

# 맥스웰 중력을 이용한 일반상대론의 환상 반박

## Refutation of the Illusions of General Relativity using Maxwell Gravity

김영철(KIM YOUNGCHUL)

kyceye@gmail.com

---

중력 자기 현상과 특수상대성 이론을 이용하여 일반상대성 이론의 초기 실험적 근거인 중력적색편이 현상과 수성궤도의 근일점이동 그리고 태양에 의한 빛의 굴절 현상에 대한 정확한 계산이 가능함을 보여서 일반 상대론의 이론적 기반이 사실상 존재하지 않음을 보였다. 그리고, 중력 및 전자 기력의 자기 효과와 특수 상대론의 토마스-위그너 회전에 의한 효과로서 로렌츠 힘에 대한 다음과 같은 수정을 제시한다.

$$\vec{a}_T = \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{a}_g$$
$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{E} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

By using the gravitomagnetic effect and the special relativity theory, it is possible to accurately compute the gravitational redshift, the perihelion precession of Mercury, and the refraction of light by the sun, which are initial bases proofs of the general relativity theory. So, it shows that basis of the general relativity theory does not exist. And in addition, the above corrections to the Lorentz force are presented as the gravitomagnetic and electromagnetic effect and the effect of special relativistic Thomas-Wigner rotation.

---

### 1. 서론 INTRODUCTION

나는 지난번 글 "천구의 원리"에서 특수상대론으로 우주의 균일하고 등방한 중심이 없는 팽창을 설명할 수 있음을 보였다. 관측된 데이터를 합리적으로 설명하는 것으로 볼때 틀릴 이유가 없는 것으로 보이나, 현재의 주류이론인 일반상대론 기반 우주론과는 일치하지 않는다. 일반 상대론 기반으로는 가속팽창 이론처럼 미지의 암흑에너지를 가정하거나 혹은 우주가 아무런 물질도 에너지도 없이 텅 비었을 경우에만 비슷한 결과를 내는 것으로 알려져있다.

In my last article, "The Principles of the Celestial Sphere," I showed that special relativity can explain the homogeneous, isotropic and centerless expansion of the universe. There seems to be no reason to be wrong in terms of rational explanation of the observed data, but it does not agree with the current mainstream theory of general relativity-based cosmology. Based on general relativity, it is known that similar results are obtained only when an unknown dark energy is assumed like the accelerated expansion theory, or when the universe is empty without any matter or energy.

그 원인에 대하여 생각해보면 두 가지 정도 이유를 가정할수있다. 하나는 일반상대론 자체는 옳으나 그 우주론으로의 응용에 문제가 있었다는 것이며, 다른 하나는 일반상대론 자체가 근본적으로 틀렸다는 것이다. 첫번째 가능성은 낮다고 본다. 백년이 넘는 시간동안 수많은 사람들이 다듬어 온 이론이 여섯플 수가 있겠는가? 오히려 두번째 가능성은 있다고 보았다.

Considering the cause, two reasons can be hypothesized. One is that general relativity itself is correct, but there were some problems in its application to the cosmology, and the other is that general relativity itself is fundamentally wrong. I think the first possibility is low. Can a theory that has been refined by many people for more than a century be clumsy? Rather, I saw the second possibility.

만약 일반상대론이 지나치게 강력한 수학에 기반한 이론으로서 그 어떤 현상에도 끼워 맞출수 있는, 마치 옛날의 주전원 이론같은 일종의 만능이론이라면, 알려진 현상을 설명한다는 면에서는 점점 더 정교해질것이기 때문에 그 이론이 물리적으로는 공허하다는 점을 쉽게 보지 못할 가능성도 있다고 보았다. 주전원이론과 태양중심설은 문헌에 등장한 시기로는 수천년전 별 차이없는 시기에 등장했지만 대부분의 시간동안 주전원 이론이 우세한 이론이었던 것이다. 과거의 학자들이 현재의 학자들보다 지식은 부족할 지언정 그 지능은 떨어질리가 없음에도 실제로 벌어진 역사적 사실이다.

If the general relativity is an universal theory of overly powerful mathematics that can fit into any phenomenon like the old epicycle theory, it will become more and more sophisticated in terms of explaining known phenomena, so it is possible that the physical emptiness of the theory may not be easily seen. The epicycle theory and the heliocentric theory appeared at the almost same time millenniums ago, but the epicycle theory was the dominant theory for most of the time. It is a historical fact that actually happened even though the scholars of the past may lack knowledge than those of the present, but their intelligence is not likely to inferior.

나는 그 가능성이 계속 염두에 남았다. 나의 일반상대론에 대한 개인적인 혐오도 이유중에 하나일것이다. 나는 공간을 왜곡한다는 개념이 마음에 안들었다. 공간은 고차원 입체 같은 것의 표면으로서 사실은 휘었다고? 그런 문제라면 차라리 차원을 하나더 추가하여 다시 반듯한 공간에서 입체 전체를 다루는게 낫지않나? 왜 힘들게 왜곡된 공간 내에서 헤메이는가? 물리적인 공간은 생각의 공간이기도 하다. 물리적인 공간을 왜곡한다는 것은 마음속의 생각의 공간을 왜곡한다는 것과 마찬가지로 가능하며, 가능하다 하더라도 좋은 접근 방법이라고는 생각하지 않는다.

I kept thinking about that possibility. My personal dislike for general relativity is probably one of the reasons. I don't like the concept of distorting space. Because space is the surface of something like a high-dimensional solid, is it actually curved? If that's the case, wouldn't it be better to add one more dimension and deal with the whole solid in a straight space again? Why should we wander in a distorted space? A physical space is also a space of thought. Distorting the physical space is the same as distorting the thinking space of the mind, and even if possible, I don't think it's a good approach.

혹자는 수학은 신의 언어, 혹은 자연의 언어 이므로 궁극의 물리학은 궁극의 수학이며, 어떤 물리학을 위해서는 특정 수학이 필수라고 주장하기도 하는듯하다. 그러나, 나는 그렇게 생각하지 않는다. 나는 수학은 인간의 생각하는 도구이자 인간의 언어이며, 한가지 물리를 기술하는 수학은 여러가지가 반드시 있고, 각자 그중 가장 사용하기 편하고 자신에게 맞는 수학적 방법을 선택 할수있으리라고 생각한다.

Some seem to argue that, since mathematics is the language of God or the language of nature, the ultimate physics is the ultimate mathematics, and certain mathematics is essential for some physics. However, I don't think so. I believe that mathematics is just a tool for human thinking and is a language of human, and there are always various types of mathematics that describe one physics, and each one can choose the most convenient and suitable mathematical method for oneself.

이 표현이 단순히 수학의 위상을 끌어내린다고 생각지는 말아 주길 바란다. 인간의 수학 언어라는 생각하는 도구는 인간이 가진 가장 귀중한 재능의 하나라는 사실은 변하지 않는다. 그러나 생각하는 방법이 필연적으로 획일적이어야 한다는 생각은 부정한다. 또한, 특정 수학 자체가 물리적인 의미가 있다는 생각을 부정한다.

Please do not think that this expression is simply to lower the status of mathematics. It does not change the fact that human's thinking tool, the language of mathematics, is one of human's most valuable talents. However, it denies the idea that the way of thinking must necessarily be uniform. It also denies the idea that certain mathematics itself has a physical meaning.

결국, 나의 생각은 일반상대론 자체를 한번 부정해보자 하는데에 미쳤다. 그러나 그 방법으로 일반상대론을 공부하여 내부에서 그 잘못된 점을 찾아볼 생각은 없었고, 지금도 없다. 나의 호기심은 진리를 향한것이지 의심스러운 것을 향한것이 아니다. 대신 나는 일반상대론의 이론적 기반에 대한 대안을 찾아 보기로 했다.

In the end, my thoughts came to 'let me deny general relativity itself'. However, I had no intention of studying general relativity as a way to find out what was wrong with it, and I have still none. My curiosity is towards the truth, not to the questionable. Instead, I decided to look for alternatives to the theoretical bases of general relativity.

일반상대론의 초창기 세가지 증거인 중력적색편이 현상과 수성궤도의 근일점 이동, 그리고 태양 중력에 의한 빛의 굴절 현상을 일반상대론과 다른 방법으로 설명가능한지, 일반상대론보다 기초적인 수학과 간명한 논리로 설명가능한지를 시도해 보기로 하였다. 성공한다면 나의 지난번 우주의 구조에 관한 발견에 대한 이론적 기반을 더욱 탄탄하게 할것이요, 실패한다면 일반상대론을 한번 진지하게 공부해 볼만한 이유는 필수 있을것이다. 그리고, 운이 좋다면 새로운 물리법칙을 발견할 수도 있으리라.

I decided to find whether it is possible to explain the early three evidences of general relativity which are gravitational redshift phenomenon, the perihelion precession of Mercury's orbit, and the refraction of light due to the gravity of the sun in a different way from general relativity, and to find whether it can be explained with basic mathematics and simple logic than general relativity. If successful, it will strengthen the theoretical foundation for my past discovery about the structure of the universe, and if it fails, it may be a reason to seriously study general relativity. And if I am lucky, I may discover new laws of physics.

그렇게 몇 달을 모색한 끝에, 우연인지 필연인지, 행운인지 준비된 일인지 알수없으나, 정말로 일반상대론을 부정하기에 충분할만큼 깔끔한 방법으로 일반상대론의 근원이 된 세가지 현상을 맥스웰 중력 이론과 특수 상대론을 이용하여 설명 해내는데에 성공하였다. 덤으로 로렌츠 힘에 대한 수정항도 제시하는 바이다.

After several months of rsearching, I do not know whether it is by chance, inevitability, luck, or prepared, I succeeded in explaining the three phenomena those became the bases of general relativity with Maxwell gravity and special relativity. They are clean enough to really deny general relativity. As an added bonus, a correction term for the Lorentz force is also presented.

이 글에서 사용한 계산 도구는 FriCAS 1.3.6 이며, 프로그래밍에 사용한 도구는 SBCL 2.1.7 이다.

The calculation tool used in this article is FriCAS 1.3.6, and the tool used for programming is SBCL 2.1.7.

## 2. 일반상대론 초기 증거들의 대안들 ALTERNATIVES TO THE EARLY EVIDENCES OF GENERAL RELATIVITY

### 2.1. 중력 적색편이 Gravitational Redshift

중력 적색편이는 사실 일반상대론이 아니더라도 특수상대론과 광양자론을 이용해서도 설명이 가능함은 이미 상식 수준으로 널리 알려져 있기에, 굳이 이 글에서 또 다시 언급할 필요가 있는지 의구심이 있으나, 일반상대론의 세가지 초기증거 중 첫번째 이므로, 형식적으로나마 관련 사실을 정리 해두는 바이다.

It is already widely known at the level of common sense that gravitational redshift can be explained using special relativity and photon theory even if without general relativity. So I doubt whether it is necessary to mention it again in this article, but since it is the first of the evidences, I will put together the relevant facts at least formally.

특수상대론에 따르면 질량과 에너지가 동등하므로 광자에도 그 에너지에 해당하는 질량이 부여되며 그 질량에 의한 위치 에너지 또한 정의 된다. 그리고, 광양자론에 따르면 광자의 직접 측정되는 에너지는 그 운동에너지 자체이다.

According to the special theory of relativity, since mass and energy are equivalent, a mass corresponding to that energy is given to a photon, and the potential energy by that mass is also defined. And, according to the photon theory, the directly measured energy of a photon is its kinetic energy itself.

특수상대론의  $\epsilon = mc^2$ 과 광양자론의  $\epsilon = h\nu$  그리고, 고전 중력이론의  $\epsilon = -G \frac{Mm}{r}$ 식들에 따르면, 중력장이 없는 자유로운 상태에서 광자의 질량을  $m = \frac{h\nu}{c^2}$ 라고 할때, 중력장 내부로 끌려들어온 광자는 위치에너지가 줄어든 만큼 운동에너지가 늘어날 것이므로, 중력장 내부에서 광자의 에너지는  $\epsilon = mc^2 + m \frac{GM}{r} = mc^2 \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)$ 으로 관찰될 것으로 예측할수있다. 즉 중력장에 의하여 광자의 에너지가  $\left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)$ 배가 된것으로 관측될것이다. 이는 광자의 진동수가 같은 만큼 증가한것으로 관찰 된다는 뜻이며, 이는 중력장 내부의 시간이 외부에 비해 느리게 가는 것으로 해석된다. 그리고, 이것이 바로 특수상대론과 광양자론에 따른 중력장 내부의 광자가 중력장 외부로 탈출하면서 잃는 에너지에 의한, 혹은 중력장 내부의 시간이 느리게 흐르는 현상에 의한 적색편이 식이다.

According to  $\epsilon = mc^2$  of special relativity,  $\epsilon = h\nu$  of photon theory, and  $\epsilon = -G \frac{Mm}{r}$  of classical gravity theory, when the mass of a photon in free state without gravitational field is  $m = \frac{h\nu}{c^2}$ , the kinetic energy of the photon drawn into the gravitational field increase as the potential energy decreases, so it is predicted the energy of the photon inside the gravitational field is  $\epsilon = mc^2 + m \frac{GM}{r} = mc^2 \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)$ . In other words, the energy of the photon should be observed that multiplied by  $\left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right)$  because of the gravitational field. This means that the frequency of the photon is observed to increase by the amount, that is interpreted as the time inside the gravitational field is slower than the outside. And, this itself is the redshift expression due to the energy lost by photons escaping out from inside of the gravitational field, or by the phenomenon of slow time inside the gravitational field, according to special relativity and photon quantum theory.

한편, 일반상대성이론의 적색편이 식은  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$ 으로서 이질적으로 보이나, 실은 그다지 다르지 않다. 급수 전개를 해보면

On the other hand, the redshift equation of the general relativity is  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$ , which looks heterogeneous. But in fact, they are not so different. in Taylor series,

$$(1) \rightarrow \text{series} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}, G=0 \right)$$

$$1 + \frac{M}{c^2 r} G + \frac{3M^2}{2c^4 r^2} G^2 + \frac{5M^3}{2c^6 r^3} G^3 + \frac{35M^4}{8c^8 r^4} G^4 + \frac{63M^5}{8c^{10} r^5} G^5 + \frac{231M^6}{16c^{12} r^6} G^6 + \frac{429M^7}{16c^{14} r^7} G^7 + \frac{6435M^8}{128c^{16} r^8} G^8 + \frac{12155M^9}{128c^{18} r^9} G^9 + \frac{46189M^{10}}{256c^{20} r^{10}} G^{10} + O(G^{11})$$

Type: UnivariatePuisseuxSeries(Expression(Integer),G,  
0)

r이 클때 특수상대론의 식으로 수렴하는 것을 볼수있으며, 제곱 항 부터는 너무 작기에 현재 기술로는 차이를 직접 측정할수는 없을것이다. 듣기로는 위치에너지 기반이 아닌 탈출속도 기반으로 계산되었다고 하나, 나는 그 기반으로 직접 유도 해본적은 없다.

It can be seen that when r is large, it converges to the formula of special relativity, and since the square term is too small, it will not be possible to directly measure the difference with current technology. I heard that it was calculated based on escape velocity rather than potential energy, but I never have derived it by myself.

물리적 의미는 무시하고 순수하게 수학적인 대칭성으로만 보자면 두가지 꼴이 더 가능하다.  $\frac{1}{1 - \frac{GM}{rc^2}}$ 이나  $\sqrt{1 + \frac{2GM}{rc^2}}$  같은 식들 역시 급수전개를 하면 첫 두항은  $1 + \frac{GM}{rc^2} + \dots$ 이 되어 마찬가지로 가능한 적색편이 식의 후보가 될수있다. 실은  $\sqrt{1 + \frac{nGM}{rc^2}}$ 이나  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{nGM}{rc^2}}}$  꼴의 식이면 전부 가능한 후보이긴하나 내가 알기로는 물리적 의미가 뚜렷한 식은 처음 두가지이다.

Ignoring the physical meaning and look at purely mathematical symmetry, two more shapes are possible. If expressions like  $\frac{1}{1-\frac{GM}{rc^2}}$  or  $\sqrt{1+\frac{2GM}{rc^2}}$  are also expanded then the first two terms are  $1+\frac{GM}{rc^2}+\dots$ , so they can be possible candidates for redshift equation as well. Actually, formulas of the shape  $\sqrt[n]{1+\frac{nGM}{rc^2}}$  or  $\frac{1}{\sqrt[n]{1-\frac{nGM}{rc^2}}}$  are all possible candidates, but as far as I know, the only first two expressions have clear physical meaning.

또한 처음 언급한 두가지 식이 특별한 점이 있다.  $1+\frac{GM}{rc^2}$  식은 개념적으로 가장 간편하고 깔끔한 식이며, 한편 일반상대론의  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}$  식은 기본적인 네가지 식중 유일하게 별이 붕괴하여 블랙홀이 생성되는 현상이 가능한 식이다.

There is also something special about the first two formulas. The expression  $1+\frac{GM}{rc^2}$  is conceptually the simplest and cleanest expression, while the expression by general relativity  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}$  is the only one that allows the creation of a black hole by the collapse of a star among the four basic equations.

네가지 적색편이 식을  $r$ 에 관하여 적분을 하면 빛이 유한한 거리에서  $r=0$ ,  $r=\frac{GM}{c^2}$ , 또는  $r=\frac{2GM}{c^2}$ 인 특이점 반경에 도달하는데 걸리는 시간을 계산할수있다.

Integrating the four redshifts with respect to  $r$ , we can calculate the time of light takes to reach the singularity radius of  $r=0$ ,  $r=\frac{GM}{c^2}$ , or  $r=\frac{2GM}{c^2}$  from finite distance.

(2) ->  $\text{integrate}\left(1+\frac{GM}{rc^2}, r\right)$

$$\frac{GM \log(r) + c^2 r}{c^2}$$

...)

Type: Union(Expression(Integer),

(3) ->  $\text{integrate}\left(\frac{1}{1-\frac{GM}{rc^2}}, r\right)$

$$\frac{GM \log(c^2 r - GM) + c^2 r}{c^2}$$

...)

Type: Union(Expression(Integer),

(4) ->  $\text{integrate}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}, r\right)$

$$\frac{GM \log\left(c \sqrt{\frac{c^2 r - 2GM}{c^2 r}} + c\right) - GM \log\left(c \sqrt{\frac{c^2 r - 2GM}{c^2 r}} - c\right) + c^2 r \sqrt{\frac{c^2 r - 2GM}{c^2 r}}}{c^2}$$

...)

