Числофизика: Число Скьюза
(Physics Number: Skewes Number)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract
Монография от 24.03.2016 г., в которой автор приходит к выводу, что число Скьюза может быть порядка 8*10^60 (именно столько планковских времен помещается в возрасте Вселенной, которой 13,8 млрд лет).

A monograph dated 03.24.2016, in which the author comes to the conclusion that the Skuse number can be of the order of 8 * 10 ^ 60 (this is how many Planck times fit in the age of the Universe, which is 13.8 billion years old).

Простые числа (**2**, **3**, **5**, **7**, **11**, **13**, **17**,…) – это главный объект изучения *теории чисел* (сложнейшего раздела высшей математики). Уже хотя бы потому, что из простых чисел строится бесконечное множество всех прочих (*составных*) натуральных исел (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, … – у них более чем два целых делителя). В своей работе «Гауссовы слагаемые» (опубликованной на портале «Техно-сообщество России») я рассказал, как вычислить *количество* (K) простых чисел на отрезке [2; N] с весьма высокой точностью (работая с ещё относительно несложной функцией).

Это можно сделать с помощью функции Li(N) [читается как «ли от N»] – это так называемый *сдвинуты интегральный логарифм*. Великий Гаусс, вероятно, первым указал, что $\boldsymbol{K \approx \mathrm{Li}(N)}$, поэтому слагаемые (ln$N$)^$k$/$k$/$k$! (при $k \to \infty$ из них «набирается» числовое значение K) я назвал *гауссовы слагаемые* (у них нет названия в общеизвестной теории чисел). При этом я говорил, что для простых чисел **2**, **3**, **5**, **7** имеем $K > \mathrm{Li}(N)$, а вот далее вплоть до ***числа Скьюза*** (N_c) всегда (для всех N) выполнятся неравенство $\boldsymbol{K < \mathrm{Li}(N)}$, и, согласно работе H. J. J. te Riele (1987 год), $N_c \leq$ e^(e^6,75) ≈ 8,185·10^370 ≈ 10^371.

Уже опубликовав «Гауссовы слагаемые», я обнаружил, что в Википедии (в статье «Число Скьюза») дописали следующее: «К 2016 году известно, что ***число Скьюза заключено между* 10^19 и 1,39822·10^316**». Причем *нижняя граница* числа Сьюза (N_c ~ 10^19) лично для меня сейчас выглядит маловероятной (что «подтверждают» и мои исследования ниже). А в статье «Функция распределения простых чисел» есть таблица, где для $N = 10^{24}$ указана такая разница двух параметров: $\mathrm{Li}(N) - K = 17.146.907.278$, как видим этой разнице ещё весьма далеко от нуля. Правда, в поисках числа Скьюза компьютеру до сих пор не под силу проверить разницу $\mathrm{Li}(N) - K$ *у всех* целых чисел «хотя бы» в окрестности числа $N = 10^{19}$ (справа от него). Да и сам просмотр чисел по порядку на компьютере многие математики не признают за доказательство (см. в Википедии статью «Проблема четырёх красок»). А вот новая *верхняя граница* для числа Скьюза ($N_c \leq 1{,}39822 \cdot 10^{316}$) – мне кажется весьма реалистичной и заставила меня сделать… собственную («инженерную») оценку числа Скьюза. Что из этого получилось – об этом и говорится ниже.

1. Относительная погрешность

Первым делом мы рассмотрим точность ***формулы Чебышёва***:

$$\mathbf{K = N/(\ln N - 1)}. \tag{1.1}$$

Пафнутий Львович Чебышёв (1821 – 1894) – величайший русский математик в 1848 г. доказал, что именно *единица* (а не 1,08366, как полагал французский математик А.М. Лежандр) – повышает точность одной из главных формул *теории чисел*: $\mathbf{K \sim N/\ln N}$ (об этом – ниже). Поэтому, для удобства нашего разговора, формулу (1.1) я и назвал формулой Чебышева (её никак не называют в теории чисел).

