $y \in \mathbb{Z}_{>l}$, la formula $a_{x,y}(k, l) = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)$ con $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti

In modo analogo, ma con qualche difficoltà in più, è possibile ricavare una formula che generalizza quella più efficiente vista in precedenza, ossia: $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$. Si ripropongono anche in questo caso le infinite successioni di infiniti numeri dispari che $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ descrive (tabella 3.3), ma questa volta in modo più esteso per poter meglio cogliere le affinità con le formule specifiche di seguito elencate.

Tabella 3.3 - INFINITE SUCCESSIONI $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$ DI INFINITI NUMERI DISPARI

i \ j	...	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
10	...	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	...	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	...	-17	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	...	-45	-15	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	...	-65	-39	-13	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	...	-77	-55	-33	-11	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	...	-81	-63	-45	-27	-9	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	...	-77	-63	-49	-35	-21	-7	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	...	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	...	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...
-0.5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	...
-3	...	115	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	...
-4	...	175	161	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	-7	-21	-35	-49	-63	-77	...
-5	...	243	225	207	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	-9	-27	-45	-63	-81	...
-6	...	319	297	275	253	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	-11	-33	-55	-77	...
-7	...	403	377	351	325	299	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	-13	-39	-65	...
-8	...	495	465	435	405	375	345	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	-15	-45	...
-9	...	595	561	527	493	459	425	391	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	-17	...
-10	...	703	665	627	589	551	513	475	437	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	...
-11	...	819	777	735	693	651	609	567	525	483	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	...

Anche in questo caso, le diverse formule specifiche sono state ottenute aggiungendo o togliendo delle unità alle variabili x e y nella formula da cui siamo partiti ($a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$).

La formula “quasi generale” è stata invece ricavata partendo sempre dal presupposto che siamo di fronte a delle iperbole, ma in questo caso di equazione $a_{x,y} = ax^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f$, i cui parametri sono dati da $a = 4$, $b = 2$, $d = 3(e - 1)$, $f = d * e - e^2$. Inoltre, i parametri d ed e appartengono nel caso sotto esposto all’insieme dei numeri dispari descritti rispettivamente da $12 - 6k$ e $5 - 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, da cui $f = \dots = 8k^2 - 34k + 35$; mentre la relazione che lega k con l’insieme di definizione \mathbb{Z}^2 è la seguente: $\mathbb{Z}_{>k-2}^2$.

Tabella 3.4 - FORMULE ASSOCIATE A $a_{x,y}$ E SOLUZIONI DI $a_{x,y} = 0$ AL VARIARE DEL DOMINIO

Dominio	Formula	$a_{x,y} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(18)x + 2(7)y + 77$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 36x + 14y + 77$	$x = -\frac{7}{2}; (x + y) = -\frac{11}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(12)x + 2(5)y + 35$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 24x + 10y + 35$	$x = -\frac{5}{2}; (x + y) = -\frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}_{>-1}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(6)x + 2(3)y + 9$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 12x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; (x + y) = -\frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(0)x + 2(1)y - 1$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$	$x = -\frac{1}{2}; (x + y) = +\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-6)x + 2(-1)y + 5$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 12x - 2y + 5$	$x = \frac{1}{2}; (x + y) = \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-12)x + 2(-3)y + 27$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 24x - 6y + 27$	$x = \frac{3}{2}; (x + y) = \frac{9}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-18)x + 2(-5)y + 65$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 36x - 10y + 65$	$x = \frac{5}{2}; (x + y) = \frac{13}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-24)x + 2(-7)y + 119$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 48x - 14y + 119$	$x = \frac{7}{2}; (x + y) = \frac{17}{2}$
...
$\mathbb{Z}_{>k-2}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2(12 - 6k)x + 2(5 - 2k)y + (8k^2 - 34k + 35)$	$x = -\frac{5 - 2k}{2}; (x + y) = \frac{4k - 7}{2}$

Confrontando la tabella 3.1 (estesa) con le risultanze ottenute, si ribadisce come il parametro f assuma i valori riportati sulla diagonale secondaria e il parametro e sia quello in corrispondenza della riga $i = 0$ e colonna $j + 1$.

Sono stati, anche in questo caso, riportati i valori per i quali $a_{x,y} = 0$ e le formule in funzione di k che generano detti valori. Al riguardo, è possibile notare come la relazione $a_{x,y} = 0$ sia verificata per la stessa costante $(-\frac{3}{2})$ solo quando $a_{x,y}$ è definito in \mathbb{N}^2 .

Analogamente a quanto fatto in precedenza, per migliorare l’applicabilità della formula trovata, si sostituisce $k + 2$ a k in d ed e ; infine, si ricava f sulla base della relazione $f = d * e - e^2$ vista in precedenza. Segue quindi la **seconda formula generale** che descrive le infinite successioni di infiniti numeri dispari positivi composti (formula più efficiente), sia con x ed y appartenenti allo stesso dominio ($\mathbb{Z}_{>k}^2$), che a domini differenti ($x \in \mathbb{Z}_{>k}; y \in \mathbb{Z}_{>l}$).

Dominio	Seconda formula generale (più efficiente)	$a_{x,y} = 0$
$\mathbb{Z}_{>k}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2(-6k)x + 2(1 - 2k)y + (8k^2 - 2k - 1)$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}; (x + y) = \frac{4k + 1}{2}$ (3.3)
$x \in \mathbb{Z}_{>k}$ $y \in \mathbb{Z}_{>l}$	$a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}; (x + y) = \frac{2k + 2l + 1}{2}$ (3.4)

E’ possibile quindi enunciare il seguente teorema 3.2 che generalizza il teorema 1.2 visto in precedenza.

TEOREMA 3.2 Fissati $k, l \in \mathbb{Z}$. Per ogni $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l-k-1}$, la formula $a_{x,y}(k, l) = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)$ con $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ descrive le infinite successioni formate da infiniti numeri dispari composti

Le nuove formule trovate (teorema 3.1 e 3.2) permettono di generalizzare le definizioni date in precedenza di primalità e successione di numeri primi dispari (in questo caso in un’unica definizione) e di un insieme di numeri primi dispari.

DEFINIZIONE 3.1 RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI E DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI

Sia: $d_n = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)
 Fissati: $k, l \in \mathbb{Z}$.
 Siano: $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$
 Sia: $a_{x,y}(k, l) = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)$, $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$
 (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)
 Sia: $a_{x,y}(k, l) \leq d_n$ (Oppure in modo equivalente:
 $2xy + (1 - 2l)x + (1 - 2k)y + (2kl - k - l) \leq n$; $x \leq \frac{n+(2k-1)y+(k+l-2kl)}{2y+(1-2l)}$; $y \leq \frac{n+(2l-1)x+(k+l-2kl)}{2x+(1-2k)}$)
 d_n è primo $\Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n$
 (ma anche: n identifica un d_n primo $\Leftrightarrow \nexists 2xy + (1 - 2l)x + (1 - 2k)y + (2kl - k - l) = n \forall x, y, n$)
 Oppure
 d_n è composto $\Leftrightarrow \exists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n$; altrimenti d_n è primo
 (ma anche: n identifica un d_n composto $\Leftrightarrow \exists 2xy + (1 - 2l)x + (1 - 2k)y + (2kl - k - l) = n \forall x, y, n$;
 altrimenti n identifica un d_n primo)
 Sia: $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{Se } d_n \text{ è primo} \\ 0, & \text{Se } d_n \text{ è composto} \end{cases} \quad \forall d_n$ (La funzione indicatrice pari ad 1 quando d_n è un numero primo)
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$, definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.

DEFINIZIONE 3.2 RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO PRIMO DISPARI E DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI PRIMI DISPARI

Sia: $d_n = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (La successione infinita di numeri dispari maggiori di 1)
 Fissati: $k, l \in \mathbb{Z}$
 Siano: $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$
 Sia: $a_{x,y}(k, l) = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)$, $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$
 (Le infinite successioni di infiniti numeri dispari composti)
 Sia: $a_{x,y}(k, l) \leq d_n$ (Oppure in modo equivalente: $2x^2 + 2xy + (-4k - 2l)x + (1 - 2k)y + (2k^2 + 2kl - l - 1) \leq n$;
 $\frac{2k+1-y-\sqrt{y^2-(2l+2)y+l^2+2l+2+2n}}{2} \leq x \leq \frac{2k+1-y+\sqrt{y^2-(2l+2)y+l^2+2l+2+2n}}{2}$; $y \leq \frac{n-2x^2+(4k+2l)x-2k^2-2kl+l+1}{2x+1-2k}$)
 d_n è primo $\Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n$
 (ma anche: n identifica un d_n primo $\Leftrightarrow \nexists 2x^2 + 2xy + (-4k - 2l)x + (1 - 2k)y + (2k^2 + 2kl - l - 1) = n \forall x, y, n$)
 Oppure
 d_n è composto $\Leftrightarrow \exists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n$; altrimenti d_n è primo
 (ma anche: n identifica un d_n composto $\Leftrightarrow \exists 2x^2 + 2xy + (-4k - 2l)x + (1 - 2k)y + (2k^2 + 2kl - l - 1) = n \forall x, y, n$;
 altrimenti n identifica un d_n primo)
 Sia: $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{Se } d_n \text{ è primo} \\ 0, & \text{Se } d_n \text{ è composto} \end{cases} \quad \forall d_n$ (La funzione indicatrice pari ad 1 quando d_n è un numero primo)
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Non definita, se } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{se } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$, definisce la successione di numeri primi maggiori di 2.

DEFINIZIONE 3.3 - RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME DI NUMERI DISPARI PRIMI

Fissati $k, l \in \mathbb{Z}$
 Sia: $n \in \mathbb{N}_{>0}$
 Siano: $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$
 Sia: $A = \{z \in \mathbb{N}_{>2} \mid z = 2n + 1\}$
 Sia: $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)\}$
 oppure
 Sia: $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)\}$
L'insieme $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$ definisce l'insieme degli infiniti numeri primi dispari.

Tornando ai risultati ottenuti, ed in particolare quelli con dominio $\mathbb{Z}_{>1}^2$, si segnalano innanzitutto alcune coincidenze con la congettura di Riemann. La funzione zeta è stata infatti studiata da Riemann nell'ambito di numeri complessi con parte reale maggiore di 1 e si basa sull'assunto che gli zeri non banali si distribuiscano intorno alla retta reale $x = \frac{1}{2}$, la stessa che verifica $a_{x,y}(k, l) = 0$ quando $k = l = 1$, ossia quando x e y sono maggiori di 1, sia nella prima che nella seconda² formula generale. Naturalmente parliamo di cose diverse ma per certi versi complementari, essendo la funzione zeta costruita in modo tale da essere formata da soli numeri primi e $a_{x,y}(k, l)$ che, per valori di $x > k$ ed $y > l$, genera sicuramente numeri non primi³.

Di seguito i grafici in \mathbb{R}^3 di $a_{x,y}(k, l)$ con $k = l = 1$ e quelli ottenuti risolvendo $a_{x,y}(k = l = 1) = 0$.