Type: Union(Expression(Integer),

(5) ->  $\text{integrate}\left(\sqrt{1+\frac{2GM}{rc^2}}, r\right)$

$$\frac{GM \log\left(c \sqrt{\frac{c^2 r + 2GM}{c^2 r}} + c\right) - GM \log\left(c \sqrt{\frac{c^2 r + 2GM}{c^2 r}} - c\right) + c^2 r \sqrt{\frac{c^2 r + 2GM}{c^2 r}}}{c^2}$$

...)

Type: Union(Expression(Integer),

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}$  식만이 유일하게  $r = \frac{2GM}{c^2}$  인 특이점 반경 혹은 사건의 지평선에 유한한 시간내에 도달할 수 있음을 볼수있다. 다른 식들은  $r=0$ , 또는  $r = \frac{GM}{c^2}$  인 특이점 반경에 도달하는데 걸리는 시간이 광속으로도 무한대가 거리므로 일반적인 물질을 근원으로 하는 블랙홀 생성이 불가능 함을 알수있다.

It is seen that formula  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}$  only can reach within a finite time to the singularity radius or event horizon of  $r = \frac{2GM}{c^2}$ . Other equations show that the time to reach the singularity radius of  $r=0$ , or  $r = \frac{GM}{c^2}$  takes infinity even at the speed of light, so it is impossible to create a black hole based on ordinary substance.

블랙홀의 존재에 관하여 근래에 매우 강력하게 지지되고있는 분위기이긴 하나, 나는 아직 그 존재 증거들에 대해 의구심이 있다. 그러나, 퀘이사의 존재는 그 에너지원으로서 블랙홀이나 혹은 그와 비슷한것이 반드시 필요하므로, 현재로서는 블랙홀의 존재 가능성도 있는 편이다. 그러나, 블랙홀을 배제하더라도 블랙홀과 비슷한 '영원히 붕괴해가는 별'을 생각 할수도 있으므로,  $1 + \frac{GM}{rc^2}$  식이 옳을 가능성도 충분하다고 본다. 특히 우리 은하의 중심 블랙홀로 추정되는 질량이 겨우 태양 질량의 400만배에 불과하다는 추정은 붕괴 과정 중 대략 반 정도의 질량만을 다시 빛 에너지 형태로 방출한다고 알려진 블랙홀 대신 결국은 모든 질량에 해당하는 에너지를 방출하게되어 마지막에는 모든 질량을 잃게되고야 마는 영원히 붕괴해 가는 별의 존재에 무게를 실어준다고 본다.

Although there are strong supports for the existence of black holes in recent years, I still have doubts about the evidence for their existence. However, since the existence of a quasar necessarily requires a black hole or something similar as its energy source, there is a possibility of the existence of a black hole at present. However, even if black holes are excluded, it is possible to think of 'eternally collapsing star' similar to black holes, so there is a sufficient possibility that the expression  $1 + \frac{GM}{rc^2}$  is correct. In particular, the estimate that the mass of the central black hole of our galaxy is only 4 million times the mass of the Sun seems to be giving weight to the existence of a 'eternally collapsing star' that eventually emits energy corresponding to all of its mass and eventually loses all of mass, instead of a black hole which is known to emit only about half of its mass in the form of light energy during the collapse process.

따라서, 이 글에서 묘사할 일반상대론의 대안에서는 당장 가능한 식중 어느것이 옳은 식인지 판단을 유보하고, 위 식 네가지 전부를 후보로 보기로 하고, 차후 관찰에 의하여 밝혀져야 할것으로 제안한다. 현재로서는 직접 관찰에 의한 분간은 쉽지 않을 것으로 보인다. 급수 전개 세번째 항이 두번째 항에 비하여 너무도 작기 때문이다. 물론, 물리적인 의미를 강하게 가지고 있는 식은 최초의 식(위치에너지 기준)과 일반상대론의 식(탈출속도 기준) 두가지이며, 그중 나는 첫번째 식이 가장 깔끔하여 취향에 맞기에 심정적으로 응원한다.

Therefore, in this alternative to the general relativity to be described in this article, it is suggested to postpone that the judgment of which of the possible expressions is the correct one, to consider all the above four expressions as candidates. it will be revealed by observation in the future. At present, it seems that it is not easy to distinguish by direct observation. This is because the third term of the series expansion is too small compared to the second term. Of course, the equations those have strong physical meanings are the first equation (based on potential energy) and the equation of general relativity (based on escape velocity), among them, I support emotionally the first equation since it is the cleanest and suits my taste.

사실 이 소설의 내용은 나의 작업이라 할수없는 상식 수준으로 알려진 기초적인 것으로서 이글에 포함되어도 되는가 조금 고민했지만, 일반상대론의 초기 증거 세가지 중 하나로서 역사적인 이유로 거론안하기 어렵다고 보았고, 그리고, 네 식중 어느것이 딱히 옳다는 공식적인 판단은 아직 할수없지만, 중력 적색편이 식  $1 + \frac{GM}{rc^2}$  에 대한 나의 취향상의 지지와 블랙홀의 대안으로서 '영원히 붕괴하는 별'에 대한 나의 취향상의 지지는 뚜렷히 피력해두기 위하여 이 소재를 포함하였다.

In fact, the content of this section is a basic, known level of common sense that cannot be my work, and I was a little worried about whether it could be included in this article, but I found it difficult not to mention as historical reasons because it is one of the three early evidences of general relativity. And, although it is not yet possible to make my official opinion as to which of the four equations is particularly correct, I have included this material in order to clearly express my preference for the gravitational redshift equation  $1 + \frac{GM}{rc^2}$ , and my preference for the 'endlessly collapsing star' as an alternative to black holes.

## 2.2. 수성궤도의 근일점 이동 Perihelion precession of Mercury

### 2.2.1. 역사 The History

일반 상대론의 대표적인 증거중 하나로서 일컬어 지는 수성 궤도의 근일점이 회전 방향으로 전진하는 현상은 꽤 오랜동안 고전 천체 역학의 수수께끼였다. 1859년 프랑스의 천체물리학자 르베리에 에 의하여 최초 제기된 이후로 수많은 가설을 낳은 수수께끼로 수십년간 풀리지 않은채 남아 있었다.

The phenomenon of the perihelion of Mercury's orbit advancing in the direction of rotation, which is said to be one of the representative evidences of general relativity, has been a puzzle of classical celestial mechanics for quite years. Since it was first posed by the French astrophysicist Le Verrier in 1859, it has remained unsolved for decades as a riddle that has given rise to numerous hypotheses.

최초로 올바른 수식을 발견해 낸것은 독일의 물리학자 파울거버(Paul Gerber) 였다. 그는 1902년, 특수상대론도 등장하기 전에 당시의 물리학계의 주관심사 중의 하나였던 지연된 장에 대한 연구를 바탕으로 최초로 수성궤도의 근일점 이동을 정확하게 예측하는  $\Psi = \frac{6\pi\mu}{a(1-e^2)c^2}$ ,  $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{r^2}$ ,  $\Psi = \frac{24\pi^3 a^2}{r^2 c^2 (1-e^2)}$  라는 결과를 발표 하였다. 그러나, 이 결과는 웬일인지 그다지 유명세를 타지 못하고 있다가 1915년 아인슈타인이 일반상대론을 발표하며 함께 공개한  $\epsilon = \frac{24\pi^3 a^2}{r^2 c^2 (1-e^2)}$  식이 최초로 수성궤도의 근일점 이동을 설명한 식으로 잘못 유명세를 타게 되었다.

The first correct formula was discovered by the German physicist Paul Gerber. In 1902, before the emergence of special relativity, he has published  $\Psi = \frac{6\pi\mu}{a(1-e^2)c^2}$ ,  $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{r^2}$  therefor  $\Psi = \frac{24\pi^3 a^2}{r^2 c^2 (1-e^2)}$  based on a study on the retarded field which was one of the main examinations of the physics community at the time, and he was the first to accurately predict the perihelion movement of Mercury's orbit. However, this result was not very popular for some reason, and in 1915, Einstein announced Equation  $\epsilon = \frac{24\pi^3 a^2}{r^2 c^2 (1-e^2)}$  and it was erroneously made famous as the first explanation for the perihelion movement of Mercury's orbit.

두 식이 너무나 유사하여 1920년경 아인슈타인은 자신이 표절을 한게 아니라 독립적으로 발견했음을 강변하는 글을 남겨야만 하였다. "Mr. Gerber's work is therefore completely useless, an unsuccessful and erroneous theoretical attempt. I maintain that the theory of general relativity has provided the first real explanation of the perihelion motion of Mercury. I did not mention the work by Gerber initially, because I did not know about it when I wrote my work on the perihelion motion of Mercury; even if I had been aware of it, I would not have had any reason to mention it." 매우 방어적인 아인슈타인의 태도를 볼수있다.

The two equations were so similar, that around 1920 Einstein has to state that he had discovered it independently, not that he had plagiarized it. "Mr. Gerber's work is therefore completely useless, an unsuccessful and erroneous theoretical attempt. I maintain that the theory of general relativity has provided the first real explanation of the perihelion motion of Mercury. I did not mention the work by Gerber initially, because I did not know about it when I wrote my work on the perihelion motion of Mercury; even if I had been aware of it, I would not have had any reason to mention it." Einstein's attitude was very defensive.

사실 두 식의 유사성의 원인은 두 식이 모두 유사한 수학적 기법을 통해 유도 되었다는 점에서 찾을수있다. 거버가 근일점 이동 계산을 출발한 지점은  $V = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{2}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$  이고 반면에 아인슈타인의 출발은  $V = \frac{m c^2}{2} \left[ -\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3} \right]$ 이니 얼핏 내용이 매우 달라보여도 실상은 힘이 역제곱의 법칙을 따를 때 닫힌 궤도는 완벽한 타원을 이루지만, 힘이 역제곱보다 큰 즉  $F = \frac{1}{r^n}$  꼴에서 n이 2보다 클때에 궤도의 근일점이 전진하는 현상을 계산한것이니, 같은 값을 표시해야 할 식의 경우 그 꼴이 매우 유사해지는 것은 당연하다고 해야할것이다. 나는 이 부분, 즉 역제곱보다 크게 감소해가는 장에 대한 필요가 아인슈타인으로 하여금 공간의 계량이 변해야 한다고 생각하게 한 이유가 아닐까 생각한다.

In fact, the cause of the similarity between the two expressions can be found in the fact that both expressions are derived through similar mathematical techniques. The point where Gerber started calculating the perihelion shift is  $V = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{2}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$ , whereas Einstein's starting point is  $V = \frac{m c^2}{2} \left[ -\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3} \right]$ . Although the contents look very different at first glance, in reality, when the force obeys the law of inverse square, a closed orbit forms a perfect ellipse, but when the force obeys the greater inverse square, that is, when n is greater than 2 in the form of  $F = \frac{1}{r^n}$  It calculates the phenomenon that the perihelion of the orbit moves forward, so in the case of expressions that need to display the same value, it is natural that the form is very similar. I think this part, that is, the need for a field that decreases significantly more than the inverse square, was the reason why Einstein thought that the metric of space had to change.

참고로, n이 3 보다 클 경우는 안정된 궤도를 유지할수없고, 원궤도가 아닐경우 한번 근일점을 향해 낮아진 궤도는 결코 다시 원일점을 향해 복귀할수 없고 나선형으로 붕괴하게된다.

For instance, if n is greater than 3, a stable orbit cannot be maintained, and if it is not a circular orbit, the orbit once lowered toward the perihelion cannot return to the aphelion again and spirally collapses.

일반상대론의 발표 이후에도 수성의 근일점 이동을 설명하려는 시도는 여러번 있었던 것으로 보이며 나역시 그중 몇가지는 본적이 있는데, 특히 2003년 두 인도인 물리학자 베헤라(Behera)와 나익(Naik)이 발표한 특수상대론을 이용한 수성 궤도 계산은 나에게 중요한 영감을 주었다.

It seems that there have been many attempts to explain Mercury's perihelion shift even after the announcement of general relativity. I have seen some of them, in particular, the calculation of Mercury's orbit using the special relativity, published by two Indian physicists Behera and Naik in 2003 was an important inspiration to me.

나는 지난번 글 '천구의 원리'를 쓴 이후, 나의 이론과 일반상대론 기반 이론간의 불일치 원인을 생각하다가 결국 일반상대론을 부정하는 것으로 기울었고 그 대안으로 중력자기 이론이나 특수 상대론 등을 염두에 둔 상태 였는데, 특수상대론 만으로는 좀처럼 근일점 이동 현상을 유도해 낼수가 없었고 (역제곱의 법칙을 보정할수 없거나, 억지로 하더라도 그 수치가 너무 작았고), 또한 이번에는 '천구의 원리'에서처럼 글을 다쓰고 나서야 비슷한 뿌리를 가진 이론의 존재를 알게되는 상황은 피하고 싶어서 특수상대론만으로 수성의 근일점 이동을 설명한 이론이 있는지를 검색해 보는 과정에 서 발견하게 된 논문이었다.

After I wrote the last article 'The Principles of the Celestial Sphere', I was thinking about the cause of the discrepancy between my theory and the theory based on general relativity, and I inclined to reject the general relativity. And as the alternatives, the theory of gravitomagnetism and special relativity were in mind. But, I could hardly induce the perihelion shift with the special relativity alone (the law of inverse square could not be corrected, or the amount was too small even if forced). And this time, I wanted to avoid the situation of finding the existence of a theory with similar roots only after I finish writing, as in 'The Principles of the Celestial Sphere'. So I searched for a theory explaining the perihelion shift of Mercury with only the special relativity theory, and this paper was discovered in the process.



토머스세차(Thomas precession) 현상을 이용한 수성의 근일점 이동을 설명하는 논문이었는데, 토머스세차를 이용한 수성근일점 이동의 설명은 정당한 근거 제시 없이 그 효과를 세배나 부풀린 것으로 보이는 등, 내용 자체는 그다지 납득할 수 없는 내용이었으나, 느린속도에서의 토머스세차의 식  $\frac{1}{2c^2} a \times v$  자체가 내게 즉각적인 영감을 주었다. 나 역시 그전까지는 역제곱 법칙의 보정만 생각하고 있었는데,  $\frac{1}{2c^2} a \times v$  식은 자기장을 떠올리게 했고, 다시 자기장은 다시  $v$ 와 작용하여 편향력이 발생함을 연상 시켰다. 그리고, 흥미로운  $\frac{1}{2}$ 을 제시하는 내용이었다. 즉각 확인해 볼 필요를 느꼈다.

It was a paper explaining the perihelion precession of Mercury using the Thomas precession. But, the explanation of Mercury's perihelion advance using Thomas' precession was not very convincing, such as it seemed to inflate three times the effect without providing a justifiable rationale, but the equation  $\frac{1}{2c^2} a \times v$  itself immediately inspired me. I was also only thinking about the correction of the inverse square law until then. But, the  $\frac{1}{2c^2} a \times v$  expression reminded me of a magnetic field interacting  $v$ , and the deflection force generated by the magnetic field. And, it presented an interesting  $1/2$ . I felt the need to check it out immediately.

여기서,  $\frac{1}{2}$ 은 토머스의 절반(Thomas half)으로 불리는  $\frac{\gamma^2}{\gamma+1}$ 의 비상대론적 극한으로서 제시되었으나, 나의 결론으로는 이 경우에는  $\frac{\gamma}{\gamma+1}$ 가 옳다. 역시 비상대론적 극한은  $\frac{1}{2}$ 이며, 전체식은  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} a \times v$ 이다. 이는 이 글의 뒷부분에서 좀더 자세히 설명될 것이다.

Here,  $\frac{1}{2}$  is presented as a non-relativistic limit of  $\frac{\gamma^2}{\gamma+1}$  called Thomas half, but my conclusion is that  $\frac{\gamma}{\gamma+1}$  is correct in this case. Also, the non-relativistic limit is  $\frac{1}{2}$ , and the total equation is  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} a \times v$ . This will be explained in more detailed later in this article.

### 2.2.2. 시뮬레이션 The Simulation

자세한 이론적인 논의는 뒤로 미루고 시뮬레이션의 결과부터 보이기로 한다. 나에게는 마침 행성의 운동을 시뮬레이션 하려고 연습삼아 작성해둔 프로그램이 있었고, 그 프로그램을 통해 시뮬레이션이 수성의 근일점 이동을 계산 가능할 정도로 충분히 정밀한 것은 이미 확인해두었다. 그리고, 사실 이전에 몇가지 특수 상대론적인 보정은 전혀 궤도를 회전 시키지 못함도 이미 몇번 시뮬레이션 했었다. 그것을 약간 간략하게 수정하여 시뮬레이션에 사용하였다.

I will postpone the detailed theoretical discussion and show the results of the simulation first. I just had a program I wrote to simulate the motion of the planets as practice, and I had already confirmed that the simulation was accurate enough to calculate the perihelion advance of Mercury. And, in fact, some special relativistic corrections have already been simulated a few times in the past that do not rotate the orbit at all. I used it to simulate with slight modifications.

이미 수학적 해석으로 수성의 근일점 이동을 구한 사례는 너무 많으므로 새로운 것이 하나 더 등장하더라도 이것이 과연 진정한 옳은 방법인지를 주장하기는 어려워져 버렸다고 나는 생각한다. 그리고, 이미 올바르지 않은 물리적인 가정으로도 얼마든지 올바른 수식을 만들어 낼수있음도 보여져 버린 문제이므로, 수식 유도 만으론 이 문제에서는 더이상 물리적인 가정이 옳은지 보장할수 없게되었다.

There are already too many cases where the perihelion shift of Mercury has been found by mathematical interpretation, so I think that it is difficult to assert whether it is really the right method even if there is one more new one. And, since it has already been shown that correct formulas can be derived even with incorrect physical assumptions, it became no longer possible to guarantee that the physical assumptions are correct in this problem only by formula derivation.

그리고, 어차피 최종 공식은 이미 알려져 있으므로, 나는 차라리 고전적인 뉴턴 법칙을 이용하여 위치는 속도의 수치적분으로 속도는 가속도의 수치적분으로 시뮬레이션 하되 물리적으로 의미가 뚜렷한 약간의 수치보정만으로 수성의 근일점 이동을 보일수있다면 그것이 오히려 수학적인 해법보다도 확실하게 새로운 방식의 정당성을 보여주는 방법이라고 생각한다. 나는 고급 수학은 그것이 물리 문제를 더욱 편하게 계산하게 해줄때 가치가 있는 것이지 그 자체로는 물리학과는 크게 관계없다고 본다. 물리학은 수학을 필요로 하지만 산수나 초급 기하수준의 낮은 수준의 수학일수록 더 선호되며 고급 수학은 어쩔수 없을때에 최소한으로 필요에 따라 사용되어야 한다는 입장이다.