Пусть $K_p = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$ – это *реальный* порядковый номер простого числа P в ряде всех простых чисел: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101,** … (первые 26-ть простых чисел, без пропусков). Так вот, в формуле Чебышева параметр K – это *приблизительное* количество простых чисел на отрезке $[2; N]$, где N – правая граница отрезка (натуральное число). Если в формулу Чебышева в качестве N подставлять по порядку простые числа ($N = P$), то мы получим ряд значений (это всё – вещественные числа): $K \approx -6{,}5;\ 30{,}4;\ 8{,}2;\ 7{,}4;\ 7{,}9;\ 8{,}3;\ 9{,}3;\ldots$, и для каждого из них можно вычислить ***относительную погрешность*** (ОП) формулы Чебышева следующим (общепринятым) образом:

$$\mathbf{ОП \equiv (K_p - K)/K = K_p/K - 1}. \tag{1.2}$$

Действуя выше указанным образом, мы получим ряд значений ОП, которые будем откладывать на графике (лиловые точки на рис. 1.1) – это и есть графическое изображение точности формулы Чебышева.

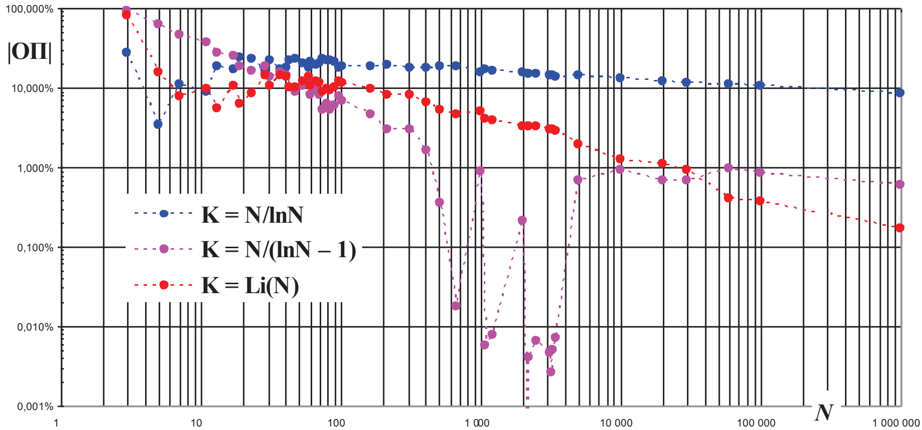

Рис. 1.1. *Модуль* относительной погрешности (ОП) трех формул теории чисел

Почему в начале натурального ряда в качестве правой границы N отрезка [2; N] лучше брать именно простые числа P? Дело в том, что когда в качестве правой границы мы берем *простое число* P (т.е. $N = P$), то формула Чебышева выдает результат, наиболее близкий к реальному количеству K_p (с некоторой ОП), а иначе – ОП формулы Чебышева станет ещё больше. Оценим это увеличение ОП. Согласно теории чисел, расстояние между (произвольно взятыми) соседними простыми числами (P_i и P_{i+1}) может достигать такой величины:

$$\mathbf{(P_{i+1} - P_i)_{max} \approx 0{,}7574\cdot(\ln P_i)\hat{}2}. \qquad (1.3)$$

Поэтому, когда мы берем в качестве правой границы отрезка [2; N] – произвольное целое число N, то старшее (наибольшее) простое число P на этом отрезке может «не дотягивать» до границы (может быть меньше числа N): $P \approx N - 0{,}7574\cdot(\ln N)\hat{}2$. При этом для границы N формула Чебышева нам дает $K = N/(\ln N - 1)$, а вот для границы P мы получим $K^* = P/(\ln P - 1)$. В итоге нетрудно получить такую оценку:

$$\mathbf{K \le K^* + 0{,}7574\cdot(\ln N)\hat{}2/(\ln N - 1)} \quad \text{или} \quad \mathbf{K \le K^* + \ln N}. \qquad (1.4)$$

Значит, если в качестве границы мы берем произвольное число N, то формула Чебышева вполне может завысить результат на величину, максимально равную, грубо говоря, ln$N$. Очевидно, что с ростом отрезка [2; N] – всё это становится не существенным. Поэтому в качестве границы отрезка я брал первые 26-ть простых чисел (вплоть до P = **101**) – подряд (без пропусков), а далее брал такие простые числа: **1.009, 10.007, 100.003, 1.000.003, 10.000.019, 100.000.007** (иногда чуть «разбавляя» их другими простыми числами). Ну а далее в качестве границы брал, вообще говоря, произвольные большие числа вплоть до $N = 10$^308 (после данного числа компьютер отказывается вычислять – так уж он устроен разработчиками ПК).