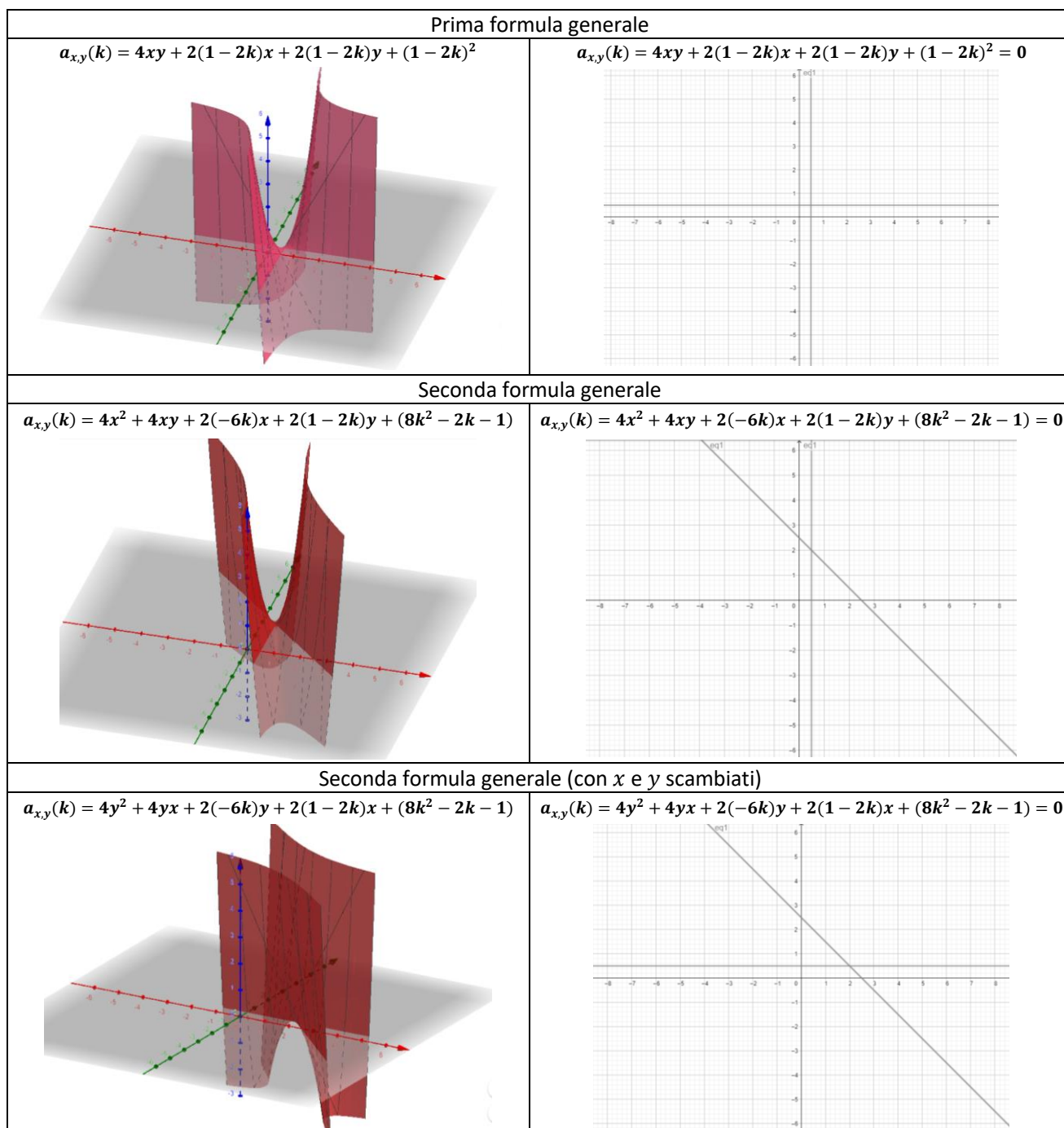


Grafico 3.1 - PRIMA E SECONDA FORMULA GENERALE CON $k = l = 1$

² In realtà la seconda formula è verificata anche per $x + y = \frac{5}{2}$.

³ Va ricordato che, fissato k , anche per determinati valori di $x, y \leq k$, $a_{x,y}(k)$ individua delle successioni di numeri non primi, nonché quella successione costituita da tutti i numeri dispari e quindi anche primi.

A prescindere dalle eventuali coincidenze, forse la parte più interessante di questo *paper* è l'aver individuato delle regolarità sui numeri composti con due specifiche formule. Se infatti la mia interpretazione della congettura di Riemann è corretta, ovvero - oltre a permettere un calcolo esatto di $\pi(N)$ - essa, attraverso l'ipotesi degli zeri non banali, rivela una natura non caotica ma armonica dei numeri primi, allora mi piace pensare che quanto descritto in questo *paper* possa contribuire a dimostrarne la veridicità. La veridicità dell'ipotesi di Riemann, ossia che i numeri primi seguano delle regolarità, trova infatti conforto nelle regolarità dei numeri composti descritte nella prima parte del presente *paper* con i grafici 1.1, 1.2, 1.3 e con le formule ad essi associate.

A titolo di esempio, si ripropone in forma più estesa il grafico 1.2 (ora grafico 3.2) dal quale risultano particolarmente evidenti le regolarità che caratterizzano le successioni che si ottengono sui valori interi riportati sull'asse delle ascisse i , dove, lo si ricorda, ad identificare d_n composti sono quei valori di n che, a partire da n pari a $2i^2 + 2i$, si susseguono ogni $2i + 1$ unità di n . La legge è la seguente: $\{i_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$.

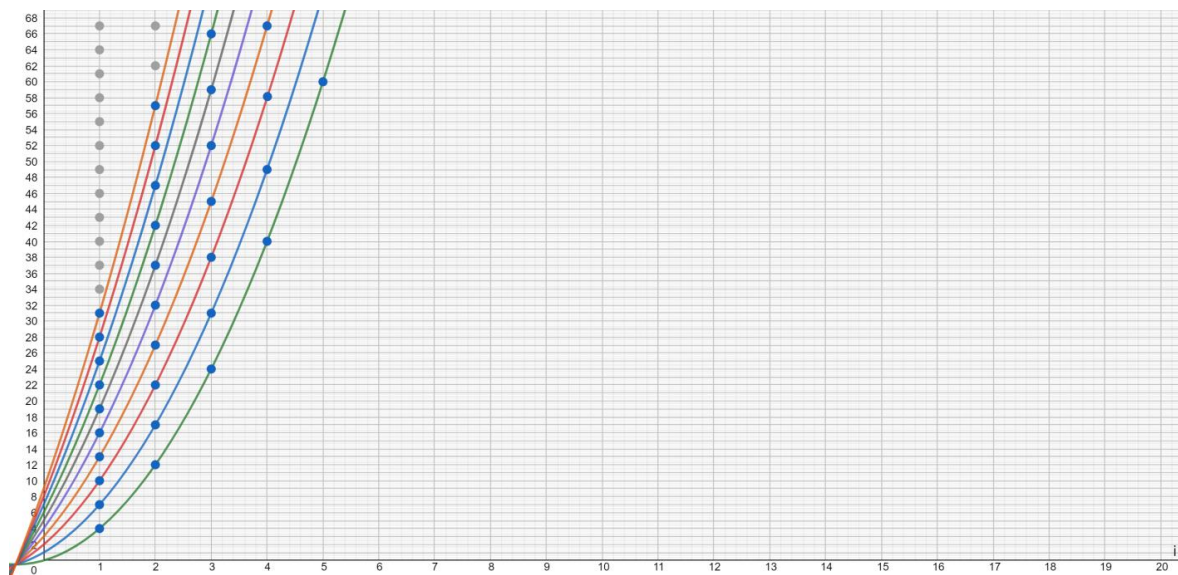


Grafico 3.2 - SUCCESIONI $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$

Quindi, **accertate le regolarità che caratterizzano i numeri composti e data la complementarietà di questi ultimi con l'insieme dei numeri primi, allora anche i numeri primi si susseguono con regolarità**, sia pur come conseguenza delle regolarità che caratterizzano i numeri composti.

Mi piace chiudere questo *paper* con delle considerazioni più prettamente filosofiche che sembrano smentire solo in apparenza quanto sopra evidenziato.

Nonostante le risultanze, continuo infatti a pensare che i numeri primi rappresentino il caos e ad abbracciare la teoria secondo la quale dal caos si generi l'ordine e come questi convivano in equilibrio.

Secondo il mio modesto parere, infatti, ritengo che anche il caos dei numeri primi conviva in equilibrio con l'ordine dei numeri composti che ha generato: senza il disordine dei numeri primi, non credo possa esistere l'ordine dei numeri composti e in generale l'ordine che caratterizza l'aritmetica, e forse l'intera matematica, con le sue regole e tutto quello che la matematica stessa riesce a raffigurare, incluso il caos dei numeri primi che si è voluto, spero degnamente, rappresentare in questo *paper*.

Trovare una relazione che possa descrivere tutti i numeri primi sarebbe, secondo il mio modesto parere, trovare la formula dalla quale si è generata la matematica, una contraddizione; personalmente vedo come candidato più adatto il semplice numero 1, o meglio l'unità, dalla quale si è forse generato il caos dei numeri primi, dal quale a sua volta è scaturito l'ordine dei numeri composti e di tutta la matematica. Una sorta di big bang.

In conclusione, credo che l'ipotesi di Riemann sia vera, ma allo stesso tempo sia anche falsa, poiché l'ordine evidenziato è solo conseguenza dell'ordine che ha generato con i numeri composti. Inoltre, osservando il grafico 3.2 - oltre a desumere la solitudine che caratterizza i numeri primi particolarmente grandi e come questi si allontanino sempre più gli uni dagli altri (un po' come le galassie) - sarei tentato di sostenere, se non fosse stato già ampiamente dimostrato il contrario, che i numeri primi non siano infiniti; evidentemente, esiste sempre un n a cui non è associato nessun pallino (grafico 3.2).

Bibliografia

1. *I numeri primi – Un lungo cammino verso l'infinito*. Mondo matematico, 2018. RBA Italia S.r.l.

Notes on prime numbers: regularity on composite numbers, formal representations and Riemann hypothesis

Introduction

The purpose of this paper is to show, through the regularities that emerge on composite numbers, some formal representations of primality, set of prime numbers and sequence of prime numbers. These regularities will also be seen in the context of the Riemann hypothesis. This work has been divided into three parts (paragraphs).

In the first part two formulas will be identified, defined in $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$, that describe the infinite sequences of infinite composite odd numbers. On the basis of these formulas, two definitions will follow, both of primality and of sets of prime numbers. In addition, graphs will be used to better represent the results and the regularities that have emerged, as well as some examples on the efficiency of the formulas found for the purposes of primality.

In the second part, through an indicator function (or characteristic) and a generating function, we will try to represent a sequence of prime numbers starting both from the two primality definitions identified above, and from the simple definition of prime number.

In the third part we will try to generalize the two formulas found in the first part to domains other than $\mathbb{N}_{>0}$. The definitions given above will be adapted to the new formulas and, lastly, the results obtained will be analysed in the context of the Riemann hypothesis.

1. Primality, set of prime numbers and regularities through the sequences of composite odd numbers

To identify the infinite sequences of composite odd numbers, the following methodological approach will be used.