And, since the final formula is already known anyway, I would rather use the classical Newton's law to simulate position as the numerical integral of velocity and velocity as the numerical integral of acceleration. If I could show the perihelion advance of Mercury only with a slight numerical physically meaningful correction. I think that it is a way to show the legitimacy of a new method more clearly than a mathematical solution. I think advanced mathematics is valuable when it makes computing physics problems easier, I don't think itself is a physics. I think physics requires mathematics, but lower-level mathematics such as arithmetic or elementary geometry are preferred, and advanced mathematics should be used at a minimum when necessary.

나는 중력 가속도  $a = \frac{GM}{r^2}$ 에 대한 보정으로 중력자기 효과에 의한 편향력  $\frac{1}{c^2} v \times a \times v$ 와 토마스-위그너 회전에 의한 편향력  $\frac{1}{2c^2} v \times a \times v$ 를 더하여, 상기한 논문에서 느낀 토머스-위그너 회전보다 세배가 더 필요하다는 생각을 표현했다. 가상 코드로 표현하면  $a = a + \frac{3}{c^2} v \times a \times v$  항을 코드에 추가하여 시뮬레이션을 해보았고. 이 글을 쓰는것으로 예고되다시피, 그 간단한 보정만으로 어이없게도 단번에 수성의 근일점 이동이 올바르게 시뮬레이션 되어버렸다.

I added biasing force  $\frac{1}{c^2} v \times a \times v$  by the gravitomagnetic effect and biasing force  $\frac{1}{2c^2} v \times a \times v$  by the Thomas-Wigner rotation to the gravitational acceleration  $a = \frac{GM}{r^2}$  as corrections. It was for expressing the idea felt in the above paper that three times more is needed than the Thomas-Wigner rotation. In virtual code,  $a = a + \frac{3}{c^2} v \times a \times v$  was added to the code to simulate. As predicted by writing of this article, the perihelion precession of Mercury was correctly simulated at once with the simple correction.

프로그램은 common-lisp 으로 작성 되었고, 실행 확인은 SBCL에서만 하였으나, 표준화가 잘 된 common-lisp의 특성상 다른 배포판에서도 작동에 문제는 없을 것이다. 혹 문제가 된다면 프로그램 shnv1.lisp 에서 사용한 패키지인 (ql:quickload "trivial-arguments") 의 문제일 가능성이 크니 필요하다면 직접 수정하던가 혹은 아예 자신에게 편한 툴로 재작성 해보기를 권한다.

The program was written in common-lisp, and execution was tested only in SBCL, but there will be no problem in operation in other distributions due to the well-standardized common-lisp. If there would be some problem, it would be most likely a problem of the package (ql:quickload "trivial-arguments") used in the program 'shnv1.lisp'. If necessary, I recommend you modify it yourself or rewrite it with a tool that is convenient for you.

이 글에서 내가 작성한 프로그램의 실행 예들을 보여 줄것이지만 보다 확실한 검증을 하고자 하는 사람들은 각자 자신에게 편한 언어나 툴을 사용해서 직접 해보는 것이 나으리라. 단순한 뉴턴 법칙에 의한 시뮬레이션에 가속도 항을 보정하기위해  $a = a + \frac{3}{c^2} v \times a \times v$  항목만 추가하면 필요한 전부이다. 나의 프로그램에서는 gsimm.lisp 파일의 (defun next-dn...) 함수의 (setf (pobj-a j) ag) 부분을 (defun next-d...) 함수에서는 (setf (pobj-a j) [ag pobj-v j X\* ag X\* pobj-v j .\* 1.5 %c .+ ./ ^ 2.0]) 로 수정해서 사용하는 것이 보정의 전부였다.

In this article, I will show examples of the execution of the program I wrote, but those who want to verify more confidently would be better of using a language or tool they are comfortable with and trying it out themselves. In order to correct the acceleration term in the simulation based on simple Newton's law, all you need is to add  $a = a + \frac{3}{c^2} v \times a \times v$  term. In my program, the (setf (pobj-a j) ag) part of the function (defun next-dn . . .) was corrected as (setf (pobj-a j) [ag pobj-v j X\* ag X\* pobj-v j .\* 1.5 %c .+ ./ ^ 2.0]) at the function (defun next-d ... ) in the 'gsimm.lisp' file, it was all of corrections.

행성의 움직임만 계산하며 태양의 운동은 계산하지 않으므로 행성의 질량이 0인 경우에 해당한다. 이는 태양이 움직일 경우 고려해야 할 유한한 속도로 전달되는 힘 문제로 인한 복잡성을 피하기 위함이다. 태양의 위치가 고정이라면 행성은 항상 미리 완전히 계산된 장속에서 움직이게 되므로 무한대의 속도로 전달되는 장속에서 운동하는 것과 같다.

It only calculates the motion of the planet, not the motion of the sun, so it corresponds to the case where the mass of the planet is 0. This is to avoid complexity due to the problem of forces transmitted at finite velocities that must be taken into account when the sun is moving. If the position of the sun is fixed, the planet will always move in the fully calculated field in advance, so it is equivalent to moving in a field that transmits at infinite speed.

프로그램은 github(<https://github.com/kycgit/gsimmm>)에서 다운 받거나 이글 말미에 첨부된 프로그램들을 복사하여 모두 동일한 폴더에 저장한후 같은 폴더에서 common-lisp을 실행하여 작동 시키도록 한다.

Download the program from github or copy the programs attached at the end of this article and save them all in the same folder, then run common-lisp in the same folder to make it work.

그래프는 GNUPLOT 프로그램을 이용하였으며 자세한 사용법과 결과를 단계별로 보이도록 할 것이니 따라하기에 문제 없을 것이다.

The graph uses the GNUPLOT program, and I will show detailed usage and results step by step, so there will be no problem to follow.

먼저 SBCL을 실행한후 다음 명령들을 입력하고 다음의 결과를 확인한다.

First, execute SBCL, then enter the following commands and check the following results.

```
CL-USER> (load "gsimm.lisp")
To load "trivial-arguments":
  Load 1 ASDF system:
    trivial-arguments
; Loading "trivial-arguments"
```

T

```
CL-USER> (in-package va)
#<PACKAGE "VECTOR-ARITHMETIC">
VA>
```

이제 준비는 되었다.

Now it is ready.

먼저, 조금 극단적인 경우부터 확인하기로 한다. 원일점에서 0.005분 간격으로(근일점에서는 더 촘촘해짐) 시뮬레이션 하여 한시간 간격으로 데이터를 저장하되, 총 0.4년 동안 하며, 수성의 원일점에서 출발하고, 이심율은 0.99992이며, 결과 자료는 simw099992.txt 파일에 저장하라는 의미의 아래 명령을 입력하여 시뮬레이션을 시작한다. 이심율이 매우 극단적인 이유는 이쯤은 되어야 육안으로도 근일점 이동이 확인 가능 하기 때문이다.

First, I will check the slightly extreme case. The simulation is performed every 0.005 minutes at the aphelion (it becomes denser at the perihelion) and the data is saved at one hour intervals, for a total of 0.4 years, starting from the aphelion of Mercury, the eccentricity is 0.99992, and the result data is saved in the 'simw099992.txt' file, Start the simulation by entering the command below. The reason why the eccentricity is so extreme is that the perihelion movement can be confirmed with the naked eye only at this level.

```
VA> (time(sim-w [0.005 * minute] hour [0.4 * year] :Mercury 0.99992
"simw099992.txt"))
```

Evaluation took:

```
587.958 seconds of real time
586.377222 seconds of total run time (585.611167 user, 0.766055 system)
[ Run times consist of 4.511 seconds GC time, and 581.867 seconds non-GC
time. ]
99.73% CPU
21 lambdas converted
2,171,316,634,357 processor cycles
853,567,318,336 bytes consed
```

나의 컴퓨터 기준으로 약 십분간의 시뮬레이션 끝에 sim099992.txt 파일에 결과를 저장하였으므로, GNUPLOT 프로그램을 실행하여 확인한다.

After about 10 minutes of simulation on my computer basis, the result was saved in the 'sim099992.txt' file, so run the GNUPLOT program to check it.

```
G N U P L O T
Version 5.4 patchlevel 2    last modified 2021-06-01

Copyright (C) 1986-1993, 1998, 2004, 2007-2021
Thomas Williams, Colin Kelley and many others

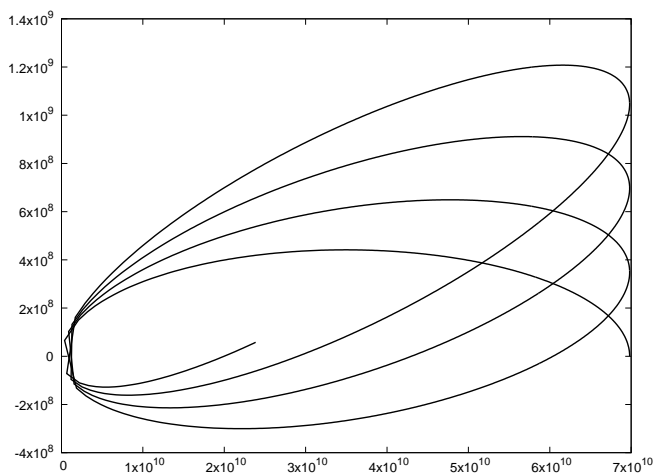
gnuplot home:    http://www.gnuplot.info
faq, bugs, etc:  type "help_FAQ"
immediate help:  type "help" (plot window: hit 'h')
```

Terminal type is now 'qt'

아래 명령을 입력하면 다음과 같은 그래프를 보게된다.

If you enter the command below, you will see a graph like the one below.

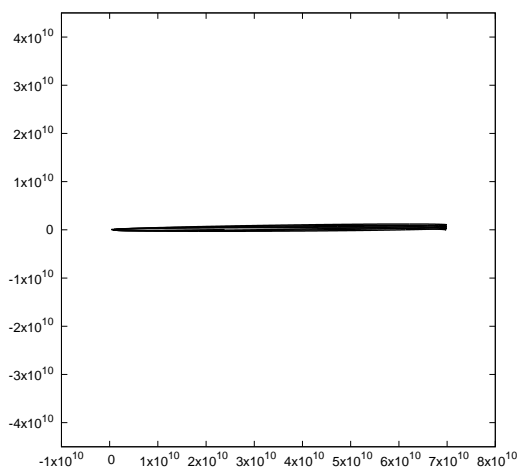
```
gnuplot] load "simw099992.txt"
```



3회전 반을 공전하며 회전 방향으로 전진한 궤도를 볼수있다. 이 그림은 사실 y축 방향으로 수 십배 확대된 그림이며 실제 비율로 보기위해서는 다음과 같은 명령을 입력한다.

You can see the orbit advancing forward in the direction of rotation while revolving around three and a half revolutions. This figure is actually a figure tens of times magnified in the y-axis direction, and to view it in actual proportion, enter the following command.

```
gnuplot] set size square
set xrange [-1e10:8e10]
set yrange [-4.5e10:4.5e10]
load "simw099992.txt"
```



극단적인 이심율로 멀리서는 그저 직선으로 보일뿐이지만 궤도의 전진은 확인할수있다.

Due to its extreme eccentricity, it looks just a straight line from a distance, but the advance of the orbit is confirmed.

시뮬레이션의 신뢰도를 확인하기 위하여 편향력 보정을 하지않은 궤도역시 한번 그려보기로 한다.

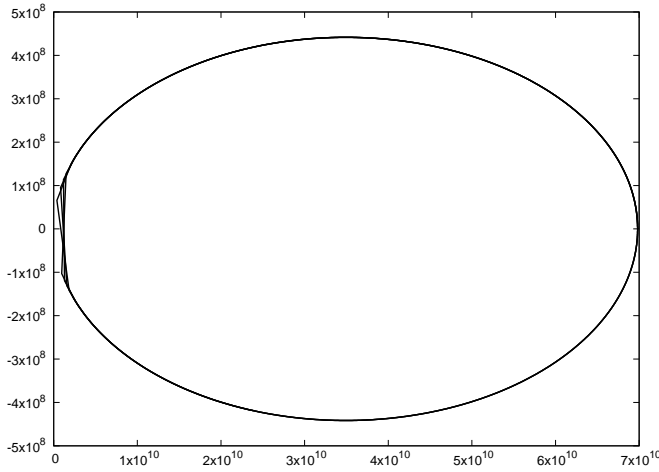
To check the reliability of the simulation, I will draw a orbit without biasing force correction.

```
VA> (sb-ext:gc :full t)
NIL
VA> (time(sim-wn [0.005 * minute] hour [0.4 * year] :Mercury 0.99992
"simwn099992.txt"))
Evaluation took:
  410.991 seconds of real time
  411.124471 seconds of total run time (410.554294 user, 0.570177 system)
  [ Run times consist of 2.890 seconds GC time, and 408.235 seconds non-GC
time. ]
  100.03% CPU
  1,517,798,892,604 processor cycles
  597,359,096,368 bytes consed
```

보정에 사용되는 시간이 없으므로 조금 짧은 410초 정도의 시간이면 시뮬레이션이 끝나며,

Since there is no time used for correction, the simulation is completed in a rather short time about 410 seconds,

```
gnuplot] set autoscale xy
        load "simwn099992.txt"
```



세바퀴 반을 극단적인 이심률로 공전함에도 회전축이 전혀 흔들리지 않음을 볼수있다. 물론 확대해서 보면 미세한 시뮬레이션 오차는 확인할수있다. 좌측의 지저분한 부분은 데이터 저장을 한 시간 단위로 하도록 하여, 빠른 속도 부분이 거칠게 보이는 뿐이지 실제 시뮬레이션은 빠른 속도 부분에서 훨씬 촘촘하게 하고있다.

It can be seen that the axis of rotation does not move at all even though it revolves around three and a half wheels with extreme eccentricity. Of course, if you zoom in, you can see a small simulation error. The messy part on the left is to store data in units of one hour, so the high-speed part only looks rough, but the actual simulation is much denser in the high-speed part.

데이터를 자동으로 분석하여 일회 공전시의 궤도 회전량을 계산할수도 있다.

By automatically analyzing the data, it is also possible to calculate the orbital rotation amount in one revolution.

그전에, 시뮬레이션 값과 비교될 전통적인 이론치를 계산하는  $24\pi^3..$  은 일회 공전시의 궤도 회전  $\frac{24 \pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$  을 케플러 제 3법칙  $T^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{GM}$  과 타원의 장축 a와 타원궤도의 원일점 A의 관계  $a = \frac{A}{(1+e)}$  를 이용하여  $\frac{6 \pi GM}{Ac^2(1-e)}$  로 정리한 식이다.

Before that,  $24\pi^3..$ , which calculates the traditional theoretical value to be compared with the simulation value, uses Kepler's third law  $T^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{GM}$ , the relationship  $a = \frac{A}{(1+e)}$  between the long axis a of the ellipse and the aphelion A of the elliptical orbit, to simplify the orbital rotation expression  $\frac{24 \pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$  during one revolution. So, it is  $\frac{6 \pi GM}{Ac^2(1-e)}$ .

실제 수성의 원일점과 이심률을 대입하여 보면,  
 Substituting the actual aphelion and eccentricity of Mercury,

```
VA> [24pi3.. (6.9817079d10 0.20563069)]
5.018881066308666e-7 (5.018881066308666e-5%)
```

로서 라디안 단위로 1회 공전시의 회전이다. 100년 간의 회전을 도분초 단위로 나타내면, 공전 주기 약 88일 에서

is the advance in radians per one revolution. If the rotation for 100 years is expressed in degrees, (the orbital period is about 88 days)

```
VA> [24pi3.. (6.9817079d10 0.20563069) * 365.24 / 87.96934 * 100 / pi * 180
* 60 * 60]
42.981249621737014
```

유명한 백년에 43초 이다.

It is the famous 43 arcseconds per a hundred years.

이제 실제 시뮬레이션 값과 비교하기로 한다. 시뮬레이션 시간 해상도는 원일점에서 0.0002 분이고 원일점 거리의 0.9999 배 이상의 데이터만 검사하며, 수성의 원일점과 이심률을 대입하면 다음과 같은 결과를 볼수있다.

Now I will compare it with real simulation values. The simulation time resolution is 0.0002 minutes at the aphelion, and only data that is 0.9999 times or more of the distance from the aphelion are examined. Substituting the aphelion and eccentricity of Mercury, I got the following result.

```
VA> (time(sim-th [0.0002 * minute] 0.9999 :Mercury 0.20563069))
24pi.. is 5.018881066308666e-7
simul result is 5.188544770626191e-7
```

Evaluation took:

```
1360.689 seconds of real time
1358.673620 seconds of total run time (1355.898595 user, 2.775025 system)
[ Run times consist of 13.117 seconds GC time, and 1345.557 seconds non-GC
time. ]
99.85% CPU
5,024,990,147,906 processor cycles
1,957,988,414,304 bytes consed
```

시뮬레이션의 특성상 이심률이 작을때에는 오차가 좀 큰편이다. 그러나, 3% 정도의 오차는 현재 기술 수준에서의 관측오차와 비슷한 수준이다. 좀더 정확한 계산은 좀더 촘촘한 시뮬레이션으로 가능하다.

Due to the nature of the simulation, the error is rather large when the eccentricity is small. However, the error of about 3% is similar to the observation limit in the current technology level. More accurate calculations are possible with tighter simulations.

```
VA> (time(sim-th [0.00005 * minute] 0.999999 :Mercury 0.20563069))
24pi.. is 5.018881066308666e-7
simul result is 5.061111510661374e-7
```

Evaluation took:

```
5420.779 seconds of real time
5415.746980 seconds of total run time (5408.317735 user, 7.429245 system)
[ Run times consist of 45.717 seconds GC time, and 5370.030 seconds non-GC
time. ]
99.91% CPU
20,018,838,997,606 processor cycles
7,794,107,470,816 bytes consed
```

조금 개선되는 것을 확인할수있다.

Some improvement is shown.

