Доказательство гипотезы ABC

Султан К.С.

Абстракт: В статье приводиться доказательство гипотезы ABC, полученное использованием обобщенной теорем Эйлера и Ферма, а также модулярной арифметики.

Ключевые слова: гипотеза ABC, теорема Эйлера, теорема Ферма, модулярная арифметика.

1 ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза abc, решение которой составляет одну из главных проблем теории чисел, была сформулирована независимо друг от друга математиками Дэвидом Массером в 1985 году и Джозефом Эстерле в 1988 году [1].

Гипотеза abc имеет несколько вариантов формулировок, один из них приводиться ниже:

Для любых взаимно простых троек чисел (a, b, c) *таких, что* $a + b = c$, *при любом* $\varepsilon > 0$ *существует лишь конечное число троек* (a, b, c) *соответствующих условию* $c > rad(abc)^{1+\varepsilon}$, *где* $rad(abc)$*- радикал, т.е. произведение всех простых делителей* a, b, c.

Обычно $c < rad(abc)$, но в редких случаях, получается наоборот - $c > rad(abc)$. Так вот, гипотеза abc посвящена случаю $c > rad(abc)$.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММЫ ЧИСЕЛ НА ОСНОВЕ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Поскольку случай $c > rad(abc)$ могут образоваться в степенных числах сначала рассмотрим диофантово уравнение $a^x + b^y = c^z$ с точки зрения модульной арифметики.

Любое уравнение вида $A + B = C$ можно представить в виде

(2.1) $A + (A \cdot t_b + r) = (A \cdot t_c + r)$, или $(B \cdot t_a + r) + B = (B \cdot t_c + r)$,

где t_b, t_c, t_a– множители, или целая часть числа, полученного в результате деления соответственно B на A, и C на A, а также A на B, и C на B.

Если числа A, B и C являются натуральной степенью натурального числа, т.е. $A = a^x$, $B = b^y$ и $C = c^z$, и $a^x + b^y = c^z$, то используя уравнение (2.1) равенство $a^x + b^y = c^z$ можно представит в виде

(2.2) $a^x + (a^x \cdot t_b + r) = (a^x \cdot t_c + r)$, или $(b^y \cdot t_a + r) + b^y = (b^y \cdot t_c + r)$,

(2.3) $a^x(1 + t_b) + r = a^x \cdot t_c + r, t_c = 1 + t_b$.

где t_b, t_c, t_a– множители, или целая часть числа полученного в результате деления соответственно b^y на a^x и c^z на a^x, а также a^x на b^y и c^z на b^y.

Из вышесказанного следует, что любое диофантово уравнение вида $a^x + b^y = c^z$ с разными показателями степени можно представить в виде другого диофантово уравнения вида (2.2), где показатели степени равны.

3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ

Согласно обобщенной теорем Эйлера и Ферма, решение любого диофантово уравнения вида $p^x + b^y = c^z$, если оно имеется, то оно находится в матрице остатков по модулю p^x размером $(p^x - 1)$ x $(p^x - p^{(x-1)})$, где p – простое число.

Если основания слагаемых являются составным числом, то решение диофантово уравнения вида $a^x + b^y = c^z$ находится в матрице остатков по модулю $a^x = m$ размером $(m - 1)$ x $\varphi(m)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера [2].

Из вышесказанного следует, что для любых взаимно простых троек чисел (a, b, c) таких, что $a + b = c$, при любом $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число троек (a, b, c) соответствующих условию $c > rad(abc)^{1+\varepsilon}$, так как ABC-тройки высокого качества, являющейся решением уравнения вида $a^x + b^y = c^z$, будет находится внутри первой матрицы размером $(m - 1)$ x $\varphi(m)$, т.е. их количество будет непременно конечным. А ABC-тройки низкого качества, которые является кратными решениями уравнения вида $a^x + b^y = c^z$, будут находиться в бесконечно повторяющихся матрицах, которые являются копиями первой матрицы.

Ссылки

1. abc-гипотеза. https://ru.wikipedia.org/wiki/abc-гипотеза.
2. Generalization of the Fermat's and Euler's Theorems/ vixra/abs /2101.0174v3.