Let: $i, j \in \mathbb{Z}$

Let: $d_j = 2j + 1$ (The sequences of infinite odd numbers)

Let: $a_{i,j} = 3d_j + (i - 1) * 2d_j$ (The infinite arithmetic sequences - with first term $3d_j$ and common difference $2d_j$ - of infinite odd numbers) with $a_{i,j} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$. Besides, since $d_j = 2j + 1$, follows:

$$a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1, \quad a_{i,j} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

By varying i e j in \mathbb{Z} , we therefore obtain the infinite sequences of infinite odd numbers represented in table 1.1.

Table 1.1 - INFINITE SEQUENCES $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ OF INFINITE ODD NUMBERS

$i \setminus j$...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...

It is possible to think of table 1.1 as an infinite matrix $(a_{i,j})$ associated with the application $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ and state some properties:

- a) $a_{i,j} = a_{j,i}$ The matrix is symmetry with respect to the main diagonal, but also to the secondary one
- b) $a_{i,j} = -a_{i,-(j+1)}$ For all row i , each element $a_{i,j}$ has its opposite in $a_{i,-(j+1)}$
- c) $a_{i,j} = -a_{-(i+1),j}$ For all column j , each element $a_{i,j}$ has its opposite in $a_{-(i+1),j}$
- d) $a_{i,-1/2} = a_{-1/2,j} = 0$ Solutions of the equation $a_{i,j} = 0$ is the locus of the points described by $i = -\frac{1}{2}$ and $j = -\frac{1}{2}$.

Restricting the analysis to $i, j \in \mathbb{N}$, from table 1 it can be seen that in the part highlighted in red ($i, j > 0$) only composite numbers appear, while prime numbers greater than 2 can only exist in the part highlighted in green, that is, within the row $i = 0 \forall j > 0$ ($a_{0,j} = \dots = 2j + 1$) and column $j = 0 \forall i > 0$ ($a_{i,0} = \dots = 2i + 1$).

THEOREM 1.1 For all $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$, the formula $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ with $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ describes the infinite sequences formed by infinite composite odd numbers.

It is therefore possible to define an odd number $d_n = 2n + 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$) prime as follows:

DEFINITION 1.1 – REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER

Let: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$
 Let: $d_n = 2n + 1$ (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)
 Let: $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ with $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (The infinite sequences of infinite composite odd numbers)
 Let: $a_{i,j} \leq d_n$ (Or in an equivalent way: $2ij + i + j \leq n$; $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$; $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$)

d_n is prime $\Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$
 (but also: n identifies a d_n prime $\Leftrightarrow \nexists 2ij + i + j = n \forall i, j, n$)

Or:

d_n is composite $\Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$; else d_n is prime
 (but also: n identifies a d_n composite $\Leftrightarrow \exists 2ij + i + j = n \forall i, j, n$; else n identifies a d_n prime)

The condition " $a_{i,j} \leq d_n$ ", or those equivalent to it, is functional to avoid an infinite search if d_n is a prime number, but also to restrict the search if d_n is a composite number.

It is also possible to think in terms of numerical sets and define the set of infinite odd prime numbers as follows:

DEFINITION 1.2 - REPRESENTATION OF A SET OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$
 Let: $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$ or $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$
 Let: $B = \{z \mid z = 4xy + 2x + 2y + 1\}$
The set $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$ defines the set of odd prime numbers.

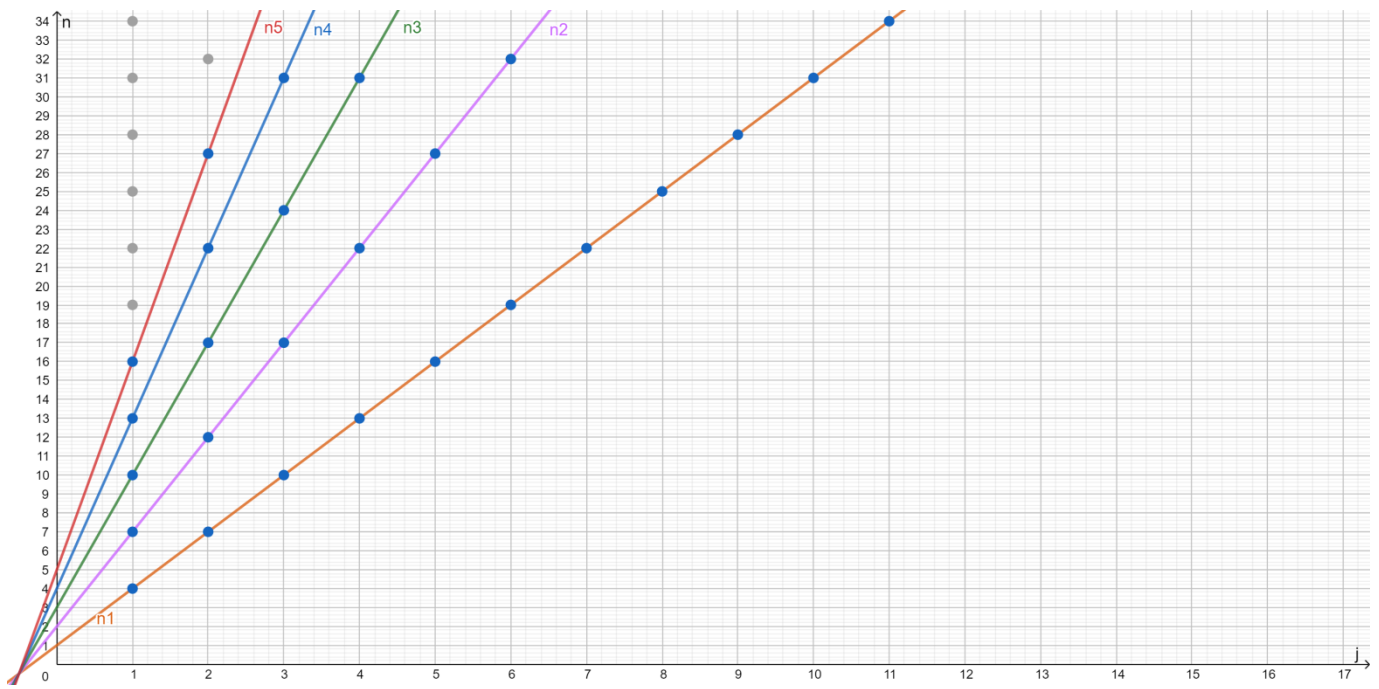
Below, a graphical reading of the methodological approach followed and of the **regularities** found in the infinite sequences of composite numbers that $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ describes.

To this end, it was decided to check for which values of n it is possible to obtain composite d_n , equalling to $d_n = 2n + 1$ the infinite sequences of infinite composite numbers that $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ describes, hence:

$$n = 2ij + i + j \tag{1.2}$$

By representing n on the ordinate axis, j (or in an equivalent way i) on the abscissa axis and varying and varying i (or in an equivalent way j) for example from 1 to 5, we obtain the following sequences:

- $\{n_{i,j}\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 7, 10, 13, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 2\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 12, 17, 22, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 3\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 17, 24, 31, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 4\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 22, 31, 40, \dots\}$
- $\{n_{i,j}\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 5\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 27, 38, 49, \dots\}$
- ...
- $\{n_{i,j}\}_{i=k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2ij + i + j\}_{i=k; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + i\}_{i=1, 2, \dots, k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}}$



Graph 1.1 - SEQUENCES $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + i$ OF n THAT MAKE d_n A COMPOSITE NUMBER

The graph 1.1 above shows the regularities on the different sequences that, for greater visual clarity, have been represented in \mathbb{R} . The sequences $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$ can be thought of as a line bundle with center in $\mathbb{C}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. The straight lines intersect the abscissa axis j at the point $-\frac{i}{2i+1}$ and the ordinates axis at i ; they also have an angular coefficient equal to $2i + 1$. For $i = 1$ we get the first line $n_{1,j} = 3j + 1$, while for very large i we obtain a straight line that intersects the abscissa axis at a point close to $-\frac{1}{2}$ and it is almost parallel to the ordinate axis.

Returning to $\mathbb{N}_{>0}$, the regularities in the succession of numbers n that identify composite d_n are easily observable both on the sequences (the straight lines) both on the integer values present on the abscissa axis j .

As regards the sequences $\{n_{i,j} = (2i + 1)j + i\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$, the numbers n identifying composite d_n follow every $2i + 1$ units of n , starting from n equal to $3i + 1$.

As regards the integer values present on the abscissa axis j , and similarly to the previous case, the values of n identifying composite d_n follow every $2j + 1$ units of n , starting from n equal to $3j + 1$, for all $j \in \mathbb{N}_{>0}$.

After all, the part in red highlighted in table 1 shows the same sequences, whether they are analysed by rows or by columns. Of course, the law describing these regularities is as follows: $\{n_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_{>0}} = 2ij + i + j$.

Using the sequences $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}}$ for the **primality test** and, remembering that n identifies a composite d_n if and only if there is an element of the sequence $\{n_{i,j} = n, \forall i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ and $j = 1$ (worst-case scenario), consider the following two examples.

- A. $d_n = 47$, from which $n = 23$. On the basis of the condition $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$ placed in the "first formal representation" and under the worst hypothesis ($j = 1$), checks are required on the first seven successions ($j \leq 7,3$). It is therefore necessary to carry out a check on the first seven sequences, i.e. those whose first element ($j = 1$) does not exceed 23 or, in other words, those whose inverse image shows, in correspondence with the number 23, a value greater than or equal to 1. The search is therefore less efficient than the canonical one which suggests dividing 47 by those odd numbers between 3 (inclusive) and $\lceil \sqrt{47} \rceil = 6$, and thus only two numbers, 3 and 5.
- B. The lower efficiency of the proposed method is more evident when the number to be checked is large. For example, for $d_n = 123.456.789$, from which $n = 61.728.394$, there follows a number of controls on the different sequences $n_{i,j}$ equal to $i \leq 20.576.131$; much higher than that proposed by the canonical method, i.e. $\frac{\lceil \sqrt{123.456.789} \rceil}{2} = 5.555$.

Moreover, in terms of efficiency, the results are completely identical to those of the canonical method if the **second approach** described below is followed. In fact, can be exploited the infinite sequences of odd composite numbers present on the secondary diagonal and on the other antidiagonals below (or above) it in the matrix $(a_{i,j}) \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$, with the elements $a_{i,j}$ ranging from the lower left corner to the upper right corner (Table 1.2).

Table 1.2 - MATRIX $(a_{i,j})$ OBTAINED FROM $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1, \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$

i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

The formula that describes the sequences of numbers present on the secondary diagonal (dark red colour) and on the other antidiagonals below it (red colour) is easily obtained by "playing" with i and j ; in particular:

If $j = i \implies a_{i,j} = \dots = 4i^2 + 4i + 1$ (antidiagonal: 9, 25, 49, 81, ...)

If $j = i + 1 \implies a_{i,i+1} = \dots = 4i^2 + 8i + 3$ (antidiagonal: 15, 35, 63, 99, ...)