이심률이 클때 시뮬레이션 결과는 더 짧은 시간 동안에 더 정확해지는 경향을 보인다. 이는 시뮬레이션 오차가 주로 궤도의 반경에 축적되기 때문에 이심률이 작은 경우처럼 원일점 최대거리의 차이가 미세한 경우를 분석해야 할때 좀더 문제가 되기 때문이다. ( $\frac{1}{2}at^2 + vt$ 로 위치를 계산하는데  $a$ 항에 의한 보정이 실제 필요한 정도 보다 미세하게 작다. 따라서 시뮬레이션 오차는 공전 반경이 조금씩 늘어가는 것으로 축적되며, 대체로 최종값이 약간 커지는 경향을 갖게된다.)

When the eccentricity is large, the simulation results tend to be more accurate for shorter time. This is because the simulation error is mainly accumulated in the radius of the orbit, so it becomes more problematic when analyzing the case where the difference in the maximum distance to the aphelion is small, such as the case where the eccentricity is small. ( $\frac{1}{2}at^2 + vt$  is used in order to calculate the position, the correction by the term  $a$  is slightly smaller than the actual required amount. Therefore, the simulation error accumulates as the orbital radius gradually increases, and the final value is usually tends to be slightly larger.)

```
VA> (time(sim-th [0.005 * minute] 0.9999 :Mercury 0.920563069))
24pi.. is 5.018881066308663e-6
simul result is 5.0303364610700276e-6
```

Evaluation took:

```
74.401 seconds of real time
74.270915 seconds of total run time (74.141078 user, 0.129837 system)
[ Run times consist of 0.510 seconds GC time, and 73.761 seconds non-GC
time. ]
99.83% CPU
274,758,232,438 processor cycles
106,686,498,416 bytes consed
```

```
VA> (time(sim-th [0.05 * minute] 0.9999 :Mercury 0.9920563069))
24pi.. is 5.018881066308678e-5
simul result is 5.0148822758972275e-5
```

Evaluation took:

```
10.046 seconds of real time
10.045782 seconds of total run time (10.042452 user, 0.003330 system)
[ Run times consist of 0.074 seconds GC time, and 9.972 seconds non-GC
time. ]
100.00% CPU
37,098,409,233 processor cycles
14,491,439,104 bytes consed
```

어떤 이심률에서건 잘 일치하는 것을 확인할수있다.  
It shows good agreement at any eccentricity.

뉴턴 역학에 기반한 시뮬레이션에 간단한  $\vec{a} = \vec{a} + \frac{3}{c^2}(\vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v})$  라는 보정을 추가하는 것만으로 일반상대론의 개가로 불리웠던 결과를 시뮬레이션 할수있음을 확인하였다. 아무런 수학적인 잔재주없이 물리적인 개념을 시뮬레이션하는 것만으로 수성 궤도 운동의 정답을 찾은 것이다. 이제 이 보정의 물리적 의미를 확인해 보기로 한다.

It was confirmed that the result called the triumph of general relativity can be simulated just by adding a simple  $\vec{a} = \vec{a} + \frac{3}{c^2}(\vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v})$  correction to the simulation based on Newtonian mechanics. I found the answer to the motion of Mercury's orbit simply by simulating a physical concept without any mathematical tricks. Now I will check the physical meaning of this correction.



## 2.3. 맥스웰 중력 Maxwell Gravity

### 2.3.1. 맥스웰 방정식 Maxwell's Equations

맥스웰중력, 중력자기 또는 중력전자기 이론은 사실 매우 오래된 이론이다. 맥스웰 본인이 1865년(A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. 1865)에 이미 언급한 것으로 알려져 있다. 1800년대 말에는 새로운 중력이론을 만들려는 시도의 가장 주된 수단이었음에도 불구하고 별다른 성과는 내지못하다가 일반상대론의 등장 이후로는 잊혀진 이론이 된것이다. 별다른 이유는 없었다. 그저 일반상대론이 예측한 중력에 의한 시간지연을 예측 못했고, 수성의 근일점 이동을 설명 못했으며, 일반상대론이 중력에 의한 빛의 굴절을 예측하는 동안 그에 걸맞는 성과를 내지못한 뿐이다. 그러나, 수성의 근일점 이동에 대해서는 설명이 옳은가 그른가와는 별도로 올바른 수식은 1902년에 상대론보다도 빨리 발표되었고, 그 논리는 고전적인 지연된 역장 개념에 의한것이었으니 전혀 성과가 없었다고 볼수도 없으리라.

Maxwell gravity, gravitomagnetism or gravitoelectromagnetism is actually a very old theory. It is known that Maxwell himself had already mentioned it in 1865 (A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. 1865). At the end of the 1800s, it was mainstream means of trying to create a new theory of gravity, but it did not yield much result, and after the advent of general relativity, it became a forgotten theory. There was no other reason. It simply did not predict the time delay due to gravity predicted by general relativity, did not explain the perihelion precession of Mercury, and while general relativity predicted the gravitational refraction of light, it failed to match it. However, regardless of whether the explanation for Mercury's perihelion is correct or not, the correct formula was published earlier than the theory of relativity in 1902, and its logic was based on the classical retarded force field concept, so it cannot be said that there was no result at all.

맥스웰 중력의 기본 개념은 간단하다.

The basic concept of Maxwell gravity is simple.

그것은 맥스웰 방정식의 내용이 사실상 공간의 성질에 관한 기술이라는 사실에서 출발한다.

It starts from the fact that the content of Maxwell's equations are in fact the descriptions about the nature of space.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

여기서 공통되는 구조는  $\nabla \cdot \text{vector} = \text{scalar}$  와  $\nabla \times \text{vector} = \frac{\partial \text{vector}}{\partial \text{time}}$  인데, 이는 어떤 특정 힘의 성질이라기 보다는 시공간의 성질 그 자체로 볼수있다.

Here, the common structures are  $\nabla \cdot \text{vector} = \text{scalar}$  and  $\nabla \times \text{vector} = \frac{\partial \text{vector}}{\partial \text{time}}$ , which can be seen as the properties of space-time itself rather than the properties of any specific force.

즉 맥스웰 방정식의 기본골은 전자기력과 중력에서 공통으로 사용되는 구조이며 연관된 스칼라 양들만이 다른것이 아닐까 하는 생각이 맥스웰 중력의 발상이다. 이것은 특별히 따로 배울 필요도 없이 누구나 할수있는 자연스러운 생각이고 오래된 생각이다. 그러나, 과거의 사람들이 어떻게 수식화 했는지 흥내낼 필요는 없을 것이다. 그 분야에서 표준으로 따라할만한 성과는 아직 나오지는 않았기 때문이다. 그러니 생각만을 받아들이고 수식은 내 나름대로 변형해 보기로한다.

The idea of Maxwell gravity is, the basic form of Maxwell's equation is the structure commonly used in electromagnetic force and gravity, and the only the related scalar constants are different. This is a natural and old idea that anyone can think without any special learning. However, there will be no need to imitate how people of the past formulated it. This is because there has not yet been a result that can be followed as a standard in that field. So, I accepted only the ideas and tried to transform the formula in my own way.

그리고, 일반상대론 기반의 맥스웰 중력 이론도 존재하는데 (GEM으로 주로 알려진) 로렌츠 힘에 대한 부분에서 4배나 큰 힘을 예측해 버리기 때문에, 이글에서 소개하는 고전적인 맥스웰 중력 이론과는 양립이 불가능하다.

Also, there is a Maxwell gravity theory based on general relativity (mainly known as GEM), but it is incompatible with the classic Maxwell gravity theory introduced in this article because it predicts 4 times greater Lorentz force .

전자기력에서  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ 로 표기되는 유전율에 대응하는 중력 유전율은 G와 발음이 유사한  $\gamma$ 를 쓰기에는  $\gamma$ 에 다른 너무도 중요한 의미가 이미 부여되어 있으므로 알파벳 순서상 G의 위치에 있는  $\eta = -\frac{1}{4\pi G} = -1.1923790733063374e9 \text{ kg s}^2 \text{ m}^{-3}$ 로서  $\epsilon$ 를 대체하면 적당할듯 하고,  $\mu_0$ 는 적당한 대체가 없으므로 그냥  $\mu$  다음 순서인  $\nu_0 = \frac{1}{c^2 \eta} = -9.331345047580892e-27 \text{ m kg}^{-1}$ ,  $\vec{E}$ 는 당연히 가속도인  $\vec{a}$ 로 대체하는것이 직관적이며,  $\vec{B}$ 는 회전에 대응하므로  $\vec{\omega}$ 로 표기하기로 한다면, 중력에 대한 맥스웰 방정식은 전자기력에 대한 맥스웰 방정식과 정확히 같은 꼴이 된다.

The gravitational permittivity corresponding to the permittivity  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$  in the electromagnetic force is already given too important meaning to  $\gamma$  to use, which has a similar pronunciation to G, so the position of G in the alphabetical order  $\eta$  is appropriate to substitute  $\epsilon$  as  $\eta = -\frac{1}{4\pi G} = -1.1923790733063374e9 \text{ kg s}^2 \text{ m}^{-3}$ . Since  $\mu_0$  does not have a suitable substitution, the order after  $\mu$  is just  $\nu_0 = \frac{1}{c^2 \eta} = -9.331345047580892e-27 \text{ m kg}^{-1}$ . And of course, it is straightforward when  $\vec{E}$  is replaced with the acceleration  $\vec{a}$ . For the  $\vec{B}$  corresponds to rotation, if we choose to write with  $\vec{\omega}$ , then Maxwell's equation for gravity is exactly the same as Maxwell's equation for electromagnetic force.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{a} &= \frac{\rho_m}{\eta} \\ \nabla \times \vec{a} &= -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\omega} &= 0 \\ \nabla \times \vec{\omega} &= \nu_0 \vec{J}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}\end{aligned}$$

여기까지는 지금껏 알려진 맥스웰중력에 관한 이론들과 아무런 차이가 없다. 플레밍의 오른손 원손 법칙들은 중력에서도 그대로이다. 그러나 암페어의 오른나사의 법칙은 중력에서는 '왼나사의 법칙'이 되는 것이 네번째 식에 나타나있다.

So far, there is no difference from the theories of Maxwell gravity known so far. Fleming's right-handed and left-handed laws hold true for gravity. However, the fourth equation shows that Ampere's 'right-handed screw rule' becomes a 'left-handed screw rule' in gravity.

그리고, 로렌츠 힘에 관해서는 새로운 항이 등장하며 이는 전자기력에 대해서도 마찬가지여야 할것이다.

And, for the Lorentz force, a new term appears, which should be the same for the electromagnetic force.

### 2.3.2. 로렌츠 힘 The Lorentz Force

결과만을 먼저 보이면, 로렌츠 힘에 관한 식은 지금껏 알려진  $\vec{a}_T = \vec{a}_g + \vec{v} \times \vec{\omega}$  가 아니며, 느린 비상대론적인 속도에서의 식은

Showing the results first, the equation for the Lorentz force is not as the known  $\vec{a}_T = \vec{a}_g + \vec{v} \times \vec{\omega}$ , and the equation at slow non-relativistic velocities is

$$\vec{a}_T = \vec{a}_g + \frac{3}{2c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\omega}$$

이며, 빠른 상대론적인 속도에서의 식은,  
and, the equation at fast relativistic speed is,

$$\vec{a}_T = \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\omega}$$

이다.

전자기력에 대한 로렌츠 힘 역시 수정되어야 하며, 자유 입자에 대해서는  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  대신

The Lorentz force for the electromagnetic force must also be corrected, and for free particles it becomes

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} \vec{v} \times \vec{E} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

이 된다. instead of  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

추가된 항  $\frac{1}{c^2} \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  에 대하여 살펴 보자.

I will investigate the added term  $\frac{1}{c^2} \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ .

이 항은 사실 단일 항이 아니라  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  항과  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  두 항의 합이다.

This term is not a single term, It is the sum of two terms, those are  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  and  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ .

두항 모두 진행 방향과 항상 수직인 편향력이므로 라그랑지안이나 해밀토니안에 직접 영향은 미치지 않는다. 따라서 일반적인 퍼텐셜로부터 구하는 방식으로는 쉽게 유도되지 않을 것임을 알수 있다. 그리고, 이 식들은 수학적인 방식으로 유도한것이 아니라, 앞서의 시뮬레이션 결과를 최소한의 가정을 통해 설명할수 있는 식을 찾는 과정을 통해 발견한 것이다.

Both terms do not directly affect Lagrangian or Hamiltonian because they are always perpendicular to the direction of travel. Therefore, it can be seen that it will not be easily derived by a general method obtained from a potential. And, these equations were not derived in a mathematical way, but were discovered through the process of finding an expression that can explain the simulation results through the minimum assumptions.

그 과정을 순서대로 기술하면,  $\frac{3}{2c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  항의 보정항이 수성의 근일점 이동을 설명하는 것을 발견하였다. 그렇다면, 이항은 실제 힘일까? 아니면 일반상대론이 말하는 왜곡된 공간에 의한 가상의 현상일까? 실제힘으로 보는 것이 단순하고 유력한 해석임을 오컴의 면도날은 지지한다.

Describing the process in order, it was found that the correction term of the form  $\frac{3}{2c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  explains the perihelion advance of Mercury. If so, is this term a real force? Or is it just a virtual phenomenon caused by the distorted space of general relativity? Ockham's razor supports that seeing as a real force is the simple and promising interpretation.

실제힘이라고 볼때,  $\frac{1}{c^2} \vec{a}_g \times \vec{v}$ 의 항은 익숙한 형태이다. 전자기력에서의 경우 움직이는 전기장은 자기장으로 관측되며 그 식이 바로  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ 이다. 즉 전기장은 움직이는 물체에겐 자기장 성분이 포함된것으로 보인다는 전자기 유도의 기본적인 개념이다.

Considering as actual force, the term  $\frac{1}{c^2} \vec{a}_g \times \vec{v}$  is a familiar form. In the case of electromagnetic force, the moving electric field is observed as a magnetic field, and the equation is  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{v}$ . In other words, it is the basic concept of electromagnetic induction, an electric field appears to contain a magnetic field component in the views of a moving object.

그러나, 그동안 그 유도된 자기장이 움직이는 물체의 관성계에 속한 것인가 혹은  $\vec{E}$ 와  $\vec{v}$ 를 관찰하는 관성계에 속한 것인가 하는 질문은 간과 되어왔던 것으로 보인다. 그저 막연히 움직이는 물체의 관성계에 속하므로 그렇게 생성된 자기장과 움직이는 물체는 상호 작용하지 않는 것으로 착각되어 왔던 것 같다. 그러나 엄밀히 생각해보면  $\vec{E}$ 와  $\vec{v}$ 는 관찰자의 관성계에서 정의된 벡터가 아닌가? 그러니 그 상호작용으로 생성된 자기장 역시 관찰자의 관성계에서 기술된 자기장이므로 당연히 움직이는 물체와 상호 작용을 해서  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ 항을 만들어 내는 것이 오히려 자연스러운 것이다.

However, it seems that the question of whether the induced magnetic field belongs to the inertial frame of a moving object or it belongs to the inertial frame observing  $\vec{E}$  and  $\vec{v}$ , seems to have been overlooked. It seems to have been vaguely misunderstood as that the generated magnetic field and the moving object do not interact simply because they belong to the same inertial frame of a moving object. But, strictly thinking,  $\vec{E}$  and  $\vec{v}$  are vectors defined in the observer's inertial frame, aren't they? Therefore, the magnetic field generated by the interaction is also the magnetic field described in the observer's inertial frame, so, it is rather natural to interact with a moving object and to create term  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ .

그러나, 여기에는 한가지 문제가 발생한다. 그러한 과정이 되먹임되는 경우는 어떻게 되는 것인가? 모든 것이 관찰자의 관성계 기준이라면 움직이는 전기장은 자기장을 다시 움직이는 자기장은 전기장을 그 전기장은 다시 자기장을 생성하는 식으로 계속 되먹임 된다면? 그 결과를 간략히 표시하면  $1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} + \frac{v^6}{c^6} \dots = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2$ 만큼의 보정항을 곱하는 결과로 나타나게되며, 이는 명백히 관찰과 어긋나는 현상이다.

However, one problem arises here. What if that process is fed back? What if everything is based on the observer's inertial frame, the moving electric field generates the magnetic field, the moving magnetic field generates the electric field, the electric field generates the magnetic field again, and so on? A brief expression of the result is  $1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} + \frac{v^6}{c^6} \dots = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2$  as a correction terms of multiplying, which is clearly contrary to observation.

그러나, 앞서의 상호작용한 입력 벡터들이 관찰자 관성계 기준이었으니 그 결과물도 당연히 관찰자 관성계에 속해야 한다는 논리 역시 포기할것은 아니지않은가? 난감한 상황이기에 타협점을 찾아 보았다.  $\vec{E}$ 와  $\vec{B}$  그리고,  $\vec{a}$ 와  $\vec{g}$ 가 동등한 성분임을 포기하기로 하였다. 그 근거는 전기장과 중력가속도만이 발산(divergence)을 가지고 자기장들은 발산이 0인 것에서 찾을수있다고 보았다. 자기장들은 본질적으로 고유한 원천이 없으며 전기장이나 중력가속도장의 변화에 의하여 유도되는 장이라고 볼때. 전기장만이 실제의 장이고 자기장은 그 유도성분에 지나지 않는 가짜 장으로 볼수도 있으므로  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{g}$ 와 같은 자기장으로 생성된  $\vec{a}$ 는 다시 되먹여 지지 않는 규칙이 존재할 수도 있다고 보았다.

However, the above logic of 'Since the interacted input vectors belonged to the observer's inertial frame standard, the result must also belong to the observer's inertial frame' is also not something can give up, isn't it? It was a difficult situation, so I looked for a compromise. I have decided to give up  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$  and  $\vec{a}$  and  $\vec{g}$  that they are equivalent components. The rationale was that only electric fields and gravitational acceleration had divergence, and magnetic fields had 0 divergence. Since magnetic fields have no intrinsic source and are fields induced by changes in the electric field or the gravitational acceleration field, only the electric field is the real field and the magnetic field can be viewed as a fake field that is only an inductive component, it was considered that there may be a rule that a generated  $\vec{a}$  with a magnetic field such as  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{g}$  is not fed back.