Модуль ОП (обозначается так: |ОП|) – это значение ОП без учета знаков «минус», которые формула Чебышева порождает у 251-го простого числа N, то есть у них ОП < 0 (поскольку $K_р < K$). И только у 61-го простого числа ($N = 283$) впервые ОП > 0 ($K_р > K$), а затем ОП начинает «хаотично» колебаться около нуля (у ОП «хаотично» меняются и знаки «+», «–»). В связи с этим можно указать некий «***остров точности***» у формулы Чебышева, например, так: между простыми числами $N = 283$ и $N = 19421$ находятся 404 простых числа, у которых |ОП| < 0,5%, хотя ожидаемые нами значения ОП – от 3% до 0,8% (см. лиловые точки на графике на рис. 1.1). Этот «остров точности» угадывается на графике в виде уходящего вниз «провала» лиловых точек. Затем, начиная с 493-го простого числа $N = 3529$, у формулы Чебышева уже *всегда* будет только положительная относительная погрешность: ОП > 0 (поскольку $K_р > K$). Здесь я говорю «всегда», так как не встретил в *теории чисел* никаких сведений о смене знака у разницы $K_р – N/(\ln N – 1)$ при $N > 3529$ (что эта разница якобы может поменять свой знак с «плюса» на «минус» после некого числа N). Это важное для нас свойство мы назовем *стабильностью* формулы Чебышева (однако это – не факт).

Согласно моим исследованиям отрезка [2; 10^24] относительную погрешность (ОП) формулы $K = N/(\ln N – 1)$, за пределами её «острова точности», можно оценить такой эмпирической формулой:

$$\textbf{ОП} \equiv (K_р – K)/K \approx 1{,}8702/(\ln N)^{2{,}1394}. \qquad (1.5)$$

По этой формуле, например, при $N = 1{,}855\cdot10$^61 мы получим ОП ~ 0,0047%, а при $N = 10$^308 – получим ОП ~ 0,000157%. А теперь поясняю, чем замечательно число 1,855·10^61 (почему выбрал его).

Ниже (в гл. 3) я приведу (увы, ошибочное) «доказательство» того, что ***число Скьюза*** ($N_с$) может оказаться примерно таким числом: $\boldsymbol{N_с \approx}$ **1,855·10^61**. А пока приведу полезную цитату из статьи «Планковская длина» (см. Википедию): «Примерный радиус наблюдаемой Вселенной (46 миллиардов световых лет или 4,4·10^26 м) равен **2,7·10^61** планковских длин». Таким образом, возможно, что ***радиус наблюдаемой Вселенной, выраженный в планковских длинах, – это и есть… число Скьюза***.

Если в формуле Чебышева отбросить «всего лишь»… единицу, то получим предельно лаконичную ***базовую формулу*** мира чисел:

$$K_Б = N/\ln N. \quad (1.6)$$

В теории чисел доказано такое неравенство (левая часть – при $N \geq 7$):

$$K_Б < K_р < 1{,}25506 \cdot K_Б. \quad (1.7)$$

Согласно аналогичным исследованиям отрезка [2; 10^24] ОП у формулы $K = N/\ln N$ при $N > 1000$ можно оценить (лишь структурно похожей на формулу 1.5) следующей эмпирической формулой:

$$ОП_Б \equiv (K_р – K_Б)/K_Б \approx 1{,}384/(\ln N)\hat{}1{,}0731. \quad (1.8)$$

По этой формуле всё при том же $N = 1{,}855 \cdot 10\hat{}61$ мы получим $ОП_Б \sim 0{,}68\%$, а при $N = 10\hat{}308$ – получим $ОП_Б \sim 0{,}12\%$, что соответственно на 2 и 3 порядка хуже (грубее), чем у формулы $K = N/(\ln N – 1)$. При этом (что весьма важно для моей *космологии чисел*) именно самая лаконичная формула $K = N/\ln N$ оказывается… точнее формулы (1.1) у первых семи простых чисел $N =$ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17** (а также у $N =$ **29**). Это видно отчасти и на графике рис. 1.1, где первые синие точки лежат ниже первых лиловых точек и даже ниже красных точек.