If $j = i + 2 \implies a_{i,i+2} = \dots = 4i^2 + 12i + 5$ (antidiagonal: 21, 45, 77, 117, ...)

....

If $j = i + k \implies a_{i,i+k} = \dots = 4i^2 + 4ki + (2k - 1)$

Continuing for convenience to use the variable j , it is possible to define the infinite sequences of infinite composite odd numbers present on antidiagonals as follows:

$$a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \quad a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}. \tag{1.3}$$

From which follows the theorem:

THEOREM 1.2 For all $i,j \in \mathbb{N}_{>0}$, the formula $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ with $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ describes the infinite sequences formed by infinite composite odd numbers.

Hence the following matrix:

Table 1.3 - MATRIX $(a_{i,j})$ OBTAINED FROM $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1, \forall i,j \in \mathbb{N}_{>0}$

i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...

In this case, the solution of the equation $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1) = 0$ is the locus of the points described by $i = -\frac{1}{2}$ and $(i + j) = \frac{1}{2}$. Similarly to the previous case, an odd number $d_n = 2n + 1 (\forall n \in \mathbb{N}_{>0})$ can be called prime as follows:

Of course, the set of sequences $a_{i,j}$ does not change if i and j are exchanged ($a_{i,j} = 4j^2 + 4ji + 2i - 1$): the matrix in table 1.3 is simply transposed.

As in the previous case, the following primality definitions and a set of prime numbers greater than 2 can be provided.

DEFINITION 1.3 - REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER

Let: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$

Let: $d_n = 2n + 1$ (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)

Let: $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$ with $a_{i,j}: \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (The infinite sequences of infinite composite odd numbers)

Let: $a_{i,j} \leq d_n$ (Or in an equivalent way: $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$; $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$; $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$)

d_n is prime $\Leftrightarrow \nexists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$

(but also: n identifies a d_n prime $\Leftrightarrow \nexists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$)

Or:

d_n is composite $\Leftrightarrow \exists a_{i,j} = d_n \forall i, j, n$; else d_n is prime

(but also: n identifies a d_n composite $\Leftrightarrow \exists 2i^2 + 2ij + j - 1 = n \forall i, j, n$; else n identifies a d_n prime)

DEFINITION 1.4 - REPRESENTATION OF A SET OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$

Let $A = \{z \mid z = 2x + 1\}$ or $A = \{z \mid z = 2y + 1\}$

Let $B = \{z \mid z = 4x^2 + 4xy + 2y - 1\}$

The set $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$ defines the set of odd prime numbers.

Below is a graphical reading of the methodological approach used to better highlight the **regularities** found in the infinite sequences of odd composite numbers described by $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$.

As before, to identify the values of n that make $d_n = 2n + 1$ a composite number, we set $d_n = a_{i,j}$ from which we obtain:

$$n = 2i^2 + 2ij + j - 1 \quad (1.4)$$

In this case, always representing $n_{i,j}$ on y-axis, we can however obtain two different graphs:

- I. one in which i is represented on the x-axis and we analyse the different sequences that are generated by varying j from 1 to 5 (for example);
- II. the other in which j is represented on the x-axis and we analyse the different sequences that are generated by varying i from 1 to 5.

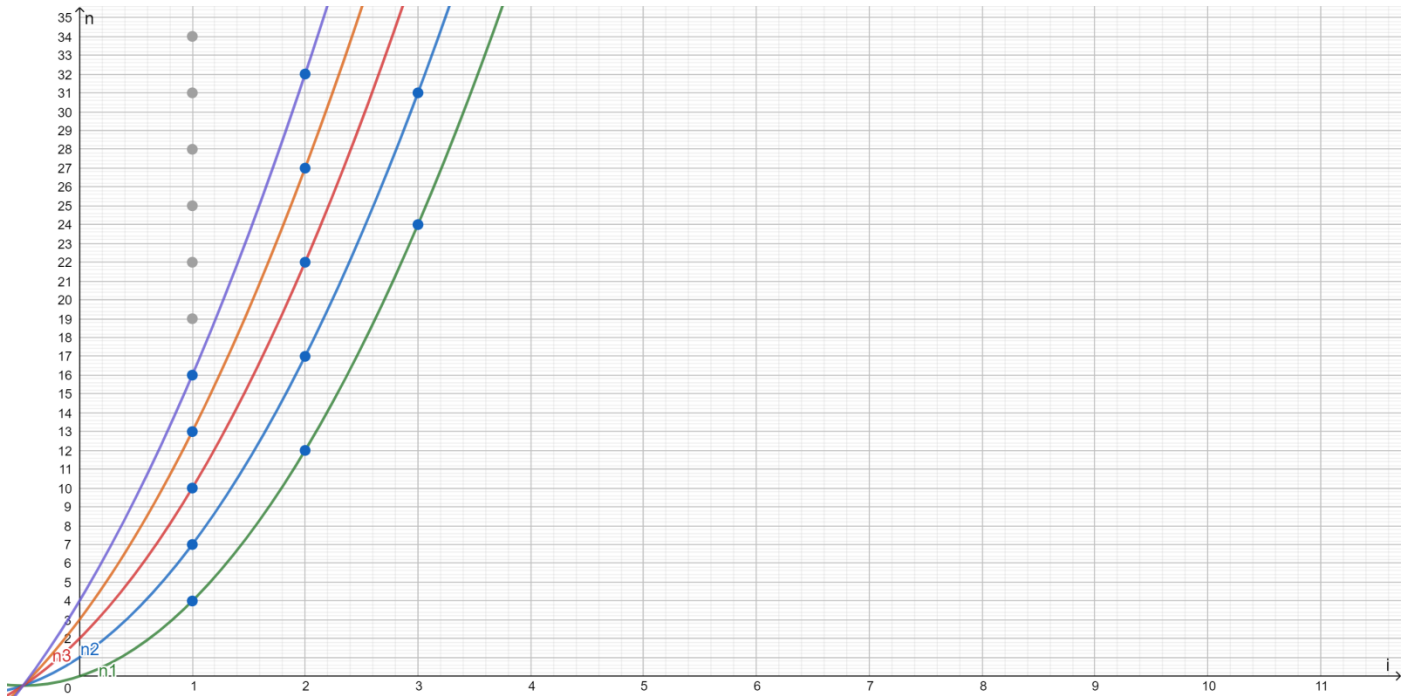
In the first case, with i on the x-axis and varying j from 1 to 5, we have:

$$\begin{aligned} \{n_{i,j}\}_{j=1; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=1; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 12, 24, 40 \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=2; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=2; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 4i + 1\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7, 17, 31, 49, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=3; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=3; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 6i + 2\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{10, 22, 38, 58, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=4; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=4; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 8i + 3\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{13, 27, 45, 67, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{j=5; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=5; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 10i + 4\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{16, 32, 52, 76, \dots\} \\ \dots \\ \{n_{i,j}\}_{j=k; i \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ji + j - 1\}_{j=k; i \in \mathbb{N}_{>0}} = \{2i^2 + 2ji + (j - 1)\}_{j=1, 2, \dots, k; k, i \in \mathbb{N}_{>0}} \end{aligned}$$

In the second case, with j on the x-axis and varying i from 1 to 5, we have:

$$\begin{aligned} \{n_{i,j}\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=1; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{3j + 1\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{4, 7, 10, 13, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=2; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{5j + 7\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{12, 17, 22, 27, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=3; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{7j + 17\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{24, 31, 38, 45, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=4; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{9j + 31\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{40, 49, 58, 67, \dots\} \\ \{n_{i,j}\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{11j + 49\}_{j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{60, 71, 82, 93, \dots\} \\ \dots \\ \{n_{i,j}\}_{i=k; j \in \mathbb{N}_{>0}} &= \{2i^2 + 2ij + j - 1\}_{i=k; j \in \mathbb{N}_{>0}} = \{(2i + 1)j + (2i^2 - 1)\}_{i=1, 2, \dots, k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}} \end{aligned}$$

Below are the graphs showing the regularities.



Graph 1.2 - SEQUENCES $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,5; k,i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)i$ OF n THAT MAKE d_n A COMPOSITE NUMBER

Again, the graph was represented in \mathbb{R} . In particular, the sequences $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; i,k \in \mathbb{N}_{>0}}$ can be thought of as a parabolic bundle that have a common point always in $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, they intersect the abscissa axis in the points $\frac{-j \pm \sqrt{j^2 - 2j + 2}}{2}$ and that of the ordinates in $j - 1$; they have vertex in $j - 1$ and axis $i = -\frac{j}{2}$.

Similarly to graph 1, the **regularities** are highlighted both on the single integer values of i present on the abscissa axis, and on the single sequences $\{n_{i,j}\}$, albeit in a less evident way on the latter.

In particular, about sequences $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; i,k \in \mathbb{N}_{>0}}$, the numbers n identifying composite d_n always start from $(3j + 1)$, but they follow one other with a regularity that is no longer constant, as seen previously (+3 units of n for the first sequence, +5 units of n for the second sequence, ...), but follow a recursive law according to which each interval between two numbers n that identify d_n as composite is equal to the length of the previous interval plus 4 units of n .

Of course, the law describing these regularities is as follows: $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$.

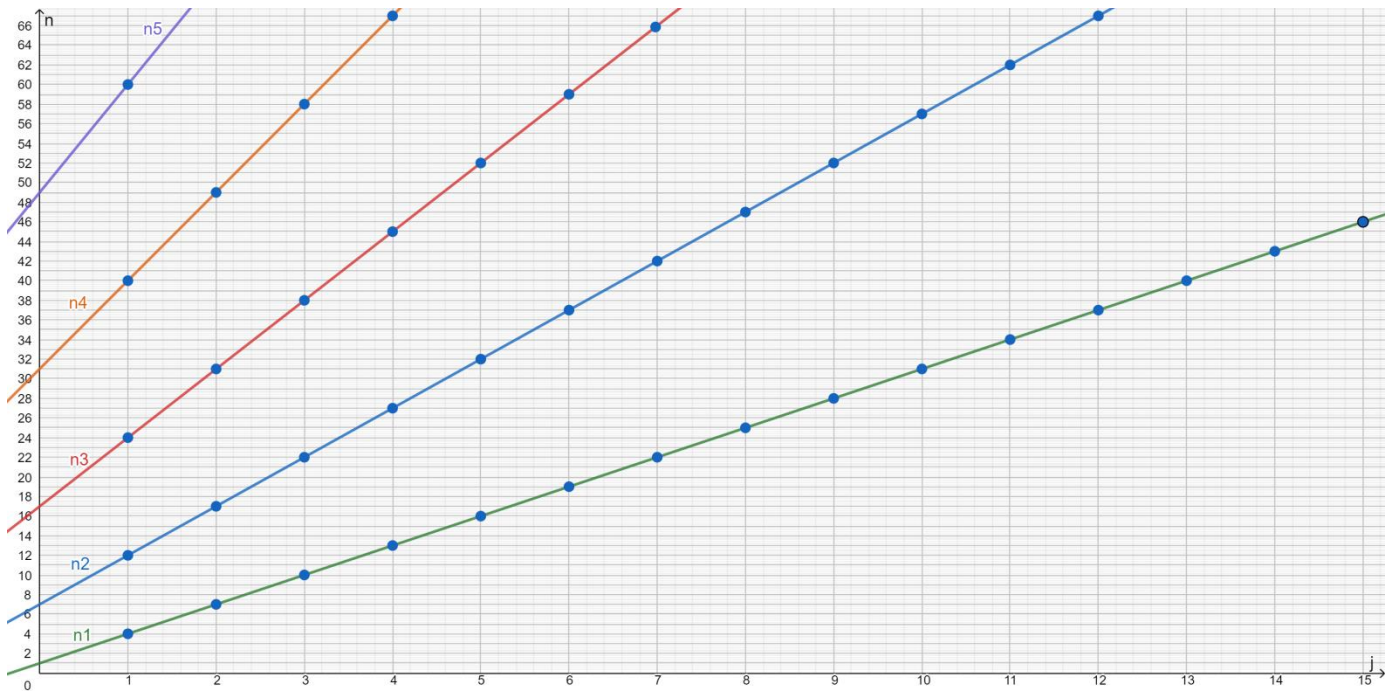
Focusing instead on the integer values of i reported on the abscissa axis, to identify the composite d_n are those values of n which, starting from n equal to a $2i^2 + 2i$, follow each other every $2i + 1$ units of n . The "mother" law is the same, but in this case the sequences are generated by setting $i = 1, 2, \dots, k$, so $\{i_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$.