이런 규칙을 추가하는 것만으로 해결이라고 볼수있을까? 배타원리의 예 처럼 논리적으로 모순만 아니라면 그런 가정을 도입할 수 있다고 생각한다. 달리 생각해보면 되먹임 항이 없는 현재의 로렌츠 힘 공식 역시 되먹임 금지 규칙에 지나지 않는 것이다. 그러나 조금 불만족스러운 것은 사실이다. 그런데, 다음에 다룰 토머스-위그너 회전에 의하여 유도된  $\frac{\gamma}{\gamma+1}$ 항에서도 비슷한 상황이 발생하는데 그 경우에는 이 문제에 대해 조금은 더 수학적인 이유가 제시되며, 자기유도 현상 역시 근본적으로 특수상대론적인 원인에서 기인한다면, 그 논리를 함께 사용할수있다고 생각한다.

Can this be a solution just by adding a rule? I think that such an assumption can be introduced as long as it is not logically contradictory as in the example of the exclusion principle. In other words, the current Lorentz force formula without a feedback term is also nothing more than a no-feedback rule. However, it is true that it is a little dissatisfying. However, a similar situation occurs in the  $\frac{\gamma}{\gamma+1}$  term induced by the Thomas-Wigner rotation, which will be discussed next. In that case, a slightly more mathematical reason is presented for this problem, and If the magnetic induction phenomenon is also fundamentally comes from special relativity, I think that logic can be used together.

로렌츠힘의 보정항  $\frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  중 아직 설명되지 않은 성분은  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ 이며 이 항은 특수상대론의 토머스-위그너 회전에 의하여 설명될수있다.

The unexplained component among the correction terms  $\frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  of the Lorentz force is  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ , and this term can be explained by the Thomas-Wigner rotation of special relativity.

### 2.3.3. 토머스-위그너 회전 Thomas-Wigner Rotation

토머스-위그너 회전은 두번의 임의 방향의 속도 변화에 의한 두번의 로렌츠 변환은 한번의 로렌츠변환에 한번의 회전변환을 결합한 것과 같다는 특수상대론적인 사실이다. 상당히 발견이 어려웠던 것으로 발견 자체는 1926년에 르웰린 토머스(Llewellyn Thomas)에 의하여 행해졌고 1939년에 이르러서야 유진 위그너(Eugene Wigner)에 의하여 수학적으로 유도되었다. 관련 수식이 매우 복잡하고 특히 분량 자체가 많아 수학적으로 다루기 쉽지 않은 현상임을 보여주는 역사이다. 물론 개념 자체도 좌표계의 회전이 지닌 물리적 의미를 직접 질문하는 시공간의 근원에 관한 것인지라 쉽지가 않다.

The Thomas-Wigner rotation is a special relativistic effect that two Lorentz transformations caused by two times of velocity changes in arbitrary directions are equivalent to one Lorentz transformation combined with one rotational transformation. It was quite difficult to discover, the discovery itself was made by Llewellyn Thomas in 1926, and was mathematically derived by Eugene Wigner only in 1939. This is a history that shows that the related formulas were very complex and especially the amount itself was not easy to deal with mathematically. Of course, the concept itself is not easy, too, because it is about the origin of space-time, which directly questions the physical meaning of the rotation of the coordinate system.

3차원에서의 로렌츠변환 행렬은 아래와 같다.

The 3 dimensional Lorentz transformation matrix is as follows.

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x \gamma & -\beta_y \gamma & -\beta_z \gamma \\ -\beta_x \gamma & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y \gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_y \beta_x}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z \gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_z \beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z \beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

이것을 매트릭스 함수로 준비한다.  $x, y, z$ 는 각기  $x, y, z$  축방향 속도이고  $c$ 는 당연히 광속이다.

Prepare this as a matrix function.  $x, y,$  and  $z$  are the velocities respectively on the  $x, y,$  and  $z$  axes direction, and  $c$  is, of course, the speed of light.

$$(6) \rightarrow \text{mt}(x, y, z, c) = \text{matrix} \left[ \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}, -\frac{x}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}, -\frac{y}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}, -\frac{z}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \right], \right. \\ \left. \left[ -\frac{x}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}, 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}, \right. \right. \\ \left. \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{xz}{x^2 + y^2 + z^2} \right], \left[ \frac{y}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}, \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}, \right. \\ \left. 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2} \right], \left[ -\frac{z}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}, \right. \\ \left. \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{xz}{x^2 + y^2 + z^2}, \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2}, 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right] \right]$$

Void

Type:

$$(7) \rightarrow \text{inverse}(\text{mt}(x, y, z, 1)) - \text{mt}(-x, -y, -z, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix(Expression(Integer))

Type:

어떤 속도에 대한 로렌츠 변환의 역변환과 그 반대 방향인 같은 속도의 로렌츠 변환은 같다는 사실로 입력오류를 확인해본다.

I checked the input error by the fact that the inverse transformation of the Lorentz transformation for a certain velocity and the Lorentz transformation of the same velocity in the opposite direction are the same.

그리고, 3차원에서의 상대론적 속도합 공식은 다음과 같다. 로렌츠 변환에서는 더하는 순서에 교환법칙이 성립하지 않으므로 주의해야하며, 순서는 속도  $U$ 에  $V$ 를 더하는 것이다.

And, the formula for the relativistic sum of velocity in 3D is as follows. In the Lorentz transformation, be careful because the commutative law does not hold for the order of addition. The order is to add  $V$  to the velocity  $U$ .

$$\vec{U} \oplus \vec{V} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{c^2}} \left( \left( 1 + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_U}{1 + \gamma_U} \vec{U} \cdot \vec{V} \right) \vec{U} + \frac{1}{\gamma_U} \vec{V} \right)$$

이를 각 성분별 함수  $UVX, UVY, UVZ$ 와 벡터 함수  $UV$ 로 준비한다. 벡터 함수 역시 더하는 순서는  $U$ 에  $V$ 를 더한것이다.

Prepare this with UVX, UVY, UVZ as each component function and UV as vector functions. For vector function, the order of addition is also U plus V.

$$\begin{aligned}
 (9) \rightarrow & \text{uvx}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c) = \left( \frac{1}{1 + \frac{ux \, vx + uy \, vy + uz \, vz}{c^2}} \left( 1 + \frac{1}{c^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}}}} (ux \, vx + uy \, vy + \right. \right. \\
 & \left. \left. uz \, vz) \right) \right) \left( ux + \sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}} \, vx \right), \\
 & \text{uvy}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c) = \left( \frac{1}{1 + \frac{ux \, vx + uy \, vy + uz \, vz}{c^2}} \left( 1 + \frac{1}{c^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}}}} (ux \, vx + uy \, vy + \right. \right. \\
 & \left. \left. uz \, vz) \right) \right) \left( uy + \sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}} \, vy \right), \\
 & \text{uvz}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c) = \left( \frac{1}{1 + \frac{ux \, vx + uy \, vy + uz \, vz}{c^2}} \left( 1 + \frac{1}{c^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}}}} (ux \, vx + uy \, vy + \right. \right. \\
 & \left. \left. uz \, vz) \right) \right) \left( uz + \sqrt{1 - \frac{ux^2 + uy^2 + uz^2}{c^2}} \, vz \right)
 \end{aligned}$$

LISP output:  
 (( ) ( ) ( ))

Tuple(Void)

Type:

$$(10) \rightarrow \text{uv}(ux, uy, vz, vx, vy, vz, c) = [\text{uvx}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c), \text{uvy}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c), \text{uvz}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c)]$$

Void

Type:

그리고, 회전행렬 함수 rotm은 다음과 같은 방법으로 구한다.

And, the rotation matrix function rotm is obtained in the following way.

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\text{Matrix}}{\text{Rotation}} \right) \left( \frac{\text{Matrix}}{U \oplus V} \right) &= \left( \frac{\text{Matrix}}{V \text{ boost}} \right) \left( \frac{\text{Matrix}}{U \text{ boost}} \right) \\
 \left( \frac{\text{Matrix}}{\text{Rotation}} \right) &= \left( \frac{\text{Matrix}}{V \text{ boost}} \right) \left( \frac{\text{Matrix}}{U \text{ boost}} \right) \left( \frac{\text{Matrix}}{U \oplus V} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$(11) \rightarrow \text{rotm}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c) = \text{mt}(vx, vy, vz, c) \text{mt}(ux, uy, uz, c) \text{mt}(-\text{uvx}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c), -\text{uvy}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c), -\text{uvz}(ux, uy, uz, vx, vy, vz, c), c)$$

Void

Type:

나의 컴퓨터로는 이 함수에 대한 완전한 기호 연산은 불가능하여, 수치연산으로 함수의 성질을 확인해 본다.

Complete symbolic calculation of this function was not possible with my computer, so I checked the properties of the function with numerical computation.

먼저 회전 행렬의 꼴을 살펴보면,

First, the form of the rotation matrix is,

$$\begin{array}{ccc} \text{Rotation around } x \text{ axis 축 회전} & \text{Rotation of } y \text{ axis 축 회전} & \text{Rotation of } z \text{ axis 축 회전} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

인데, 이것을 수치적으로 확인해보기 위하여 속도 (0.3 0.5 0)와 (-0.2 0.4 0)의 합성에 의한 회전을 각 축별로 살펴보기로 한다.

To confirm this numerically, I will examine the rotation by the combination of velocity (0.3 0.5 0) and (-0.2 0.4 0) for each axis.

(12) -> `digits(9)`

20

Type:

PositiveInteger

X 축 회전 X axis rotation

(13) -> `rotm(0, 0.3, 0.5, 0, -0.2, 0.4, 1)`

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.7\epsilon-9 & 0.9\epsilon-9 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3\epsilon-9 & 0.0 & 0.99244816 & -0.12266479 \\ 0.2\epsilon-8 & 0.0 & 0.12266479 & 0.99244816 \end{pmatrix}$$

Type:

Matrix(Float)

Y 축 회전 Y axis rotation

(15) -> `rotm(0.5, 0, 0.3, 0.4, 0, -0.2, 1)`

$$\begin{pmatrix} 0.999999999 & 0.1\epsilon-8 & 0.0 & 0.7\epsilon-9 \\ 0.2\epsilon-8 & 0.99244816 & 0.0 & 0.12266479 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.3\epsilon-9 & -0.12266479 & 0.0 & 0.99244816 \end{pmatrix}$$

Type:

Matrix(Float)

Z 축 회전 Z axis rotation

(17) -> `rotm(0.3, 0.5, 0, -0.2, 0.4, 0, 1)`

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.7\epsilon-9 & 0.9\epsilon-9 & 0.0 \\ 0.3\epsilon-9 & 0.99244816 & -0.12266479 & 0.0 \\ 0.2\epsilon-8 & 0.12266479 & 0.99244816 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Type:

Matrix(Float)

그리고,  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  을 확인해보면.

And check  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

(19) -> `0.992448162 + 0.122664792`

1.0

Type:

Float

비록 임의의 축방향은 아니지만 XYZ 각 축을 중심으로 한 회전변환임을 확인하였으니 이 관계는 어떤 축이라도 성립할 것임을 짐작할수있다. 즉, 두번의 로렌츠 변환은 한번의 상대론적 속도합 변환과 한번의 회전 변환임에 의심의 여지는 없다.

Although it is not an arbitrary axis direction, since I have confirmed that it is a rotational transformation around each XYZ axis, it can be assumed that this relationship will hold for any axis. That is, there is no doubt that the two Lorentz transformations are one relativistic velocity sum transformation and one rotational transformation.



이제 토머스-위그너 회전과  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ 의 관계를 살펴보기 위하여  $\gamma$ 에 대한 함수와  $\vec{a}_g \times \vec{v}$ 를 구할 함수를 마저 정의한다.

Now, to examine the relations between Thomas-Wigner rotation and  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ , the function for  $\gamma$  and defining function  $\vec{a}_g \times \vec{v}$  is to be prepared.

$$(20) \rightarrow \text{gamma}(v, c) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v(1)^2 + v(2)^2 + v(3)^2}{c^2}}}$$

Type:

Void

$$(21) \rightarrow \text{axv}(ax, ay, az, vx, vy, vz) = (ax vy - ay vx)$$

Type:

Void

좌표계의 회전은 진행 방향의 변화이므로 이를 편향력으로 해석하며, 이때 그 편향 가속도의 크기는  $v \frac{\sin d\theta}{dt}$ 로 정의 할수있으며, 이것이  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v}$ 와 같은지를 확인 한다.  $v$ 는 공통이므로,  $\frac{\sin d\theta}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{a} \times \vec{v}$ 인지를 확인 한다. 완전한 임의 방향 벡터는 기호계산이 쉽지않으므로 최대한 계산을 단순화 하되  $\vec{a}$ 와  $\vec{v}$ 의 사이의 각도는 모두 포함될수있도록,  $\vec{a}$ 는 y방향으로 고정 시키고,  $\vec{v}$ 는 XY평면 내의 임의의 벡터로 정 한다.

Since the rotation of the coordinate system is a change in the direction of travel, it is interpreted as a bias force, and the magnitude of the deflection acceleration can be defined as  $v \frac{\sin d\theta}{dt}$ . It is checked if this is equal to  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a} \times \vec{v}$ . Since  $v$  is common, check whether it is  $\frac{\sin d\theta}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{a} \times \vec{v}$ . Since it is not easy to symbolic calculate for completely arbitrary direction vectors, so it simplifies the calculation, but in order to include all angles between  $\vec{a}$  and  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  is fixed in the y direction, and  $\vec{v}$  is defined as an arbitrary vector in the XY plane.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ 이므로, 양변에 공통인 dt를 제거하고, 극한값이 양변 다 0 이므로, 유한해 지도록 스칼라  $dv$ 로 양변을 나누어 준,  $\frac{\sin d\theta}{dv} = -\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{d\vec{v} \times \vec{v}}{dv}$ 를  $dv \rightarrow 0$  이되는 극한값에서 확인하면 된다. 수치계산에서는 굳이 나누어 줄 필요없이 작아지는 값을 관찰하는 것으로 충분하다.

Since it is  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , remove dt common to both sides, and since the limit value is 0 on both sides,  $\frac{\sin d\theta}{dv} = -\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{d\vec{v} \times \vec{v}}{dv}$  is checked, which divided both sides by the scalar  $dv$  to make finite, at the limit value that becomes  $dv \rightarrow 0$ . In numerical calculations, it is sufficient to observe the decreasing value without needing to divide.

$$(22) \rightarrow \text{limit}(\text{rotm}(x, y, 0, 0, dy, 0, c)(3, 2) / dy, dy = 0)$$

$$[\text{leftHandLimit} = \text{"failed"}, \text{rightHandLimit} = \left( (-4 c x y^2 - 4 c x^3 + 8 c^3 x) \sqrt{-y^2 - x^2 + c^2} + x y^4 + (2 x^3 - 8 c^2 x) y^2 + x^5 - 8 c^2 x^3 + 8 c^4 x \right) / \left( (c y^4 + (2 c x^2 - 12 c^3) y^2 + c x^4 - 12 c^3 x^2 + 16 c^5) \sqrt{-y^2 - x^2 + c^2} + 5 c^2 y^4 + (10 c^2 x^2 - 20 c^4) y^2 + 5 c^2 x^4 - 20 c^4 x^2 + 16 c^5 \right)]$$

Type: Union(Record(leftHandLimit: Union(OrderedCompletion(Expression(Integer)), "failed"), rightHandLimit: Union(OrderedCompletion(Expression(Integer)), "failed")), ...)

$$(23) \rightarrow \text{limit} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\text{gamma}(uv(0, dy, 0, x, y, 0, c), c)}{\text{gamma}(uv(0, dy, 0, x, y, 0, c), c)} \text{axv}(0, dy, 0, x, y, 0) \frac{1}{dy}, dy = 0 \right)$$

$$[\text{leftHandLimit} = \frac{x}{c \sqrt{-y^2 - x^2 + c^2} - c^2}, \text{rightHandLimit} = -\frac{x}{c \sqrt{-y^2 - x^2 + c^2} + c^2}]$$

Type: Union(Record(leftHandLimit: Union(OrderedCompletion(Expression(Integer)), "failed"), rightHandLimit: Union(OrderedCompletion(Expression(Integer)), "failed")), ...)

얼핏 보기엔 다른 결과인것 같지만 아직 컴퓨터를 이용한 자동계산의 공식 축약은 완전하지 않으므로, 같은 오른편 극한끼리 더하여  $\sin d\theta + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} d\vec{v} \times \vec{v} = 0$  인지를 확인한다.

At first glance, it seems that the result is different, but the automatic formula abbreviation of the computer algebra system is not yet perfect, so by adding the same right side limits, check whether it is  $\sin d\theta + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} d\vec{v} \times \vec{v} = 0$ .

$$(26) \rightarrow (((-4*c*x*y^2-4*c*x^3+8*c^3*x)*sqrt(-y^2-x^2+c^2)+x*y^4+(2*x^3-8*c^2*x)*y^2+x^5-8*c^2*x^3+8*c^4*x)/((c*y^4+(2*c*x^2-12*c^3)*y^2+c*x^4-12*c^3*x^2+16*c^5)*sqrt(-y^2-x^2+c^2)+5*c^2*y^4+(10*c^2*x^2-20*c^4)*y^2+5*c^2*x^4-20*c^4*x^2+16*c^6))-(x/(c*sqrt(-y^2-x^2+c^2)+c^2))$$

0

Expression(Integer)

Type:

보기와는 달리 같은 식임을 알수있다. 이를 수치해석으로도 확인해본다. 복잡한 매트릭스 연산이라 유효 숫자가 큰편이 좋다.

Contrary to how it looks, it is seen that the formulas are the same. This will be also verified by numerical analysis. Because it is a complex matrix operation, it is better to use a large number of significant figures.

$$(27) \rightarrow \text{digits}(28)$$

9

PositiveInteger

Type:

$$(30) \rightarrow \text{rotm}(0.3, 0.5, 0, 0, 1.0e-16, 0, 1.1)(3, 2)$$

0.1341674556\_34E-16

Float

Type:

$$(31) \rightarrow \frac{1}{1.1^2} \frac{\text{gamma}(uv(0, 1.0e-16, 0, 0.3, 0.5, 0, 1.1), 1.1)}{\text{gamma}(uv(0, 1.0e-16, 0, 0.3, 0.5, 0, 1.1), 1.1)+1} \text{ax}(uv(0, 1.0e-16, 0, 0.3, 0.5, 0))$$

-0.1341674556\_3458703097\_54178928E-16

Float

Type:

나는 이 결과가 운동하는 물체에 대한 토마스-위그너 회전에 의한 효과가  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  로 표현되는 편향력과 동일하다는 것을 보여준다고 해석한다. 그런데 여기에서도 되먹임 문제가 발생한다. 앞서 전자기 유도의 경우처럼 무한 되먹임은 아니지만 움직이는 물체에 가속도가 작용하면 좌표계 회전에 의한 편향력이 발생한다면 얼핏 그것은 총 가속도에 적용 되어야 할것 같다. 그리되면 그 식은

I interpret this result as showing that the effect of Thomas-Wigner rotation on a moving body is equal to the bias force expressed in  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ . However, a feedback problem arises here as well. It is not an infinite feedback as in the case of electromagnetic induction, but if an acceleration is applied to a moving object, a bias force due to coordinate system rotation is generated, at first glance it seems that it should be applied to the total acceleration. Then the equation is

$$\begin{aligned} \vec{a}_t &= \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{a} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \left( \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{a} \right) \times \vec{v} \\ &= \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) + 1 \right) \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{v} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

가 되어야 하는데, 이것은 관찰된 결과를 전혀 설명할수없는 명백한 오류이다. 이 현상은 중력과 전자기력에 공통되어야 하며, 수많은 실험과 기술적인 응용이 행해진  $\vec{v} \times \vec{B}$ 항에 약간이라도 변수가 붙는다면 도저히 지금껏 발견되지 않았을 가능성이 없는 것이다.