Красные точки на графике рис. 1.1 – значения ОП, вычисленные для относительно «сложной» ***формулы Гаусса***: $K_г = \mathrm{Li}(N)$ – это *сдвинутый интегральный логарифм* числа N (читается как «ли большое от N», см. формулу 3.4). Причем, начиная с 14-го простого числа $N =$ **43** и примерно до простого числа $N \sim 30011$ (его точно пока не установил), значения $K_г = \mathrm{Li}(N)$ имеют, вообще говоря, худшую (большую по модулю) ОП, чем значения, полученные по «простенькой» формуле Чебышева: $K = N/(\ln N – 1)$. Поэтому на графике красные точки уже всегда будут лежать ниже лиловых точек, но только после «провала» лиловых точек (то есть это произойдет за «островом точности» формулы Чебышева).

Согласно моим исследованиям отрезка [2; 10^24] относительную погрешность формулы Гаусса $K_г = \mathrm{Li}(N)$ при $N > 10\hat{}8$ можно оценить следующей эмпирической формулой (со знаком «минус»!):

$$ОП_г \equiv (K_р – K_г)/K_г \approx – 0{,}8645/N\hat{}0{,}4964. \quad (1.9)$$

По этой формуле, всё у того же $N = 1{,}855 \cdot 10\hat{}61$ мы получим модуль $|ОП_г| \sim 1/10\hat{}31$, а при $N = 10\hat{}308$ получим $|ОП_г| \sim 1/10\hat{}153$, что, в рамках наших исследований, равносильно нулю ($ОП_г \approx 0\%$). То есть $|ОП_г| \sim 1/N\hat{}0{,}5$ – модуль относительной погрешности формулы Гаусса убывает обратно пропорционально корню квадратному из числа N (модуль $ОП_г$ *стремительно* убывает), поэтому мы будем условно полагать, что для достаточно больших чисел N формула Гаусса дает нам почти *реальные* количества ($K_р$) простых чисел на отрезке [2; N].

2. Фундаментальные взаимодействия и… мир чисел

Выше мы рассмотрели три важнейших функции *теории чисел*:
$K_{\text{Б}} = N/\ln N$ ……. «*базовая формула*» (с предельно лаконичным видом);
$K = N/(\ln N - 1)$… *формула Чебышева* (она чуть точнее *базовой*);
$K_{\text{Г}} = \mathrm{Li}(N)$……….*формула Гаусса* (самая точная из трех формул).
При N = 1,855·10^61 (число Скьюза?, «отражающее» наше «сегодня» в рамках моей теории-гипотезы – *космологии чисел*) три указанные формулы имеют соответственно такую относительную погрешность: $ОП_{\text{Б}}$ ≈ 0,68 %; ОП ≈ 0,0047%; $ОП_{\text{Г}}$ ≈ 10^–31%. И если теперь $ОП_{\text{Б}}$ принять условно за единицу, то тогда мы получаем (см. рис. 2.1):
$ОП_{\text{Б}}$ ≡ 1………. для самой простой и грубой *базовой формулы*,
ОП ≈ 7·10^–3… для чуть более точной *формулы Чебышева*,
$ОП_{\text{Г}}$ ≈ 10^–31… для самой сложной и точной *формулы Гаусса*,
причем эти значения могут отличаться от реальных ОП на несколько порядков, поскольку они – результат моих весьма грубых оценок в мире чисел. Ну а теперь приведу важнейшие параметры Вселенной в наше «сегодня» (*ранее все было не так* – это физики уже понимают). Относительная «мощность» трех фундаментальных взаимодействий: :
1………………….. сильное взаимодействие (ядерная сила);
10^–2 или 10^–5… электрослабое взаимодействие (в двух «лицах»);
10^–39………….. гравитационное взаимодействие (сплошные тайны).