About integer values of i on the ordinate axis, the numbers n that make d_n a composite number occur every $2i + 1$ units of n , starting from n equal to $2i^2 + 2i$, for all i belonging to $\mathbb{N}_{>0}$.

Using the sequences $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}}$ for the **primality test**, let us consider the usual two examples.

- A. We want to verify the primality of $d_n = 47$, hence $n = 23$. On the basis of the condition $j \leq \frac{n - 2i^2 + 1}{2i + 1}$ posed in the "second formal representation" and under the worst hypothesis ($i = 1$), the number of checks to be made is $j \leq 7,3$. Therefore, also in this case, the check must be made on the first 7 sequences, i.e. those that show as first element a number not higher than 23 or, in other words, those whose inverse image shows, in correspondence with the number 23, a value greater than or equal to 1. Research is therefore also in this case less efficient than canonical research.
- B. Similar conclusions for the number of checks to be carried out on $d_n = 123.456.789$.

However, from graph 2 it is understood that a greater efficiency would be obtained if the primality were to take place on the sequences present on the integer values of i reported on the abscissa axis, rather than on the sequences $\{n_{i,j}\}$ obtained with a variation of $j = 1, \dots, k$. To this end, j is represented on the x-axis (graph 1.3).



Graph 1.3 - SEQUENCES $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,5; j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$ OF n THAT MAKE d_n A COMPOSITE NUMBER

In this case the straight lines that are generated when $i = 1, 2, \dots, k$ have no common point, the angular coefficient takes on a value equal to $2i + 1$ (the same as in graph 1), the intersection with the abscissa and ordinate axis occurs respectively in the points $-\frac{2i^2-1}{2i+1}$ and $2i^2 - 1$. In practice, as i increases, the straight line tends to increase the inclination and at the same time sees its intersection with the abscissa axis move away from the origin.

Of course, the **regularities** are the same as those seen above, but reversed.

In particular, about sequences $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}}$, the values of n identifying composite d_n follow each other every $2i + 1$ units of n , starting from n equal to $2i^2 + 2i$. Of course, the law describing these regularities is as follows: $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$.

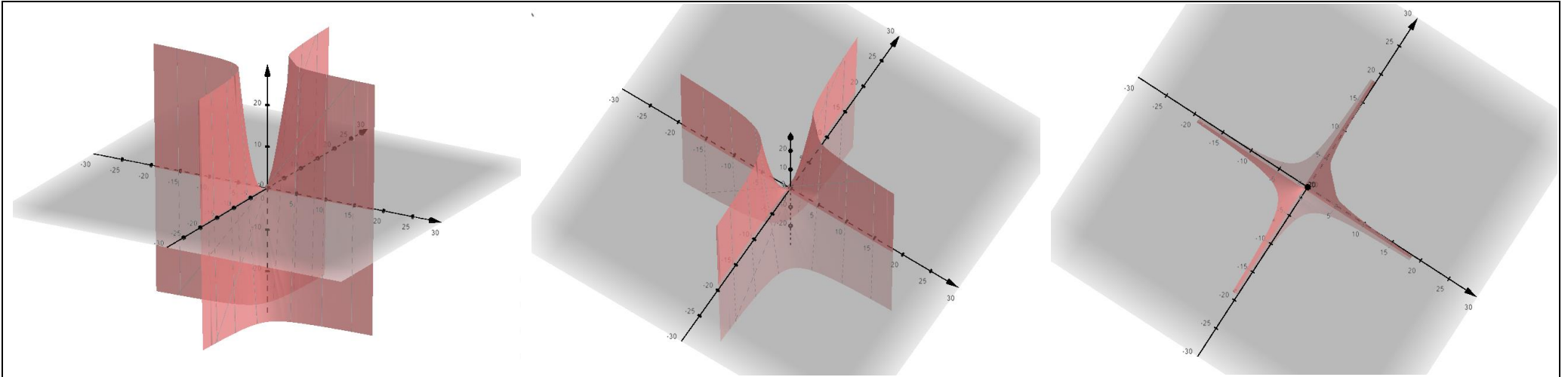
On the other hand, with regard to the integer values of j reported on the abscissa axis (in a completely identical way to the regularities of graph 1.2 on the sequences $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k}$), the values of n that identify composite d_n always start from $(3j + 1)$ and follow each other according to the usual recursive law according to which each interval between two values of n is determined by the length of the previous interval plus 4 units of n : $\{j_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k, i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$.

Taking up the usual examples for **primality test**, and with reference to the sequences $\{n_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k, j \in \mathbb{N}_{>0}}$, we want to verify again the primality of:

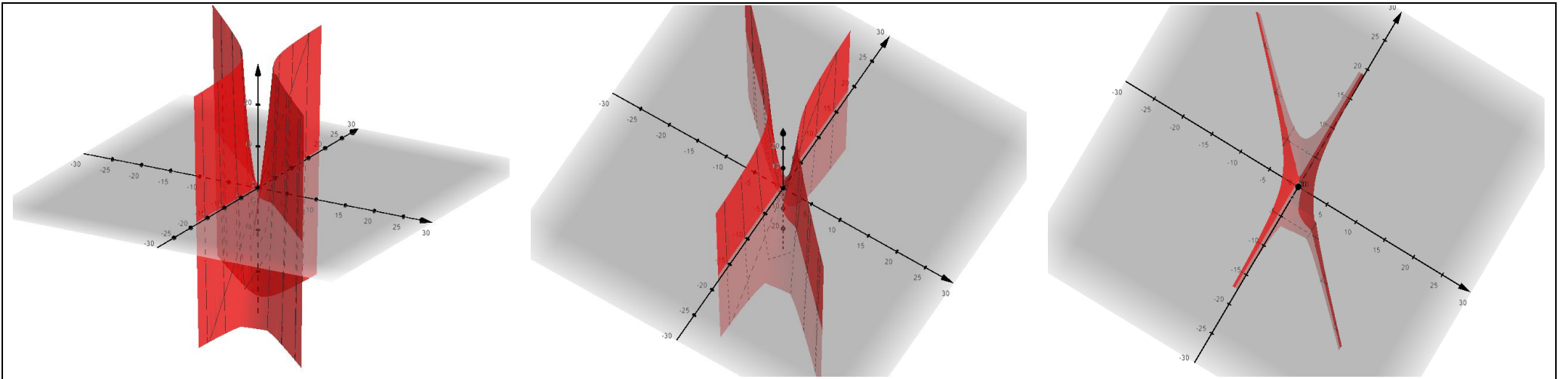
- A. $d_n = 47$, hence $n = 23$. This time, on the basis of the condition $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$ posed in the "second formal representation" and under the worst hypothesis ($j = 1$), we obtain in this case $i \leq 2,9$, so the verification of the primality of the number 47 requires only 2 checks ($i = 1$ and $i = 2$). Of course, n is different from both $n_{1,1}$ and $n_{2,1}$ and $d_n = 47$ is a prime number. In terms of efficiency, the results are completely identical to the canonical method.
- B. $d_n = 123.456.789$, from which $n = 61.728.394$. We obtain a number of controls equal to $i \leq 5.555$, number far lower than the 20.576.131 seen before and completely identical to 5.555 suggested by canonical method.

In conclusion, in addition to the regularities highlighted, what has been described - if repeated indefinitely - would allow to identify the succession of infinite prime numbers. In fact, given a sequence of odd numbers greater than 1 ($d_n = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$), excluding first those values of n identified by the sequence $n_{1,1}$, i.e. 4, 7, 10, 13, ..., then those identified by the sequence $n_{2,1}$, i.e. 12, 17, 22, ..., then those of the sequence $n_{3,1}$ etc., what remains is the infinite sequence of odd numbers d_n prime. It is a kind of **Eratosthenes' sieve, but more efficient**.

Here are some representations in \mathbb{R}^3 of $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ and $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$.



Graph 1.4 $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$



Graph 1.5 $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$

2. The use of the indicator function and the generating function to represent a sequence of prime numbers

The purpose of this second part is to formally describe a sequence of prime numbers. The process is very simple. We take any natural number $n \geq 2$ and divide it by an indicator (or characteristic) function $I_P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ which therefore assumes only two values, zero and one; in particular, zero when n is a composite number and one when n is a prime number. If the number n is divided by zero, it is undefined; if it is divided by 1, it remains equal to itself. It is possible to consider this relationship n/I_P as a generating function of a sequence⁴ and call it elementary generating function, $G_E(n)$.

It follows the theorem 2.1.

THEOREM 2.1 Let $n \in \mathbb{N}$, $I_P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ an indicator function equal to 1 when n is prime, $G_E(n) = \frac{n}{I_P}$ an elementary generating function, then for all $n \in \mathbb{N}$, $G_E(n)$ defines the sequence of prime numbers

Using the above mentioned primality definitions, the following definitions of a sequence of prime numbers greater than 2 can be obtained. In particular:

DEFINITION 2.1 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$
 Let: $d_n = 2n + 1$ (The infinite sequence of odd numbers greater than 1)
 Let: $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ with $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (The infinite sequences of infinite composite odd number)
 Let: $a_{i,j} \leq d_n$ (Or in an equivalent way: $2ij + i + j \leq n$; $i \leq \frac{n-j}{2j+1}$; $j \leq \frac{n-i}{2i+1}$)
 Let: $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \quad \forall i, j, n \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \forall d_n$ (The indicator function equal to 1 when d_n is a prime number)
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined}, & \text{if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$, defines the sequence of prime numbers greater than 2.