This is an obvious error that cannot explain the observed results at all. This effect should be common to gravity and electromagnetic force, and if there is even a slight variable in the  $\vec{v} \times \vec{B}$  term, which has been subjected to numerous experiments and technical applications, there is no possibility that it has not been discovered yet.

난감한 상황이지만, 오히려 이것은 자기장 항에 토머스-위그너 회전항이 붙지않아야 하는 이유가 반드시 존재한다는 증거가 되므로, 다음의 설명을 뒷받침 하기도 한다.

Although this is a difficult situation, it is rather an evidence that there must be a reason why the Thomas-Wigner rotation term should not be attached to the magnetic field term, so it also supports the following explanation.

문제의 이 항은 토머스-위그너 회전, 즉 두번의 선형 로렌츠 변환에 의한 항이다.  $\vec{v}$ 로 움직이는 물체에 대한 편향력인  $\vec{a}_g$ 항은  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 항으로서  $d\vec{v}$ 에 의해 토머스-위그너 회전을 발생시키는 원인이 될 수있다. 그리고, 두번의 선형 로렌츠 변환은 그 속도합에 대한 한번의 로렌츠 변환과 한번의 회전 변환과 동등하다는 사실을 앞서 보였다. 이때, 속도합이 아닌 속도와 힘에 의한 가속도의 경우, 한번의 로렌츠 변환의 항에 이미 속도 항과 가속도 항이 적용되어 있으며, 한번의 회전변환 항은 추가적인 편향력에 대한 항이 되는 것이다. 그렇다면, 애초에 두번의 선형 변환이 아닌 한번의 선형변환과 한번의 회전에 이루어진 항이라면 어떻게 되는 것일까? 이 경우에는  $d\vec{v}$ 항이 애초에 없기에 추가항이 발생하지 않는다는 것을 알수있다.

This term in question is a term due to the Thomas-Wigner rotation, i.e., two linear Lorentz transformations. The  $\vec{a}_g$  term, which is the deflection force for an object moving with  $\vec{v}$ , is a  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  term and can cause Thomas-Wigner rotation by  $d\vec{v}$ . And, it was shown earlier that two linear Lorentz transformations are equivalent to one Lorentz transformation of the velocity sum and one rotational transformation. At this time, in the case of acceleration due to velocity and acceleration rather than the velocity sum, the velocity and acceleration terms are already applied to the one Lorentz transformation term, and the one rotational transformation term is a term for additional bias force. If so, what would happen if it consisted of one linear and one rotation transformation instead of two linear transformations from the start? In this case, it can be seen that the additional term does not occur because the  $d\vec{v}$  term does not exist in the first place.

그 관점에서  $\vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{a}_g$  식의 각 항을 보면 처음의  $\vec{a}_g$ 항만이  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 로서  $d\vec{v}$ 항을 가지고 있으며, 나머지 항들은 전부 좌표계의 회전과 관련한 항으로 볼수 있다는 것이다. 그렇게 본다면 나머지  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ 항과  $\vec{v} \times \vec{a}_g$ 항은 로렌츠 변환 두번이 아닌 한번의 로렌츠 변환과 한번의 회전에 정리되며, 한번의 로렌츠변환과 한번의 회전은 더이상 새로운 항을 만들어 내지않는다. 따라서,  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1}$ 항은 오직 처음의  $\vec{a}_g$ 항에만 적용 된다고 가정할수있다. 이는 자기장 항에서 모든 되먹임을 막아줄수 있으므로, 앞서의 무한 되먹임 문제에도 관련되어 있을 것으로 추측된다.

From that point of view, looking at each term of the  $\vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{a}_g$  expression, only the first  $\vec{a}_g$  term has a  $d\vec{v}$  term as  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , and all other terms seen as terms related to the rotation of the frame. In that point of view, the remaining terms  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  and  $\vec{v} \times \vec{a}_g$  are classified as one Lorentz transformation and one rotation instead of two Lorentz transformations, and the one Lorentz transformation and one rotation do not create new terms anymore. Therefore, it can be assumed that the  $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1}$  term applies only to the first  $\vec{a}_g$  term. Since this can block all feedbacks of the magnetic field term, it is presumed to be related to the previous infinite feedback problem.

$\vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ 항에 따른 힘은 얼핏 꽤 기묘한 힘으로 느껴지며 과연 실제로 존재할까 하는 의구심이 생길수있다. 그러나, 그중 일부는 토머스-위그너 회전에 기인한 힘이기에 특수상대론이 부정되지 않는 한 운동을 일으키는 힘의 종류에 관계없이 존재해야 함이 이미 확인된 힘이다. 그러므로, 그 힘은 존재한다면, 이 글에서 제시한 되먹임 방지 원리가 없다면 고에너지 입자의 자기장에 의한 원운동에서도 반드시 관찰되어야만 하는 힘이다. 그러나, 그런 보정항이 관찰된 사례를 나는 알지못한다.

The force according to the term  $\vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  seems to be quite a strange force at first glance, and one may wonder whether it actually exists. However, some of them are forces due to the Thomas-Wigner rotation, so unless special relativity is denied, it is forces that must exist regardless of the type of force that causes motion. Therefore, if the force exists, it is a force that must be observed even in the circular motion of high-energy particles in the magnetic field, if without the anti-feedback principle presented in this article. However, I do not know of any cases such a correction term has been observed.

그것은 이 글에서 제시한 되먹임 방지 논리가 필요하다는 증거라고 본다. 즉 새로운 보정항이 등장한것이 이상한 것이 아니라 애초에 고전적인 로렌츠 힘의 자기장 항에서 토머스-위그너 회전에 의한 보정이 전혀 필요가 없었던 것이 오히려 이상한 일이었고, 이 글을 통해 비로소 그 문제에 대하여 인식하게된 것이다.

I see it is the evidence that the anti-feedback logic presented in this article is necessary. In other words, it is not strange that a new correction term appeared, but it was rather strange that in the first place, there was no need for correction by Thomas-Wigner rotation in the classical Lorentz force magnetic field term. It is only through this article that it is revealed that the problem exists.

이미 중력이나 전자기력에

To gravity or electromagnetic force,

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{a}_g \\ \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\end{aligned}$$

반드시 필요한 특수상대론적 보정인 토머스 세차를 적용하면 최소한

It is already known that if applying Thomas precession, which is a necessary special relativity correction, it should be at least

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} \\ \vec{F} &= q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{v} \right) \\ &= q \left( \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{E} \times \vec{v} + \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \vec{v} \times \vec{B} \right)\end{aligned}$$

정도가 되어야하는 것은 이미 알려진 사실이며, 나는 그것을

What I have done is just I have tidied it up with

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{v} \times \vec{a}_g \\ \vec{F} &= q \left( \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{E} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{v} \times \vec{B} \right)\end{aligned}$$

로 깔끔하게 정리한 것일 뿐이니, 이런 관점에서 보면 새로운 공식에 대한 심리적인 저항은 불필요함을 알수있다.

From this point of view, it can be seen that psychological resistance to the new formula is unnecessary.

특수상대론적인 보정항이 반드시 존재해야 한다면, 내가 이 글을 통해 제시한대로 유도된 회전 항은 원래부터 회전항인 자기장 항과는 더이상 상호작용 하지 않는 것과, 그로인한 전체 되먹임 방지 규칙은 필수이다.

If a special relativistic correction term must exist, as I suggested in this article, the derived rotational term no longer interacts with the magnetic field term, which is the original rotational term, and therefore the total anti-feedback rule is essential.

결국 논리적인 정합이나 수성궤도를 자연스럽게 설명하는 관찰과의 정합성으로 볼때 나는 이 결과를 신뢰한다.

In conclusion, I trust this result in terms of the logical consistency, and in terms of the correspondence naturally explaining the observations of the Mercury's orbit

## 2.4. 중력장에 의한 빛의 굴절 Light Refraction by Gravity

중력장에 의하여 빛이 굴절되리라는 것은 이미 뉴튼에 의하여 1704년경 '광학' 책을 발간될때 부터 공식적으로 예측되고 있었다. 그러나, 당시에는 빛의 속도를 정확하게 몰랐기 때문에 정확한 값은 예측이 불가능하다가 19세기 전자기파의 발견 이후에야 비로서 본격적으로 계산되었다. 그러나 그 값은 잘 알려져 있는 대로 실제 값의 절반이다.

The fact that light would be refracted by the gravitational field had already been officially predicted by Newton when he published his book 'Optics' around 1704. However, since the speed of light was not accurately known at the time, the exact value was unpredictable, so it was calculated in earnest only after the discovery of electromagnetic waves in the 19th century. However, the value is, as is well known, half the actual value.

완전히 고전역학적인 계산 방법은 그 당시 부터 등속으로 움직이는 빛에 대해 적용하는 것은 정당하지 않다는 평이 있었는데. 마침 그 계산은 중력 자기장에 의한 추가 효과와 동일하므로 나중에 소개하기로한다.

There was an opinion that it was not justified to apply the completely classical mechanical calculation method to light moving at a constant velocity at that time. Incidentally, the calculation is the same as the additional effect by the gravitational magnetic field, so I will introduce it later.

우선 생각할수있는 정당한 계산 방법은 중력적색편이 현상에 의한 빛의 파장 변화에 의한 효과를 매질의 굴절율에 의한 효과와 동일하게 보는 것이다. 이것은 페르마의 원리와도 상통한다.

First, a reasonable computation method that can be considered is to view the effect of the change in the wavelength of light due to the gravitational redshift phenomenon as the same as the effect of the refractive index of the medium. This is also consistent with Fermat's principle.

태양 중심으로 부터  $r$  떨어진 거리에서  $r$  방향과 수직 즉 태양을 스쳐지나는 빛을 생각해 보자.

Consider light passing through the sun, perpendicular to the  $r$  direction at a distance  $r$  from the center of the sun.

태양주위의 공간은 무한한 층의 굴절율이 미세하게 차이나는 껍질들로 이루어져 있다고 볼수 있다. 이때, 그 굴절율은 적색편이식  $1 + \frac{GM}{rc^2}$ 로 나타낼수있다. 극좌표에서, 어떤 거리  $r$  에서 중심으로 부터 완전히 멀어지는 각을  $\phi=0$  그리고, 접선으로 스쳐지나는 각을  $\phi = \frac{\pi}{2}$ 라고 한다. 이때, 미세하게 굴절율이 변하는 평행한 층들에서  $n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 = n_3 \sin \phi_3 = \dots = n_n \sin \phi_n$ 이므로 최종 굴절각은 중간층을 무시하고  $n_1 \sin \phi_1 = n_n \sin \phi_n$  이다. 따라서, 최초의 굴절율과 마지막 굴절율만 알면 입사각  $\phi_i$ 에서의 출사각  $\phi_o$ 를 구할수있다.

The space around the sun can be seen as composed of infinite layers of shells with slightly different refractive indices. In this case, the refractive index can be expressed by the redshift formula of  $1 + \frac{GM}{rc^2}$ . In polar coordinates, let  $\phi=0$  for the angle completely going away from the center at a certain distance  $r$ , and  $\phi = \frac{\pi}{2}$  for the angle touching the tangent. At this time, since  $n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 = n_3 \sin \phi_3 = \dots = n_n \sin \phi_n$  in parallel layers in which the refractive index is slightly changed, the final refraction angle is  $n_1 \sin \phi_1 = n_n \sin \phi_n$  ignoring the intermediate layer. Therefore, if only the first refractive index and the last refractive index are known, the exit angle  $\phi_o$  at the incident angle  $\phi_i$  can be obtained.

이때, 어떤 거리  $r$ 에서  $\phi$  각으로 출발한 빛이  $d\theta$  와  $dr$  떨어진 다음층의 경계면에서 굴절된다 고할때( $n_1 \sin \phi_1 = n_n \sin \phi_n$ 이므로), 입사각  $\phi_i = \phi - d\theta$  라고 하면,  $\tan(\phi - d\theta) = \frac{r d\theta}{dr}$  이 된다. 그리고, 입사 굴절율은  $1 + \frac{GM}{rc^2}$  이고 출사 굴절율은  $1 + \frac{GM}{(r+dr)c^2} = 1 + \frac{GM}{\left(r + \frac{r d\theta}{\tan(\phi - d\theta)}\right) c^2}$  이다. 그러므로, 경계면에서 굴절된 출사각  $\phi_o$  를 구하면,

At this time, assuming that the light that starts at an angle  $\phi$  at a certain distance  $r$  is refracted at the interface of the next layer away from  $d\theta$  and  $dr$  (since  $n_1 \sin \phi_1 = n_n \sin \phi_n$ ), the incident angle is  $\phi_i = \phi - d\theta$ , then  $\tan(\phi - d\theta) = \frac{r d\theta}{dr}$ . The incident refractive index is  $1 + \frac{GM}{rc^2}$  and the exit refractive index is  $1 + \frac{GM}{(r+dr)c^2} = 1 + \frac{GM}{\left(r + \frac{r d\theta}{\tan(\phi - d\theta)}\right) c^2}$ . Therefore, the refracted emission angle  $\phi_o$  at the interface is

$$\left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right) \sin \phi_i = \left(1 + \frac{GM}{\left(1 + \frac{d\theta}{\tan(\phi - d\theta)}\right) rc^2}\right) \sin \phi_o$$

$$\phi_o = \sin^{-1} \left( \frac{\left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right) \sin(\phi - d\theta)}{\left(1 + \frac{d\theta}{\tan(\phi - d\theta)}\right) rc^2} \right)$$

$d\theta$  에 대하여 급수전개를 하면,

doing a series expansion with respect to  $d\theta$ ,

$$(33) \rightarrow \text{series} \left( \text{asin} \left( \frac{\left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right) \sin(\phi - d\theta)}{\left(1 + \frac{d\theta}{\tan(\phi - d\theta)}\right) rc^2} \right), d\theta = 0 \right)$$

$$\text{asin}(\sin(\phi)) - \frac{c^2 r \cos(\phi)}{(c^2 r + GM) \sqrt{-\sin(\phi)^2 + 1}} d\theta + O(d\theta^{11})$$

Type: UnivariatePuiseuxSeries(Expression(Integer), dθ,

θ)

이 계산에서는 CAS의 실제 출력이 너무 길어 그대로가 아니며,  $d\theta^2$  항 이하는 표시하지 않았다. 정리하면,

In this calculation, the actual output of the CAS is too long and not as this is, and the after  $d\theta^2$  term is not indicated. In short,

$$\phi_o = \phi - \frac{rc^2}{GM + rc^2} d\theta$$

중력이 존재하지 않을때  $\phi_o = \phi - d\theta$  이므로 중력에 의한 굴절각은

In the absence of gravity,  $\phi_o = \phi - d\theta$ , so the angle of refraction due to gravity is

$$\left(1 - \frac{rc^2}{GM + rc^2}\right) d\theta = \frac{GM}{GM + rc^2} d\theta$$

이다. 이것의 적분은 빛의 굴절이 거의 없을때  $r_\theta = \frac{r}{\cos \theta}$  로 근사할 수있으므로,

Since  $r_\theta = \frac{r}{\cos \theta}$  when there is little refraction of light, the integral of this can be approximated as

$$(34) \rightarrow \text{integrate}\left(\frac{GM}{GM + \frac{r}{\cos(\theta)} c^2}, \theta = 0 \dots \frac{\pi}{2}, \text{"noPole"}\right)$$

$$\left[ \left( c^2 r \log\left( \frac{(-4 GM c^8 r^4 + 12 G^3 M^3 c^4 r^2 - 8 G^5 M^5) \sqrt{-c^4 r^2 + G^2 M^2} - c^{12} r^6 + 9 G^2 M^2 c^8 r^4 - 16 G^4 M^4 c^4 r^2 + 8 G^6 M^6}{(c^8 r^4)} \right) + 2 \pi \sqrt{-c^4 r^2 + G^2 M^2} - c^2 r \log(-c^4 r^2 + G^2 M^2) \right) / \left( 4 \sqrt{-c^4 r^2 + G^2 M^2} \right), \left( (2 c^4 r^2 + 2 GM c^2 r) \operatorname{atan}\left( \frac{GM \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) - c^2 \pi r \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} \operatorname{abs}\left( \frac{\sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^2 r - GM} \right) + (c^2 \pi r + GM \pi) \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) / \left( (2 c^2 r + 2 GM) \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) \right]$$

Type: Union(f2: List(OrderedCompletion(Expression(Integer))), ...)

중력이 약할때의 근사값이므로 G나 M으로 급수전개를 한다. 결과의 두 번째 해에 불필요한 적분 상수가 없으며

Since it is an approximation when gravity is weak, it is expanded with G or M. There are no unnecessary integral constants in the second solution of the result,

$$(35) \rightarrow \left( \left( (2c^4 r^2 + 2GM c^2 r) \operatorname{atan}\left( \frac{GM \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) - c^2 \pi r \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} \operatorname{abs}\left( \frac{\sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^2 r - GM} \right) + (c^2 \pi r + GM \pi) \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) / \left( (2c^2 r + 2GM) \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) \right)$$

Type: Expression(Integer)

abs 항을 정리하여 축약하면,  
If the abs term is abbreviated,

$$(36) \rightarrow \frac{2(c^4 r^2 + GM c^2 r) \operatorname{atan}\left( \frac{GM \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) - c^2 \pi r \frac{c^4 r^2 - G^2 M^2}{c^2 r - GM} + (c^2 \pi r + GM \pi) \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{(2c^2 r + 2GM) \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}$$

$$\frac{2c^2 r \operatorname{atan}\left( \frac{GM \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) + \pi \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} - c^2 \pi r}{2 \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}$$

Type: Expression(Integer)

$$(37) \rightarrow \text{series}\left(\frac{2c^2 r \operatorname{atan}\left( \frac{GM \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}{c^4 r^2 - G^2 M^2} \right) + \pi \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2} - c^2 \pi r}{2 \sqrt{c^4 r^2 - G^2 M^2}}, G = 0\right)$$

$$\frac{\pi \sqrt{c^4 r^2} - c^2 \pi r}{2 \sqrt{c^4 r^2}} + \frac{M}{c^2 r} G - \frac{M^2 \pi}{4 c^2 r \sqrt{c^4 r^2}} G^2 + \frac{2 M^3}{3 c^6 r^3} G^3 - \frac{3 M^4 \pi}{16 c^6 r^3 \sqrt{c^4 r^2}} G^4 + \frac{8 M^5}{15 c^{10} r^5} G^5 - \frac{5 M^6 \pi}{32 c^{10} r^5 \sqrt{c^4 r^2}} G^6 + \frac{16 M^7}{35 c^{14} r^7} G^7 - \frac{35 M^8 \pi}{256 c^{14} r^7 \sqrt{c^4 r^2}} G^8 + \frac{128 M^9}{315 c^{18} r^9} G^9 - \frac{63 M^{10} \pi}{512 c^{18} r^9 \sqrt{c^4 r^2}} G^{10} + O(G^{11})$$

Type: UnivariatePuiseuxSeries(Expression(Integer), G, 0)

첫항은 0이고 둘째 항이 근사값이며,  $\frac{GM}{c^2 r}$ 이다. 이는 스쳐지나는 지점으로 부터 무한대까지의 굴절, 즉 전체 굴절의 절반이므로, 전체 굴절은  $\frac{2GM}{c^2 r}$ 이며 이는 실제 측정치의 절반이다. 이는 중력 굴절을 특수상대론적으로 분석하더라도 중력이 약할때에는 고전적인 결과와 비슷하며 실제값의 절반 밖에 되지않는다는 것을 보여준다.

The first term is 0 and the second term is an approximation, which is  $\frac{GM}{c^2 r}$ . Since this is half of the total refraction, i.e., the refraction from the touching point to infinity, the total refraction is  $\frac{2GM}{c^2 r}$ , which is half of the actual measurement. This shows that even if the gravitational refraction is analyzed by special relativity, it is only half the actual value, it is similar to the classical result when the gravitational force is weak.

그렇지만 아직 일반상대론이 필요하지는 않다. 중력 자기 현상을 아직 고려하지 않은 것이다.

However, general relativity is not yet necessary. Gravitomagnetism has not been taken into account yet.

중력 자기 현상을 빛에 적용할때에는  $\frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  대신  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  식을 사용해야 한다.  $\gamma$  관련 항은 움직이는 관성계가 가속될때 유도되는 항인데, 빛의 속도로 움직이는 관성계는 없으며 빛은 가속되지도 않기 때문이다. 순수하게 회전에 관한 항만이 적용된다.

When applying gravitomagnetism to light, the expression  $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$  should be used instead of  $\frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v}$ . The  $\gamma$ -related term is a term derived when a moving inertial frame is accelerated. Because there is no inertial frame moving at the speed of light, and light can not be accelerated, the only pure rotational terms can be applied.

그리고,  $\vec{v}$ 는 당연히  $\vec{c}$ 이다. 그러므로, 공간의 회전속도는  $\vec{\omega} = \frac{1}{c^2} \vec{a}_g \times \vec{v} = \frac{GM}{r^2 c^2} \hat{r} \times \vec{c}$ 이다. 이때, 빛이  $\theta = -\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}$ 이고 중심과 가장 가까운 거리는  $r$ 인 거의 직선인 경로를 따라 진행한다고 가정하면,  $\hat{r} \times \vec{c}$ 의 스칼라 값은  $\cos \theta \times c$ 이고  $r_\theta = \frac{r}{\cos \theta}$ 이므로  $\omega = \frac{GM}{c^2 \left(\frac{r}{\cos \theta}\right)^2} \cos \theta c = \frac{GM}{r^2 c} \cos^3 \theta$ 이다. 빛이  $d\theta$  구간을 통과하는 시간  $dt = \frac{1}{c} \frac{r_\theta}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{c} \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$  이므로, 중력자기장에 의한 빛의 굴절각의 매우 약한 중력에서의 극한은

And  $\vec{v}$  is, of course,  $\vec{c}$ . Therefore, the rotation speed of space is  $\vec{\omega} = \frac{1}{c^2} \vec{a}_g \times \vec{v} = \frac{GM}{r^2 c^2} \hat{r} \times \vec{c}$ . At this time, assuming that the light travels along a nearly straight path of  $\theta = -\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}$  and the closest distance to the center is  $r$ , Since the scalar value of  $\hat{r} \times \vec{c}$  is  $\cos \theta \times c$  and  $r_\theta = \frac{r}{\cos \theta}$ , Therefore  $\omega = \frac{GM}{c^2 \left(\frac{r}{\cos \theta}\right)^2} \cos \theta c = \frac{GM}{r^2 c} \cos^3 \theta$ . Since the time is  $dt = \frac{1}{c} \frac{r_\theta}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{c} \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$  for light to pass through the  $d\theta$  section, the limit of the refraction angle of light due to the gravitomagnetic field in very weak gravity is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{GM}{r c^2} \cos \theta d\theta = \left[ \frac{GM}{r c^2} \sin \theta \right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2GM}{r c^2}$$

이다.

그런데, 이 수식들은 고전 중력이론에서 빛을 일정한 광속으로만 움직이는 입자로 간주하고 중력에 의해서는 방향만 변한다고 가정하면 구해지는 수식들과 동일하기에 고전 중력이론으로도 중력자기장 이론만 조합한다면 마찬가지로 수식을 구할수 있지만, 고전 중력이론으로 구하는 것의 이론적인 정당성에 대해서는 논란이 많았다고하니 그런 방법도 있다는 것만 언급해둔다.

Beside, these equations are the same as the equations found in the classical gravitational theory, assuming that light is a particle moving only at a constant speed of light and that only the direction is changed by gravity. The same formula can be obtained if only the theory of gravitomagnetism is combined with the classical gravity theory, but it is said there have been many controversies about the theoretical justification of finding it with the classical gravity theory. So it is just mentioning that there is such a way.

결국 특수상대론에 기반한 중력 적색편이에 의한 빛의 굴절각 계산과 중력 자기현상에 의한 빛의 굴절각 계산을 합친 값은



In the end, the sum of the calculation of the refraction angle of light due to gravitational redshift based on special relativity and the calculation of the refraction angle of light due to the gravitomagnetic effect becomes

$$\frac{4GM}{rc^2}$$

이 되어 실제 관측값을 설명하게된다.  
which explains the actual observation value.

### 3. 결론 CONCLUSION

나는 일반상대론의 이론적 결함같은 것을 찾을 생각은 애초에 없었고 앞으로도 아마 없을 것이다. 나는 그 이론의 필연성이 보이기 전까지는 그냥 관심이 없을뿐이다. 나는 그저 전자기학과 특수상대론의 가능성만으로도 충분하다고 느끼고 있었고, 그 가능성을 본격적으로 탐구해 본 결과, 일반상대론의 기초 근거로 제시되었던 중력 적색편이, 수성의 근일점 이동, 중력에 의한 빛의 굴절 현상에 대하여 보다 단순하고 설득력있는 이론적 대안을 제시함으로써 간접적으로 일반상대론에 대한 반론을 하겠다는 최초의 목적을 달성한것으로 생각한다.

I never intended to find any theoretical flaws in general relativity, and probably never will. I'm just not interested in it until the necessity of the theory is shown. I just felt that it is sufficient with the possibilities of electromagnetism and special relativity. And as a result of exploring the possibilities in earnest. I was able to present a simpler and more persuasive theoretical alternative for the bases of the general relativity those the gravitational redshift, Mercury's perihelion advance, and the gravitational refraction of light. Therefore, I think that the initial purpose of indirectly opposing general relativity has been achieved.

물론 지난 백년간 더 많은 일반상대론과 결어 맞는 증거들도 쌓여왔겠지만, 그중 혹 내가 이 글에서 제시한 이론으로는 설명 불가능한 일반상대론 만으로 설명가능한 현상이 있는 지에 대해서는 앞으로 지켜보아야할 일 일것이다. 그러나, 출발한 근거가 이젠 사라졌으니, 그 이후의 증거들에 대해서는 그것들이 일반상대론의 주전원같은 만능이론의 면모에 기댄 확장편향의 소산은 아닌지 다시 살펴볼 필요는 있을것이다. 일반상대론은 과거의 다른 이론에 의해서도 추측가능한 사실에 대해서 그 시점에서 그럴듯한 수치를 얼마든지 만들어 낼수있다는 것은 입증했지만, 아무런 일반상대론 기반의 새로운 이론은 등장시키지 못했으며, 일반상대론의 가장 유망한 응용인 우주론 역시 파탄 상태이다.

Of course, over the past hundred years, more evidence consistent with general relativity may have been accumulated, but it remains to be seen whether there is a phenomenon that can be explained only by general relativity, which cannot be explained by the theory I have presented in this article. However, since the starting ground of the general relativity has now disappeared, it is necessary to re-examine whether they are the result of confirmation bias based on its aspect of universal theory such as the epicycle. Although general relativity has shown that it could produce the plausible figures at that time for facts that could be inferred by other theories in the past, general relativity has not produced any new theories based on it. And cosmology which was the most promising application of general relativity, is also in a state of collapse.

그리고, 나는 이 과정을 통하여 단순히 일반상대론에 대하여 반론만을 한 것이 아니고, 새로운 물리법칙을 찾아 내었다.

And, through this process, I did not simply object to the general relativity, but found a new law of physics.

맥스웰 중력이라는 생각 자체는 새로운 것은 없지만,

The idea of Maxwell gravity itself is nothing new,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{a} &= \frac{\rho_m}{\eta} \\ \nabla \times \vec{a} &= -\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\omega} &= 0 \\ \nabla \times \vec{\omega} &= \nu_0 \vec{J}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \\ \eta &= -\frac{1}{4\pi G} \\ &= -1.1923790733063374e9 \text{ kg s}^2 \text{ m}^{-3} \\ \nu_0 &= \frac{1}{c^2 \eta} \\ &= -9.331345047580892e-27 \text{ m kg}^{-1}\end{aligned}$$

중력과 전자기력에서의 로렌츠 힘에 대한 수정

but, the correction of the Lorentz force in the gravity and electromagnetism

$$\begin{aligned}\vec{a}_r &= \vec{a}_g + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{a}_g \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\omega} \\ \vec{F} &= q \left( \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \vec{v} \times \vec{E} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{B} \right)\end{aligned}$$

은 이 글의 작업을 통해 '부수적'으로 얻었다기에는 큰 물리학 상의 새로운 성취일 것이다. 특히 전자기력에 대한 수정은 현재의 기술 수준으로도 충분히 즉각적으로 확인할 수 있는 부분이다.

would be a new big achievement in physics to have been obtained 'incidentally' through the work of this article. In particular, the correction of electromagnetic force is a part that can be tested immediately enough even with the current level of technology.

그리고, 그 과정을 통해 경험한 공간의 성질에 대한 고찰은 앞으로의 힘에 대한 탐구에 도움이 될 것으로 생각한다.

And, I think that the considerations of the nature of the space experienced through this process will be helpful in the future exploration about force.

그리고, 지난 백여년간, 적어도 최근 심화되어가는, 지나치게 자칭 '고등수학'에만 매몰되어, 내가 보기엔 그다지 아름답지도 우아하지도 않은 '황제의 새로운 옷'에 취한, 수학적인 잔재주에만 몰두하고 물리적인 감각이나 직관 같은 면에 대해서는 잊어만가는 이론물리학 연구 풍토에 반하여, 핵심만 잘 선택하면 기초적인 수학만을 구사할 수 있어도 충분히 자연의 심오한 새로운 면모를 발견해 낼 수 있다는 것을 보였다는 사실에 대하여서는 개인적으로 매우 즐겁게 생각하는 바이다. 자연을 감상하는 방법이 다양하다는 사실은 항상 즐거운 일이다.

People are too obsessed self-proclaimed 'advanced mathematics', and intoxicated with 'the emperor's new clothes' which is neither very beautiful nor elegant in my opinion, and focus only on mathematical dexterity and forgetting about senses and intuitions of physics. These are the atmosphere of theoretical physics research that has been intensifying for the past century or at least recently. Against it, I personally very pleased about the fact that I have shown that if the core was well choosed, it is possible to discover a new profound aspect of nature with only basic mathematics. It's always fun to know that the ways are various to appreciate the nature.

## 참고문헌

YoungCheol, Kim. 2020. "The Principles of the Celestial Sphere," March. <https://vixra.org/abs/2003.0598>.

Behera, Harihar, and P. C. Naik. 2003. "A Flat Space-Time Relativistic Explanation for the Perihelion Advance of Mercury." *ArXiv:Astro-Ph/0306611*, June. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0306611>.

Mashhoon, Bahram. 2001. "Gravitoelectromagnetism." *Reference Frames and Gravitomagnetism*, July, 121–32. [https://doi.org/10.1142/9789812810021\\_0009](https://doi.org/10.1142/9789812810021_0009).

"Lorentz Transformation." 2021. In *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lorentz\\_transformation&oldid=1046942737](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lorentz_transformation&oldid=1046942737).

kycgit. (2021) 2021. *Kycgit/Gsimm*. Common Lisp. <https://github.com/kycgit/gsimm>.

### 노트 1. 프로그램 vector-arithmetic.lisp

```
(defpackage #:vector-arithmetic
  (:nicknames :va)
  (:use "COMMON-LISP")
  (:shadow "+")
  (:shadow "-")
  (:shadow ".*")
  (:shadow ".*")
  (:shadow "x*"))

(in-package #:vector-arithmetic)

(defgeneric .+ (addend1 addend2))

(defmethod .+ ((x number) (y number))
  (cl:+ x y))

(defmethod .+ ((x vector) (y vector))
  (map 'vector_λ (cl:+ x y)))

(defmethod .+ ((x list) (y list))
  (map 'list_λ (cl:+ x y)))

(defgeneric .- (addend1 addend2))

(defmethod .- ((x number) (y number))
  (cl:- x y))

(defmethod .- ((x vector) (y vector))
  (map 'vector_λ (cl:- x y)))

(defmethod .- ((x list) (y list))
  (map 'list_λ (cl:- x y)))

(defgeneric .* (addend1 addend2))

(defmethod .* ((x number) (y number))
  (cl:* x y))

(defmethod .* ((x vector) (y vector))
  (apply 'cl:+_λ (map_λ 'list 'cl:*_λx_λy)))

(defmethod .* ((x number) (y vector))
  (map 'vector_λ (lambda_λ(z) (*_λx_λz))_λy))

(defmethod .* ((x vector) (y number))
  (map 'vector_λ (lambda_λ(z) (*_λy_λz))_λx))
```

```

(defgeneric ./ (addend1 addend2))

(defmethod ./ ((x number) (y number))
  (cl:/ x y))

(defmethod ./ ((x number) (y vector))
  (map 'vector (lambda (z) (/ (ux z)) uy))

(defmethod ./ ((x vector) (y number))
  (map 'vector (lambda (z) (/ (uz y)) ux))

(defgeneric X* (x y))

(defmethod X* ((x vector) (y vector))
  (vector (-(* (aref x 1) (aref y 2)) (* (aref x 2) (aref y 1)))
          (-(* (aref x 2) (aref y 0)) (* (aref x 0) (aref y 2)))
          (-(* (aref x 0) (aref y 1)) (* (aref x 1) (aref y 0))))

```

## 노트 2. 프로그램 shnv1.lisp

```

(eval-when (:compile-toplevel :load-toplevel :execute)
  (setq *read-default-float-format* 'double-float)
  (ql:quickload "trivial-arguments")
  ;;(require 'sb-introspect)
  ;;(ql:quickload "trivial-arguments")
  ;; (ql:quickload :yacc)
  ;; (ql:quickload :lispbuilder-lexer))
  ;;(eval-when (:compile-toplevel :load-toplevel :execute)
  ;; (ql:quickload :lispbuilder-lexer))
  ;;
  ;;(use-package '#:yacc)
  ;;(char-code #\√) ;;#x221a
  ;;π #x03c0
  ;;* #xd7
  ;;÷ #xf7

(defconstant %e 2.718281828459045d0)
(defconstant %c 299792458d0) ; m / s
(defconstant %G 6.67430e-11) ; m^3 / Kg s^2
(defconstant %N0 0.933198821833744e-26) ; m/Kg
(defconstant %mp 1.67262171e-27) ; Kg
(defconstant %mn 1.67492729e-27) ; Kg
(defconstant %me 9.1093837015e-31) ; Kg
(defconstant %ee 1.602176634e-19) ; C
(defconstant %Mo 1.9885e30) ; Kg
(defconstant %GMo 1.327124e20) ; m^3/s^2
(defconstant %ly (* %c 365.25 60 60 24)) ; m
(defconstant %au 149597870700d0) ; m
(defconstant %pc (* (/ 1 (TAN (/ PI (* 60 60 180)))) %AU)) ; m
(defconstant π pi)

(defparameter *symbol-table*
  (list
    '+ ( :s-type op :t-op + :arg-n 2)
    '- ( :s-type op :t-op - :arg-n 2)
    '* ( :s-type op :t-op * :arg-n 2)
    'x ( :s-type op :t-op * :arg-n 2)
    '/ ( :s-type op :t-op / :arg-n 2)
    '÷ ( :s-type op :t-op / :arg-n 2)