DEFINITION 2.2 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $i, j, n \in \mathbb{N}_{>0}$
 Let: $d_n = 2n + 1$ (The infinite sequence of odd numbers greater than 1)
 Let: $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ with $a_{i,j} : \mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ (The infinite sequences of infinite composite odd number)
 Let: $a_{i,j} \leq d_n$ (Or in an equivalent way: $2i^2 + 2ij + j - 1 \leq n$; $i \leq \frac{-j + \sqrt{j^2 - 2j + 2 + 2n}}{2}$; $j \leq \frac{n + 1 - 2i^2}{2i + 1}$)
 Let: $I_P(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists a_{i,j} | a_{i,j} = d_n \quad \forall i, j, n \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \forall d_n$ (The indicator function equal to 1 when d_n is a prime number)
 $G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined}, & \text{if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$, defines the sequence of prime numbers greater than 2.

However, it is possible to define I_P also by using the simple prime number definition, which allows to represent a sequence of prime numbers in at least 3 different ways. In particular:

1) I_P is defined by simply giving the literal definition of prime number (number greater than 1 divisible only by 1 and by itself), hence the following representation:

DEFINITION 2.3 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF PRIME NUMBERS

Let: $n, l \in \mathbb{N}$ with $n \geq 2$ e $2 \leq l \leq n - 1$
 Let: $I_P(n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists l | \frac{n}{l} \in \mathbb{N}, \quad \forall n, l \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \forall n$, (The indicator function equal to 1 when n is a prime number)
 $G_E(n) = \frac{n}{I_P(n)} = \begin{cases} \text{Undefined}, & \text{if } I_P(n) = 0 \\ n, & \text{if } I_P(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n$, defines the sequence of prime numbers.

⁴ Sure, I could have defined $G_E(n) = n * I_P(n)$ and get a sequence consisting of prime numbers and zeros, but personally I prefer "undefined", "does not exist" or "has no meaning" to zero.

2) I_p is defined continuing to use the definition of prime number, but from another point of view, that of multiplication, hence the following representation:

DEFINITION 2.4 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF PRIME NUMBERS

Let: $n, l, m \in \mathbb{N}$ with $n \geq 2, 2 \leq l \leq n - 1, 2 \leq m \leq n - 1$
 Let: $I_p(n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists l, m \mid l * m = n, \forall n, l, m \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \forall n$ (The indicator function equal to 1 when n is a prime number)
 $G_E(n) = \frac{n}{I_p(n)} = \begin{cases} \text{Undefined}, & \text{if } I_p(n) = 0 \\ n, & \text{if } I_p(n) = 1 \end{cases} \forall n$, defines the sequence of prime numbers.

3) I_p is defined indirectly using the definition of prime number and in particular by using the Module operator which returns the remainder of a division; we therefore obtain the following representation:

DEFINITION 2.5 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF PRIME NUMBERS

Let: $n, l \in \mathbb{N}$ with $n \geq 2$ e $2 \leq l \leq n - 1$
 Let: $I_p(n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists l \mid n \bmod l = 0, \forall n, l \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \forall n$, (The indicator function equal to 1 when n is a prime number)
 $G_E(n) = \frac{n}{I_p(n)} = \begin{cases} \text{Undefined}, & \text{if } I_p(n) = 0 \\ n, & \text{if } I_p(n) = 1 \end{cases} \forall n$, defines the sequence of prime numbers.

Obviously, excluding the number 2, the search for prime numbers can be restricted to odd numbers only, verifying that they are divisible only by those odd numbers, if any, between 3 (inclusive) and the integer part of the square root of the odd number itself. A more efficient version of the one in point 1 follows. In particular:

DEFINITION 2.6 - REPRESENTATION OF A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $n, l \in \mathbb{N}_{>0}; d_n = 2n + 1; d_l = 2l + 1$ with $3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})$
 Let: $I_p(d_n) = \begin{cases} 0, & \text{If } \exists d_l \mid \frac{d_n}{d_l} \in \mathbb{N}, \forall n, l \\ 1, & \text{Otherwise} \end{cases} \forall d_n$ (The indicator function equal to 1 when d_n is a prime number)
 $G_E(n) = \frac{d_n}{I_p(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined}, & \text{if } I_p(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_p(d_n) = 1 \end{cases} \forall n$, defines the sequence of prime numbers greater than 2.

Of course, the condition $3 \leq d_l \leq \text{int}(\sqrt{d_n})$, in addition to significantly reducing the search, excludes the d_l existence when d_n is equal to 3, 5 or 7 and the non-existence of d_l makes them prime numbers, according to the indicator function $I_p(d_n)$. Moreover, the last representation can be further improved in terms of efficiency, by circumscribing the sequence d_l to the set of prime numbers, but losing the simplicity and compactness of the representation.

3. Generalization of the formulas found and Riemann hypothesis

The formulas seen above, $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ and $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$, have been obtained in such a way that they could describe the infinite sequences of infinite odd numbers composed for all $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$. In practice, they are applications $\mathbb{N}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ that do their job (generate sequences of composite odd numbers) if they operate in $\mathbb{N}_{>0}^2$ or in $\mathbb{Z}_{<-1}^2$, as shown in table 3.1 proposed again.

Table 3.1 - INFINITE SEQUENCES $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$ OF INFINITE ODD NUMBERS

i\j	...	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	...	-441	-399	-357	-315	-273	-231	-189	-147	-105	-63	-21	0	21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	...
9	...	-399	-361	-323	-285	-247	-209	-171	-133	-95	-57	-19	0	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	...
8	...	-357	-323	-289	-255	-221	-187	-153	-119	-85	-51	-17	0	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	...
7	...	-315	-285	-255	-225	-195	-165	-135	-105	-75	-45	-15	0	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	...
6	...	-273	-247	-221	-195	-169	-143	-117	-91	-65	-39	-13	0	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	...
5	...	-231	-209	-187	-165	-143	-121	-99	-77	-55	-33	-11	0	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	...
4	...	-189	-171	-153	-135	-117	-99	-81	-63	-45	-27	-9	0	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	...
3	...	-147	-133	-119	-105	-91	-77	-63	-49	-35	-21	-7	0	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	...
2	...	-105	-95	-85	-75	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	...
1	...	-63	-57	-51	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	0	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-21	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	0	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63	...
-3	...	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	0	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	-85	-95	-105	...
-4	...	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	0	-7	-21	-35	-49	-63	-77	-91	-105	-119	-133	-147	...
-5	...	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	0	-9	-27	-45	-63	-81	-99	-117	-135	-153	-171	-189	...
-6	...	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	0	-11	-33	-55	-77	-99	-121	-143	-165	-187	-209	-231	...
-7	...	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	0	-13	-39	-65	-91	-117	-143	-169	-195	-221	-247	-273	...
-8	...	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	0	-15	-45	-75	-105	-135	-165	-195	-225	-255	-285	-315	...
-9	...	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	0	-17	-51	-85	-119	-153	-187	-221	-255	-289	-323	-357	...
-10	...	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	0	-19	-57	-95	-133	-171	-209	-247	-285	-323	-361	-399	...
-11	...	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	21	0	-21	-63	-105	-147	-189	-231	-273	-315	-357	-399	-441	...
...

However, it is possible to circumscribe $a_{i,j}$ also in areas other than $\mathbb{N}_{>0}^2$, such as simply \mathbb{N}^2 , or $\mathbb{N}_{>1}^2$, but also starting from integers negative, such as $\mathbb{Z}_{>-3}^2$ and, if we also want to determine the infinite sequences of infinite even numbers, extend the $a_{i,j}$ domain to \mathbb{Q}^2 , in particular to the odd numbers divided by 2.

Operating on sets other than $\mathbb{N}_{>0}^2$, different formulas are obtained from those listed above, but it is still possible to define **general formulas** that depend on the set chosen, and in particular on its first value.

Taking as reference the least efficient formula, $a_{i,j} = 4ij + 2i + 2j + 1$, substituting for convenience x in place of i and y in place of j , and with the aim of using an application defined in $\mathbb{Z}_{>k}^2$ for all $k \in \mathbb{Z}$, we obtain the following formulas, from which the "almost general" one in the last row of Table 3.2.

Table 3.2 - FORMULAS ASSOCIATED TO $a_{x,y}$ AND SOLUTIONS OF $a_{x,y} = 0$ WHEN DOMAIN VARIES

Domain	Formula	$a_{x,y} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 14x + 14y + 49$	$x = -\frac{7}{2}; y = -\frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 10x + 10y + 25$	$x = -\frac{5}{2}; y = -\frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$a_{x,y} = 4xy + 6x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; y = -\frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$a_{x,y} = 4xy + 2x + 2y + 1$	$x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 2x - 2y + 1$	$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 6x - 6y + 9$	$x = \frac{3}{2}; y = \frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 10x - 10y + 25$	$x = \frac{5}{2}; y = \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>4}^2)$	$a_{x,y} = 4xy - 14x - 14y + 49$	$x = \frac{7}{2}; y = \frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1-k}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 2(2k - 1)x + 2(2k - 1)y + (2k - 1)^2$	$x = -\frac{2k - 1}{2}; y = -\frac{2k - 1}{2}$

The specific formulas described above can be obtained by the definition of arithmetic sequence, or by adding or subtracting units to the variables x and y in the formula from which we started $a_{x,y} = 4xy + 2x + 2y + 1$. Eg, $a_{x,y} = 4(x - 1)(y - 1) + 2(x - 1) + 2(y - 1) + 1 = \dots = 4xy + 6x + 6y + 9$.

The "almost general" formula was obtained from the assumption that we are using hyperbole. In fact, given the general equation of a conic: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, in our formulas $b^2 - ac$ is greater than zero.

The reference formula is therefore the following: $a_{x,y} = 2bxy + 2dx + 2ey + f$, whose parameters are given by $b = 2$, $d = e$, $f = d * e$. Furthermore, the parameters d and e belong to the set of odd numbers described by $2k - 1$ with $k \in \mathbb{Z}$; while the relation that binds k with the defining set \mathbb{Z}^2 is the following: $\mathbb{Z}_{>1-k}^2$.

Compared to table 1.1, the results obtained show how the parameter f assumes the values shown on the secondary diagonal and the parameters d and e are those in correspondence with the row $i = 0$ and $j = 0$.

Finally, the values for which $a_{x,y} = 0$ and the k -dependent formulas that generate these values were reported.

However, to improve the applicability of the "almost general" formula, in it we substitute $1 - k$ for k , hence the following **first general formula** that describes the infinite sequences of infinite composite positive odd numbers, either with x and y belonging to the same domain ($\mathbb{Z}_{>k}^2$), or to different domains ($x \in \mathbb{Z}_{>k}$; $y \in \mathbb{Z}_{>l}$).

Domain	First general formula	$a_{x,y} = 0$	
$\mathbb{Z}_{>k}^2$	$a_{x,y} = 4xy + 2(1 - 2k)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)^2$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}$; $y = -\frac{1 - 2k}{2}$	(3.1)
$x \in \mathbb{Z}_{>k}$ $y \in \mathbb{Z}_{>l}$	$a_{x,y} = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}$; $y = -\frac{1 - 2l}{2}$	(3.2)

It is therefore possible to enunciate the following theorem 3.1 which generalizes theorem 1.1 seen above.

THEOREM 3.1 Fixed $k, l \in \mathbb{Z}$. For all $x \in \mathbb{Z}_{>k}$ and $y \in \mathbb{Z}_{>l}$, the formula $a_{x,y}(k, l) = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)$ with $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ describes the infinite sequences formed by infinite composite odd numbers.