```

```

'<'(:s-type op :t-op < :arg-n 2)
'<='(:s-type op :t-op <= :arg-n 2)
'>'(:s-type op :t-op > :arg-n 2)
'>='(:s-type op :t-op >= :arg-n 2)
'='(:s-type op :t-op = :arg-n 2)
'/='(:s-type op :t-op /= :arg-n 2)
'0-'(:s-type op :t-op 0- :arg-n 1)
'1/'(:s-type op :t-op 1/ :arg-n 1)
'√'(:s-type op :t-op sqrt :arg-n 1)
'inDeg'(:s-type op :t-op deg :arg-n 1)
'toDeg'(:s-type op :t-op radTodeg :arg-n 1)
'e^'(:s-type op :t-op exp :arg-n 1)
'^'(:s-type op :t-op expt :arg-n 2)
'ln'(:s-type op :t-op log :arg-n 1)
'log'(:s-type op :t-op log :arg-n 2)))

(defun deg (x) (* pi (/ x 180)))
(defun radTodeg (x) (* 180 (/ x pi)))
(defun 1/ (x) (/ 1 x))
(defun 0- (x) (- 0 x))
(defun arg-num? (s)
  (let ((n (getf (getf *symbol-table* s) :arg-n)))
    (if n n (loop for i in (arg:arglist s)
                  until (or (equal i '&rest) (equal i '&key) (equal i
'&optional) (equal i '&body)) count i))))
(defun to-sym (s) (let ((op (getf (getf *symbol-table* s) :t-op))) (if op op s)))
(defun is-op? (s) (if (equal 'op (getf (getf *symbol-table* s) :s-type)) 't
  (if (symbolp s) (if (fboundp s) 't nil) nil)))

(defun to-S-exp (in &optional t-stk)
  (labels ((list? (x) (and (listp x) (not (equal 'quote (car x)))) (not (equal 'function
(car x))))))
    (if (null in) (return-from to-S-exp (reverse t-stk)))
    (if (is-op? (car in))
      (let ((o-stk (list (pop in))))
        (loop while o-stk do
          (loop while (is-op? (car in)) do (push (pop in) o-stk))
          (let ((arg (if (list? (car in)) (to-S-exp (pop in)) (list (pop in)))))
            (loop while (< (length arg) (arg-num? (car o-stk))) do (push (pop t-stk)
arg))
            (push (push (to-sym (pop o-stk)) arg) t-stk)
            (if o-stk (push nil in))))
        (if (list? (car in)) (push (to-S-exp (pop in)) t-stk) (push (pop in) t-stk)))
      (to-S-exp in t-stk)))

(defun rmv-p (in)
  (labels ((list? (x) (and (listp x) (not (equal 'quote (car x)))) (not (equal 'function
(car x))))))
    (slist? (x) (and (list? x) (= 1 (length x)) (not (is-op? (car x))))))
    (loop while (slist? in) do (setq in (car in)))
    (if (list? in) (map 'list 'rmv-p in) in)))

(defun add-l (in)
  (labels ((rlist? (x) (and (listp x) (< 1 (length x)) (not (is-op? (car x))))))
    (if (not (rlist? in)) (return-from add-l in))
    (push 'list in)
    (map 'list 'add-l in)))

(defmacro shn (&rest in) (add-l (rmv-p (to-S-exp in))))

(defun l-brace (stream char)
  (declare (ignore char))

```

```
(cons 'shn(read-delimited-list#\)\_stream\_t))
(set-macro-character #\[ #'l-brace)
(set-macro-character #\] (get-macro-character #\]))
```

```
;(shn 1 + 2),
;(shl +(1 2 3 4) * sin cos +(2 3 4))
```

```
#+(or)
```

```
"
```

규칙 1. 리스트를 기반으로 하며 모든 데이터는 리스트다.

규칙 2. 리스트의 지나간 항들은 스택에 저장되는 것으로 작용하는 스택기반 연산이며 연산자 우선순위는 없다.

규칙 3. 각 함수 항의 기본 끝은 '함수명(인수리스트...)' 의 끝을 가진다.

규칙 4. ()안의 인수 항 역시 리스트이며 모든 규칙이 재귀적으로 적용된다.

규칙 5. 인수 항의 필요한 최소수 보다 부족한 인수들은 스택으로 부터 읽어 왼쪽으로부터 채운다.

예 1 +(2) -> +(1 2)

규칙 6. ((a)) = (a) = a 이다. atom은 없으며 길이 1인 리스트는 괄호를 표시하지 않는다.

예 1 + (2) = 1 + 2 (이 규칙은 필수는 아니다.)

Rule 1. It is based on list and all data are list.

Rule 2. It acts as a stack-based machine that assumes that past items are stored on the stack, and there is no operator precedence.

Rule 3. The basic form of a function and its arguments are the form of 'function-name(argument-list...)'.

Rule 4. Argument terms in () are also lists, and all rules are applied recursively.

Rule 5. When arguments are less than the required minimum number of argument terms, they are read from the stack and filled from the left.

Ex. 1 +(2) -> +(1 2)

Rule 6. ((a)) = (a) = a. There are no atoms, and a list of length 1 does not display parentheses.

Ex. 1 + (2) = 1 + 2 (This rule is not essential.)

알고리즘에서 널리 사용되는 다음 중위 표현식을 각 표현식으로 써보면..

(1 + 2 + 3 + 4) \* sin( cos( 2 + 3 + 4)) : 중위 표현식(infix notation)

(\* (+ 1 2 3 4) (SIN(COS(+ 2 3 4)))) : PN(polish notation) 폴란드 표기법 (lisp)

1 2 + 3 + 4 + 2 3 + 4 + cos sin \* : RPN(reverse polish notation)역폴란드 표기법

(forth, factor, 공학용 계산기)

등이 있다.

이 표기법은 기본적으로 M-expression을 바탕으로 stack 개념을 도입한 표기법이다.

이 표기법으로 앞의 계산을 표기하면 가장 표준은 다음과 같다.

+(1 2 3 4) \* sin cos +(2 3 4)

간결함과 가독성을 강조함.

If we write the following infix expression that widely used in algol family as each expression..

(1 + 2 + 3 + 4) \* sin( cos( 2 + 3 + 4)) : infix notation

(\* (+ 1 2 3 4) (SIN(COS(+ 2 3 4)))) : PN(polish notation) Polish notation (lisp)

1 2 + 3 + 4 + 2 3 + 4 + cos sin \* : RPN (reverse polish notation) Reverse Polish notation (forth, factor, scientific calculator) etc.

This notation is basically based on the M-expression that introduces the concept of stack.

If we express the previous calculation in this notation, the most standard is:

+(1 2 3 4) \* sin cos +(2 3 4)

An expression that emphasizes simplicity and readability.

(1 2 3 4)+ (2 3 4)+ cos sin \* : ()을 도입한 RPN은 이 표기법과 대등한 축약성을 보인다.

: A RPN with () shows abbreviation-ability equivalent to this notation.

뿐만 아니라 새로운 표현식을 다른 각 표현식과 비슷한 꼴로도 쓸수가 있다.

한번에 동일한 수식을 모아서 비교하면...

In addition, this new notation can be written similarly to other notations.

Comparing the same formulas at once...

`+(1 2 3 4) * sin cos +(2 3 4)` : 가장 특색있는 새 표현식 The most distinctive new expression

`(1 + 2 + 3 + 4) * sin(cos(2 + 3 + 4))` : infix & 새 표현식에서도 수정없이 같은 의미 same meaning without modification in infix & new expression

`1 + 2 + 3 + 4 * sin cos(2 + 3 + 4)` : 위의 규칙 6에 의한 괄호 축약. Parenthesis abbreviations by Rule 6 above.

`(* (+ 1 2 3 4) (SIN (COS (+ 2 3 4))))` : PN  
`*(+ (1 2 3 4) sin( cos( +(2 3 4))))` : 최대한 비슷한 새 표현식 new expression that is as similar as possible

`*(+(1 2 3 4) sin cos +(2 3 4))` : 규칙 6에 의한 괄호 축약 Parenthesis abbreviations by Rule 6

`(shn ( 1 2 3 - 3 4 *)+)`

`1 2 + 3 + 4 + 2 3 + 4 + cos sin *` : RPN

`1 2 +() 3 +() 4 +() 2 3 +() 4 +() cos() sin() *()` : 새 표현식이 RPN꼴에 대해서만 비슷하게 표현하면 약간 더 길어진다.

nil기호를 따로 정하면 조금 간결하게 할수있다. The new expression will be slightly longer only when it is for the similarly expression of RPN form. It can be little more concise by specifying the nil symbol separately.

하나의 표현 방식이 지금껏 알려진 모든 수식 표현 방식의 특징을 그대로 따라할수 있다는 유연함과 논리적으로 명확하게

기술될 수 있으면서도 가장 간결하게 수식을 쓸 수 있다는 세가지 특징이 이 수식 표현 방식의 장점이다.

The three advantages of this notation are the flexibility that one notation can follow the characteristics of all known formula notations as it is, and the ability to write formulas in the most concise way while being logically and clearly described.

```
(shn +(1 2 3) 4 5 6 sin *(2 + 3 2 3) 2 (2 3) 2 * 3 sin 30)
(lpnl (1 2 3)+ 4 5 6 (2 3 + 2 3)* sin 2 (2 3) 2 3 * 30 sin)
(((+ 1 2 3) 4 5 6 (SIN (* (+ 2 3) 2 3)) 2 (2 3) (* 2 3) (SIN 30)))
(1 + 2 + 3 4 5 6 sin((2 + 3)* 2 * 3) 2 (2 3) 2 * 3 sin 30)
(+ (1 2 3) 4 5 6 sin *(2 + 3 2 3) 2 (2 3) 2 * 3 sin 30)
(LIST (+ 1 2 3) 4 5 6 (SIN (* (+ 2 3) 2 3)) 2 (LIST 2 3) (* 2 3) (SIN 30))
(6 4 5 6 -0.9880316 2 (2 3) 6 -0.9880316)
+(1 2 3) 4 5 6 sin *(2 + 3 2 3) 2 (2 3) 2 * 3 sin 30
+(1 2 3) 4 5 6 sin *(2 + 3 2 3) 2 (2 3 (1 2 3)) 2 * 3 sin 30)
(list (+ 1 2 3) 4 5 6 (sin (* (+ 2 3) 2 3)) 2 '(2 3 (1 2 3)) (* 2 3) (sin 30))
[ 1+2+3, 4, 5, 6, sin((2+3)*2*3), 2, [2, 3, [1, 2, 3]], 2*3, sin(30)]
[1+2+3,4,5,6,np.sin((2+3)*2*3),2,[2,3,[1,2,3]],2*3,np.sin(30)]
```

```
['+ 'list 'sin reduce map '(1 2 3 4 5 6)]
[loop (for i from 1 to 100 sum i * i)]
```

```
(defmacro defuns (n x &rest body) (cons
'defun (cons (cons (if (listp x) x (list x)) body)))
[defuns (test x x + 1 sin ())]
(defmacro lam (x b &rest c) (let ((y (if (listp x) x (list x)))) ((lambda (y ,b) ,@c)))
[lam ((x y) prog1( (sin x + y) (print x) (print y)) 2 3)]
[lam (x if (listp x '+ apply x ^ 2 x ^ 2) '(1 2 3 4))]
```

**노트 3.** 프로그램 gsimm.lisp

```

(load "vector-arithmetic.lisp")
(in-package :va)
(load "shnv1.lisp")

(defconstant minute 60d0)
(defconstant hour [ minute * 60])
(defconstant day [ hour * 24])
(defconstant year [ day * 365.2422])
(defconstant 0v #(0.0d0 0.0d0 0.0d0))

(defstruct pobj m r v a)
(defstruct tpsy t psy)

(defparameter *p-data*
  (list :Mercury (list :m 3.302d23 :ap 6.9817079d10 :e 0.20563069)
        :Venus (list :m 4.8685d24 :ap 1.08941849d11 :e 0.00677323)
        :Earth (list :m 5.9736d24 :ap 1.52097701d11 :e 0.016710219)
        :Mars (list :m 6.4171d23 :ap 2.492d11 :e 0.094)
        :Jupiter (list :m 1.8986d27 :ap 8.165208d11 :e 0.048775)
        :Saturn (list :m 5.6846d26 :ap 1.503983449d12 :e 0.05415060)
        :Uranus (list :m 8.6832d25 :ap 3.006389405d12 :e 0.04716771)
        :Neptune (list :m 1.0243d26 :ap 4.536874325d12 :e 0.00858587)))

(defparameter *ts* 0d0)
(defvar df-r)
(defvar *seed*)

;(defun v.v (z) (reduce #'cl:+(map_ 'vector (lambda(x) (* x x)) z)))
;(defun v.v (z) (let ((a (aref z 0)) (b (aref z 1)) (c (aref z 2))) (+ (* a a)(* b
b)(* c c))))
(defun v.v (z) (apply '+(map_ 'list (lambda(x) (* x x)) z)))

(defun calc-e (ap ec)
  [sqrt(*(1 - ec %G %Mo) / ap)])

(defun 24pi3.. (ap ec)
  [(6 pi %G %Mo) / *(ap %c ^ 2 1 - ec)])

(defun init-seed (name ec)
  (let ((ra (getf (getf *p-data* name) :ap)))
    (setq *seed*
          (make-tpsy
            :t 0d0
            :psy (list (make-pobj :m %Mo :r 0v :v 0v :a 0v)
                      (make-pobj :m 1 :r (vector ra 0d0 0d0) :v (vector 0d0 (calc-e
ra ec) 0d0) :a 0v))))))

(defun initparameters (dt name)
  (setq *ts* dt
        df-r [getf (getf (*p-data* name) :ap) ^ 2]))

(defun next-d (idt)
  (labels ((cp (x) (make-pobj :m (pobj-m x) :r (pobj-r x) :v (pobj-v x) :a 0v)))
    (let* ((ndt (make-tpsy :t 0 :psy (mapcar #'cp_ (tpsy-psy_idt))))
           (i (car (tpsy-psy ndt))) (j (cadr (tpsy-psy ndt)))
           (dr [pobj-r i .- pobj-r j]) (ag [dr v.v dr ./ ^ 1.5 .* %G .* pobj-m i])
           (br [v.v pobj-r cadr tpsy-psy ndt]) (nts [*ts* br / df-r * ^ 0.75]))
      (setf (tpsy-t ndt) (+ (tpsy-t idt) nts))
      (setf (pobj-a j) [ag pobj-v j X* ag X* pobj-v j .* 1.5 %c .+ ./ ^ 2.0])
      (setf (pobj-r j) [pobj-r j pobj-v j .+ .* nts 0.5 .* pobj-a j nts .+ .* ^ 2])
      (setf (pobj-v j) [pobj-v j pobj-a j .+ .* nts ])
      ndt)))

```



```

(defun next-dn (idt)
  (labels ((cp (x) (make-pobj :m (pobj-m x) :r (pobj-r x) :v (pobj-v x) :a 0v)))
    (let* ((ndt (make-tpsy :t 0 :psy (mapcar #'cp (tpsy-psy idt))))
           (i (car (tpsy-psy ndt))) (j (cadr (tpsy-psy ndt)))
           (dr [pobj-r i .- pobj-r j]) (ag [dr v.v dr ./ ^ 1.5 .* %G .* pobj-m i])
           (br [v.v pobj-r cadr tpsy-psy ndt]) (nts [*ts* br / df-r * ^ 0.75]))
      (setf (tpsy-t ndt) (+ (tpsy-t idt) nts))
      (setf (pobj-a j) ag)
      (setf (pobj-r j) [pobj-r j pobj-v j .+ .* nts 0.5 .* pobj-a j nts .+ .* ^ 2])
      (setf (pobj-v j) [pobj-v j pobj-a j .+ .* nts ])
      ndt)))

(defun sim-wn (dtime sptime tstime planet ec outfile)
  (initparameters dtime planet)
  (init-seed planet ec)
  (let (sdata (nxtt sptime) (xin *seed*))
    (setq sdata
      (loop while (< nxtt tstime)
        do (loop for x = xin then (next-dn x)
          while (< (tpsy-t x) nxtt) finally (setq xin x nxtt [nxtt + sptime]))
        collect xin))
    (push *seed* sdata)
    (with-open-file
      (stream outfile
        :direction :output ; opens for output
        :if-exists :supersede ; overwrite ; replace existing file
        :if-does-not-exist :create)
      (format stream "set_title \"~%")
      (format stream "plot '-' title 'lw3 with lines~%")
      (loop for i in sdata do
        (let ((x (pobj-r (cadr (tpsy-psy i))))))
          (format stream "~A,~A~%" (aref x 0) (aref x 1))))
      (close stream))))

(defun sim-w (dtime sptime tstime planet ec outfile)
  (initparameters dtime planet)
  (init-seed planet ec)
  (let (sdata (nxtt sptime) (xin *seed*))
    (setq sdata
      (loop while (< nxtt tstime)
        do (loop for x = xin then (next-d x)
          while (< (tpsy-t x) nxtt) finally (setq xin x nxtt [nxtt + sptime]))
        collect xin))
    (push *seed* sdata)
    (with-open-file
      (stream outfile
        :direction :output ; opens for output
        :if-exists :supersede ; overwrite ; replace existing file
        :if-does-not-exist :create)
      (format stream "set_title \"~%")
      (format stream "plot '-' title 'lw3 with lines~%")
      (loop for i in sdata do
        (let ((x (pobj-r (cadr (tpsy-psy i))))))
          (format stream "~A,~A~%" (aref x 0) (aref x 1))))
      (close stream))))

(defun sim-th (dtime el planet ec)
  (initparameters dtime planet)
  (init-seed planet ec)
  (setq el [el * getf(getf(*p-data* planet) :ap)])
  (let (sdata rdata)

```

```

(setq sdata
  (loop for x = *seed* then (next-d x)
        while (< el
              (let ((rx (aref (pobj-r (cadr (tpsy-psy x))) 0))
                    (ry (aref (pobj-r (cadr (tpsy-psy x))) 1)))
                  [sqrt +(rx ^ 2 ry ^ 2)]))
            finally (return x)))
(setq sdata
  (loop for x = sdata then (next-d x)
        while (> el
              (let ((rx (aref (pobj-r (cadr (tpsy-psy x))) 0))
                    (ry (aref (pobj-r (cadr (tpsy-psy x))) 1)))
                  [sqrt +(rx ^ 2 ry ^ 2)]))
            finally (return x)))
(setq rdata
  (loop for x = sdata then (next-d x)
        while (< el
              (let ((rx (aref (pobj-r (cadr (tpsy-psy x))) 0))
                    (ry (aref (pobj-r (cadr (tpsy-psy x))) 1)))
                  [sqrt +(rx ^ 2 ry ^ 2)]))
            collect (pobj-r (cadr (tpsy-psy x)))))
(setq rdata (reduce #'.+_rdata))
(format T "24pi.._is_~d~%" (24pi3.. (getf (getf *p-data* planet) :ap) ec))
(format T "simul_result_is_~d~%" [atan(aref(rdata 1) / aref(rdata 0))]))

```