In a similar way, but with some more difficulty, it is possible to obtain a formula that generalizes the most efficient one seen above: $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$.

The infinite sequences of infinite odd numbers that $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + 2j - 1$ describes (Table 3.3) are again proposed, but this time in a more extended way in order to better grasp the affinities with the specific formulae listed below.

Table 3.3 - INFINITE SEQUENCES $a_{i,j} = 4i^2 + 4ij + (2j - 1)$ OF INFINITE ODD NUMBERS

i\j	...	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
...
10	...	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	483	525	567	609	651	693	735	777	819	...
9	...	19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	437	475	513	551	589	627	665	703	...
8	...	-17	17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	391	425	459	493	527	561	595	...
7	...	-45	-15	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345	375	405	435	465	495	...
6	...	-65	-39	-13	13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	299	325	351	377	403	...
5	...	-77	-55	-33	-11	11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	253	275	297	319	...
4	...	-81	-63	-45	-27	-9	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243	...
3	...	-77	-63	-49	-35	-21	-7	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	...
2	...	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
1	...	-45	-39	-33	-27	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	...
0	...	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...
-0,5	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	...
-2	...	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	...
-3	...	115	105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	-5	-15	-25	-35	-45	-55	-65	...
-4	...	175	161	147	133	119	105	91	77	63	49	35	21	7	-7	-21	-35	-49	-63	-77	...
-5	...	243	225	207	189	171	153	135	117	99	81	63	45	27	9	-9	-27	-45	-63	-81	...
-6	...	319	297	275	253	231	209	187	165	143	121	99	77	55	33	11	-11	-33	-55	-77	...
-7	...	403	377	351	325	299	273	247	221	195	169	143	117	91	65	39	13	-13	-39	-65	...
-8	...	495	465	435	405	375	345	315	285	255	225	195	165	135	105	75	45	15	-15	-45	...
-9	...	595	561	527	493	459	425	391	357	323	289	255	221	187	153	119	85	51	17	-17	...
-10	...	703	665	627	589	551	513	475	437	399	361	323	285	247	209	171	133	95	57	19	...
-11	...	819	777	735	693	651	609	567	525	483	441	399	357	315	273	231	189	147	105	63	...
...

Also in this case, the different specific formulas were obtained by adding or subtracting units to the variables x and y in the formula from which we started ($a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$).

The "almost general" formula was instead obtained always starting from the assumption that we are dealing with hyperbolae, but in this case of equation $a_{x,y} = ax^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f$, whose parameters are given by $a = 4$, $b = 2$, $d = 3(e - 1)$, $f = d * e - e^2$. Furthermore, the parameters d and e belong to the set of odd numbers described respectively by $12 - 6k$ and $5 - 2k$ with $k \in \mathbb{Z}$, from which $f = \dots = 8k^2 - 34k + 35$; while the relation that links k with the domain \mathbb{Z}^2 is the following: $\mathbb{Z}_{>k-2}^2$.

Table 3.4 - FORMULAS ASSOCIATED TO $a_{x,y}$ AND SOLUTIONS OF $a_{x,y} = 0$ WHEN DOMAIN VARIES

Domain	Formula	$a_{x,y} = 0$
$\mathbb{Z}_{>-3}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(18)x + 2(7)y + 77$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 36x + 14y + 77$	$x = -\frac{7}{2}; (x + y) = -\frac{11}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-2}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(12)x + 2(5)y + 35$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 24x + 10y + 35$	$x = -\frac{5}{2}; (x + y) = -\frac{7}{2}$
$\mathbb{Z}_{>-1}^2 (\mathbb{N}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(6)x + 2(3)y + 9$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 12x + 6y + 9$	$x = -\frac{3}{2}; (x + y) = -\frac{3}{2}$
$\mathbb{Z}_{>0}^2 (\mathbb{N}_{>0}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(0)x + 2(1)y - 1$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2y - 1$	$x = -\frac{1}{2}; (x + y) = +\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}_{>1}^2 (\mathbb{N}_{>1}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-6)x + 2(-1)y + 5$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 12x - 2y + 5$	$x = \frac{1}{2}; (x + y) = \frac{5}{2}$
$\mathbb{Z}_{>2}^2 (\mathbb{N}_{>2}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-12)x + 2(-3)y + 27$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 24x - 6y + 27$	$x = \frac{3}{2}; (x + y) = \frac{9}{2}$
$\mathbb{Z}_{>3}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-18)x + 2(-5)y + 65$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 36x - 10y + 65$	$x = \frac{5}{2}; (x + y) = \frac{13}{2}$
$\mathbb{Z}_{>4}^2 (\mathbb{N}_{>3}^2)$	$a_{x,y} = 4x^2 + 2(2)xy + 2(-24)x + 2(-7)y + 119$ $a_{x,y} = 4x^2 + 4xy - 48x - 14y + 119$	$x = \frac{7}{2}; (x + y) = \frac{17}{2}$
$\mathbb{Z}_{>k-2}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2(12 - 6k)x + 2(5 - 2k)y + (8k^2 - 34k + 35)$	$x = -\frac{5 - 2k}{2}; (x + y) = \frac{4k - 7}{2}$

By comparing table 1.3 (extended) with the results obtained, it is confirmed that the parameter f assumes the values shown on the secondary diagonal and the parameter e is the one corresponding to row $i = 0$ and column $j = 0$.

Also in this case, the values for which $a_{x,y} = 0$ and the formulas in function of k that generate said values have been reported. In this regard, it can be noted that the relation $a_{x,y} = 0$ is verified for the same constant $(-3/2)$ only when the domain of $a_{x,y}$ is \mathbb{N}^2 .

Similarly to what was done previously, to improve the applicability of the formula found, substitute $k + 2$ for k in d and e ; finally, f is obtained on the basis of the relation $f = d * e - e^2$ seen previously. Then follows the **second general formula** that describes the infinite sequences of infinite composite positive odd numbers (more efficient formula), either with x and y belonging to the same domain ($\mathbb{Z}_{>k}^2$), or to different domains ($x \in \mathbb{Z}_{>k}; y \in \mathbb{Z}_{>l}$).

Domain	Second general formula (more efficient))	$a_{x,y} = 0$
$\mathbb{Z}_{>k}^2$	$a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2(-6k)x + 2(1 - 2k)y + (8k^2 - 2k - 1)$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}; (x + y) = \frac{4k + 1}{2}$ (3.3)
$x \in \mathbb{Z}_{>k}$ $y \in \mathbb{Z}_{>l}$	$a_{x,y} = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)$	$x = -\frac{1 - 2k}{2}; (x + y) = \frac{2k + 2l + 1}{2}$ (3.4)

It is therefore possible to enunciate the following theorem 3.2 which generalizes theorem 1.2 seen above.

THEOREM 3.2 Fixed $k, l \in \mathbb{Z}$. For all $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$, the formula $a_{x,y}(k, l) = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)$ with $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$ describes the infinite sequences formed by infinite composite odd numbers.

The new formulas found (theorem 3.1 and 3.2) allow to generalize the definitions given previously of primality and sequence of odd prime numbers (in this case in a single definition) and of a set of odd prime numbers.

DEFINITION 3.1 - REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER AND A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $d_n = 2n + 1$ with $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)

Fixed $k, l \in \mathbb{Z}$

Let: $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$

Let: $a_{x,y}(k, l) = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)$, $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$

(The infinite sequences of infinite composite odd numbers)

Let: $a_{x,y}(k, l) \leq d_n$ (Or in an equivalent way:

$$2xy + (1 - 2l)x + (1 - 2k)y + (2kl - k - l) \leq n; x \leq \frac{n+(2k-1)y+(k+l-2kl)}{2y+(1-2l)}; y \leq \frac{n+(2l-1)x+(k+l-2kl)}{2x+(1-2k)}$$

$$d_n \text{ is prime} \Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n$$

(but also: n identifies a d_n prime $\Leftrightarrow \nexists 2xy + (1 - 2l)x + (1 - 2k)y + (2kl - k - l) = n \forall x, y, n$)

Or

$$d_n \text{ is composite} \Leftrightarrow \exists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n; \text{ else } d_n \text{ is prime}$$

(but also: n identifies a d_n composite $\Leftrightarrow \exists 2xy + (1 - 2l)x + (1 - 2k)y + (2kl - k - l) = n \forall x, y, n$;
else n identifies a d_n prime)

Let: $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{if } d_n \text{ is prime} \\ 0, & \text{if } d_n \text{ is composite} \end{cases} \quad \forall d_n$ (The indicator function equal to 1 when d_n is a prime number)

$G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined, if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$, defines the sequence of prime numbers greater than 2.

DEFINITION 3.2 - REPRESENTATION OF AN ODD PRIME NUMBER AND A SEQUENCE OF ODD PRIME NUMBERS

Let: $d_n = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (The sequence of infinite odd numbers greater than 1)

Fixed $k, l \in \mathbb{Z}$

Let: $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$

Let: $a_{x,y}(k, l) = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)$, $a_{x,y}(k, l) : \mathbb{Z}_{x>k; y>l}^2 \rightarrow \mathbb{N}_{>8}$

(The infinite sequences of infinite composite odd numbers)

Let: $a_{x,y}(k) \leq d_n$ (Or in an equivalent way: $2x^2 + 2xy + (-4k - 2l)x + (1 - 2k)y + (2k^2 + 2kl - l - 1) \leq n$;

$$\frac{2k+l-y-\sqrt{y^2-(2l+2)y+l^2+2l+2+2n}}{2} \leq x \leq \frac{2k+l-y+\sqrt{y^2-(2l+2)y+l^2+2l+2+2n}}{2}; y \leq \frac{n-2x^2+(4k+2l)x-2k^2-2kl+l+1}{2x+1-2k}$$

$$d_n \text{ is prime} \Leftrightarrow \nexists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n$$

(but also: n identifies a d_n prime $\Leftrightarrow \nexists 2x^2 + 2xy + (-4k - 2l)x + (1 - 2k)y + (2k^2 + 2kl - l - 1) = n \forall x, y, n$)

Or

$$d_n \text{ is composite} \Leftrightarrow \exists a_{x,y}(k, l) = d_n \forall x, y, n; \text{ else } d_n \text{ is prime}$$

(but also: n identifies a d_n composite $\Leftrightarrow \exists 2x^2 + 2xy + (-4k - 2l)x + (1 - 2k)y + (2k^2 + 2kl - l - 1) = n \forall x, y, n$;
else n identifies a d_n prime)

Let: $I_P(d_n) = \begin{cases} 1, & \text{if } d_n \text{ is prime} \\ 0, & \text{if } d_n \text{ is composite} \end{cases} \quad \forall d_n$ (The indicator function equal to 1 when d_n is a prime number)

$G_E(d_n) = \frac{d_n}{I_P(d_n)} = \begin{cases} \text{Undefined, if } I_P(d_n) = 0 \\ d_n, & \text{if } I_P(d_n) = 1 \end{cases} \quad \forall d_n$, defines the sequence of prime numbers greater than 2.

DEFINITION 3.3 - REPRESENTATION OF A SET OF ODD PRIME NUMBERS

Fixed $k, l \in \mathbb{Z}$

Let: $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Let: $x \in \mathbb{Z}_{>k}, y \in \mathbb{Z}_{>l}$

Let: $A = \{z \in \mathbb{N}_{>2} \mid z = 2n + 1\}$

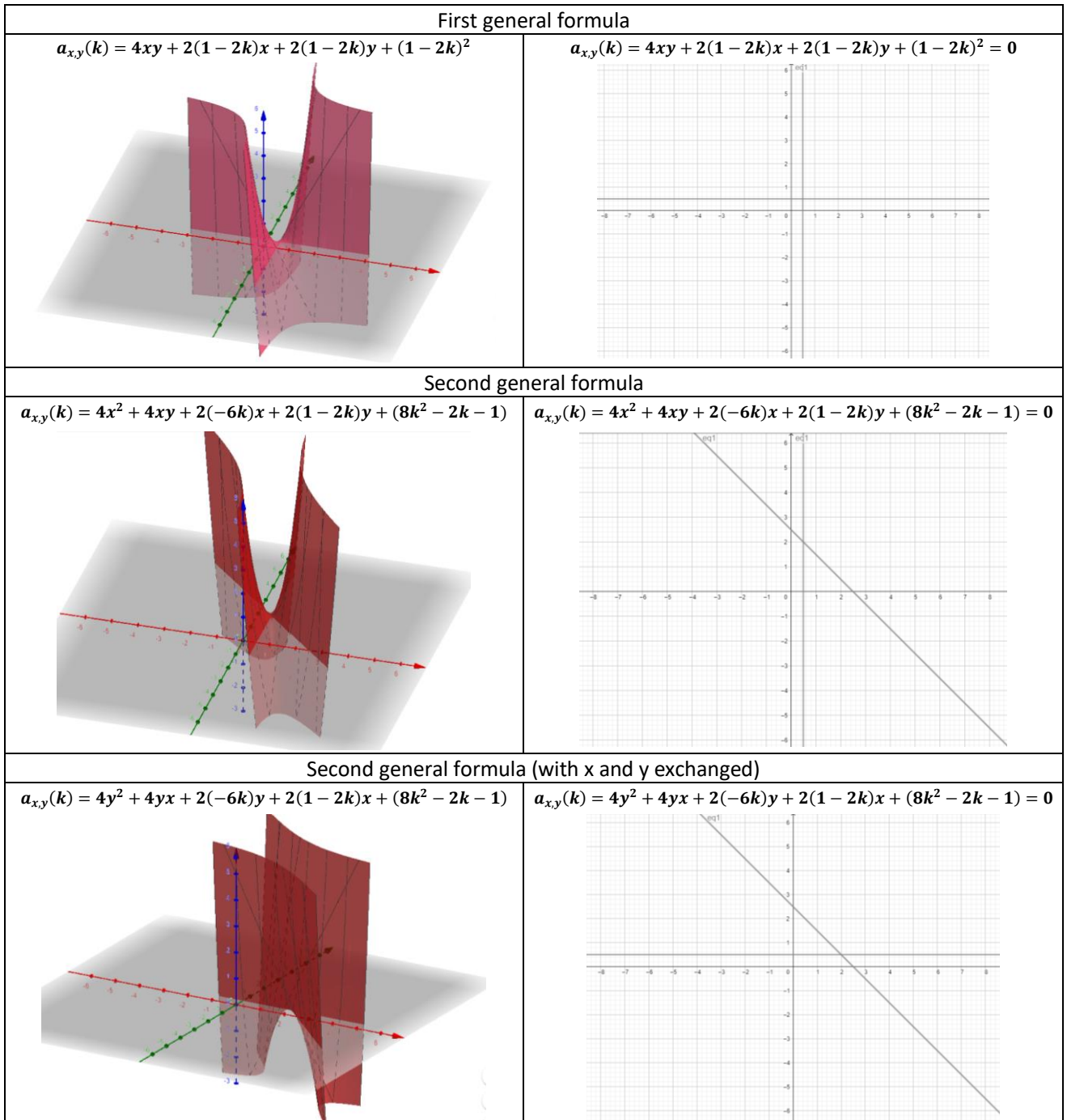
Let: $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4xy + 2(1 - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (1 - 2k)(1 - 2l)\}$

or

Let: $B = \{z \in \mathbb{N}_{>8} \mid z = 4x^2 + 4xy + 2(-4k - 2l)x + 2(1 - 2k)y + (4k^2 + 4kl - 2l - 1)\}$

The set $A - B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$ defines the set of infinite odd prime numbers.

Returning to the results obtained, and in particular those with domain $\mathbb{Z}_{>1}^2$, first of all we highlight some coincidences with the Riemann conjecture. The zeta function was in fact studied by Riemann in the context of complex numbers with real part greater than 1 and is based on the assumption that non-trivial zeros are distributed around the real line $x = \frac{1}{2}$, the same that verifies $a_{x,y}(k, l) = 0$ when $k = l = 1$, i.e. when x and y are greater than 1, both in the first and in the second general formula⁵. Of course we are talking about different things but in some ways complementary, since the zeta function is constructed in such a way as to be formed only by prime numbers and $a_{x,y}(k, l)$ which, for $x > k$ and $y > l$, certainly generates non-prime numbers⁶. Below are the graphs in \mathbb{R}^3 of $a_{x,y}(k, l)$ with $k = l = 1$ and those obtained by solving $a_{x,y}(k = l = 1) = 0$.



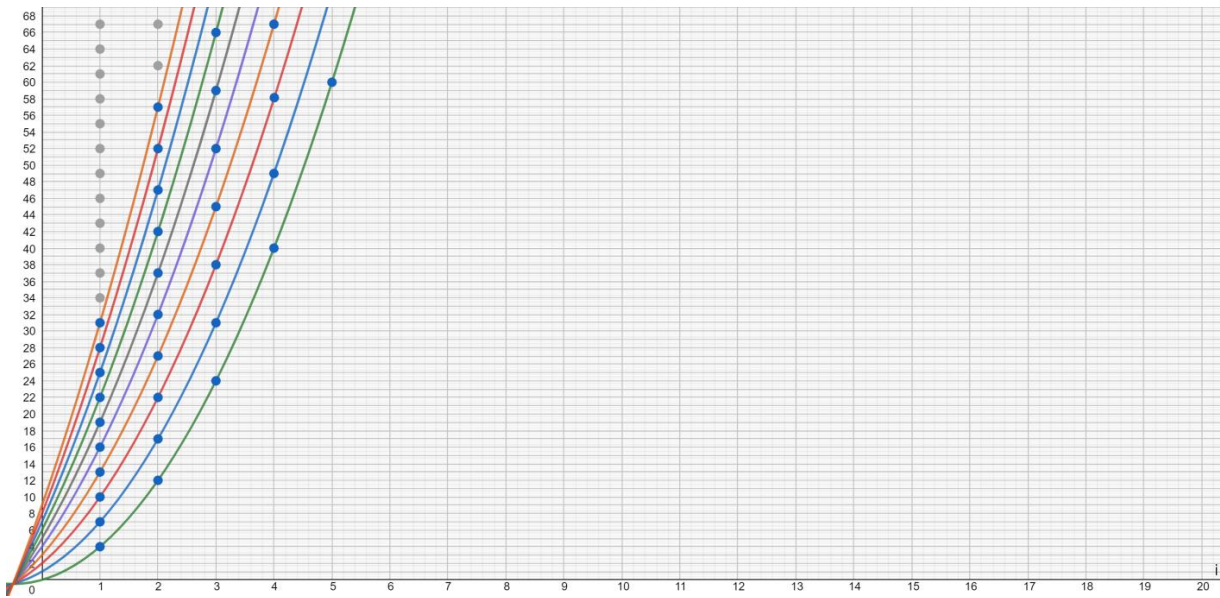
Graph 3.1 - FIRST AND SECOND GENERAL FORMULA WITH $k = l = 1$

⁵ In reality the second formula is also verified for $x + y = \frac{5}{2}$.

⁶ It should be remembered that, fixed k , also for certain values of $x, y \leq k$, $a_{x,y}(k)$ identifies sequences of not-prime numbers, as well as that sequence consisting of all odd numbers and therefore also primes.

Regardless of any coincidences, perhaps the most interesting part of this paper is the identification of regularities on the composite numbers with two specific formulas. In fact, if my interpretation of the Riemann conjecture is correct, that is - in addition to allowing an exact calculation of $\pi(N)$ - it, through the hypothesis of non-trivial zeros, reveals a non-chaotic but harmonic nature of prime numbers, then I like to think that what is described in this paper can help to demonstrate its truthfulness. The truthfulness of the Riemann hypothesis, ie that prime numbers follow regularities, finds comfort in the regularities of the composite numbers described in the first part of this paper with graphs 1.1, 1.2, 1.3 and the formulas associated with them.

Purely by way of example, graph 1.2 (now graph 3.2) is proposed in a more extended form from which the regularities characterizing the sequences obtained on the integer values reported on the abscissa axis i are particularly evident, where, it is remembered, the composite d_n are identified by those values of n which, starting from n equal to $2i^2 + 2i$, follow each other every $2i + 1$ units of n . The law is as follows: $\{i_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,k; k,j \in \mathbb{N}_{>0}} = (2i + 1)j + (2i^2 - 1)$.



Graph 3.2 – SEQUENCE $\{n_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k; k,i \in \mathbb{N}_{>0}} = 2i^2 + 2ji + (j - 1)$

Therefore, **having ascertained the regularities that characterize the composite numbers and given the complementarity of the latter with the set of prime numbers, then even primes follow each other with regularity**, albeit as a consequence of the regularities that characterize composite numbers.

I like to close this paper with more purely philosophical considerations that seem to deny what is highlighted above only in appearance.

Despite the findings, in fact, I continue to think that prime numbers represent chaos and to embrace the theory according to which order is generated from chaos and how these live together in equilibrium.

In my humble opinion, in fact, even the chaos of prime numbers coexists in balance with the order of composite numbers that generated: without the disorder of prime numbers, I don't think the order of composite numbers can exist and in general the order that characterizes arithmetic, and perhaps all mathematics, with its rules and all that mathematics itself can represent, including the chaos of prime numbers that was wanted, I hope worthily, to represent in this paper.

Finding a relation that can describe all prime numbers would be, in my humble opinion, finding the formula from which mathematics was generated, a contradiction; personally I see as the most suitable candidate the simple number 1, or rather the unit, from which the chaos of prime numbers has perhaps been generated, from which in turn arose the order of composite numbers and of all mathematics. A sort of big bang.

In conclusion, I believe that the Riemann hypothesis is true, but at the same time it is also false, since the highlighted order is only a consequence of the order generated with the composite numbers. Also, looking at graph 3.2 - besides deducing the loneliness that characterises the particularly large prime numbers and the way in which they move further and further away from each other (a bit like galaxies) - I would be tempted to argue, if it had not already been amply demonstrated the contrary, that the prime numbers are not infinite. Evidently, there is always a n to which no ball is associated (Graph 3.2).

References

1. *I numeri primi – Un lungo cammino verso l'infinito*. Mondo matematico, 2018. RBA Italia S.r.l.