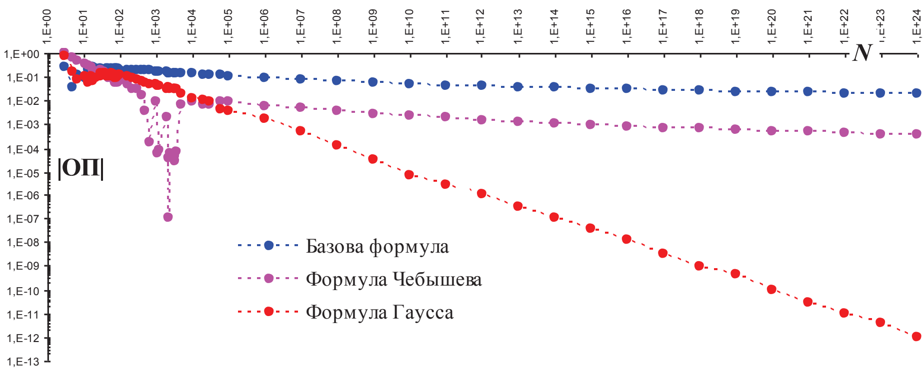

Рис. 2.1. Модуль ОП у трех (простейших) формул теории чисел

Поражает близость цифр из физики и мира чисел. Поэтому моя *космология чисел* уже который раз настаивает: «устройство» мира чисел неким образом «отражает» устройство мироздания. В данном случае мир чисел, вероятно, подсказывает нам (и это – сугубо *моя* «расшифровка»), что все фундаментальные взаимодействия (физики могут придумать их и больше, чем три) – это просто наше в*и*дение *единой* структуры мироздания (*пространства-времени*) через призму разных (по своей «точности») теорий. И гравитация до сих пор скрывает свои тайны лишь потому, что физики пока ещё не придумали свою «формулу Гаусса», позволяющую максимально глубоко проникнуть в суть… *пространства-времени*. А его суть окажется… элементарной до абсурда. Ситуацию отчасти «отражает» мир натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …), суть которого также элементарна до абсурда – каждое число больше предыдущего на единицу. Однако в результате мы получаем… *сложнейшую* теорию чисел, которую нельзя ограничить никакими рамками (она – бесконечна и непрерывно усложняется).

Взгляните в Википедии на статью «Функция распределения простых чисел», и вы поймете, что уже сейчас в теории чисел есть много самых разных формул для описания ряда простых чисел. И три рассмотренные нами формулы (Чебышева, базовая формула, Гаусса) – самые простейшие из них. А всего подобных формул – бесконечно много и все они, по сути дела, описывают «устройство», природу ряда чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … (элементарного до «абсурда»!). Так и в физике можно придумать много разных фундаментальных взаимодействий (и даже разных теорий ВСЕГО), но все они, по сути дела, стремятся описать природу чего-то элементарного до «абсурда» (природу *пространства-времени*, которую «отражает»… мир чисел?)

Ну а теперь «отражения» мира чисел того очевидного факта, что во Вселенной ***ранее все было не так***. Здесь полезно вернуться к графику на рис. 2.1 и осмыслить следующую (фундаментальную) истину. В самом начале натурального ряда (при $2 < N < 43$ и отчасти также при $43 < N < 30011$) видоизменяется сам математический закон, связывающий (с наименьшей относительной погрешностью) простое число (N) с его порядковым номером (K). Или также можно сказать, что здесь три наших закона (три формулы) всё ещё «переплетаются в единый клубок» (вплоть до $N \approx 10^4$, см. рис. 2.1). Согласно *теории струн*, если проникнуть сквозь «туман» квантовых флуктуаций на расстояния порядка 10^4 планковских длин, то «мощности» трех фундаментальных взаимодействий окажутся одинаковыми.

Самую начальную область натурального ряда, вероятно, можно отождествлять с ***сингулярностью*** мира *целых* чисел – областью, где происходит «зарождении» всех его законов – *бесконечного* (!)

множества самых разнообразных *взаимосвязей* мира чисел (в виде математических формул, которые человек просто… открывает для себя, подобно новым экзопланетам, звездам, галактикам). Возможно, что *сингулярность*, якобы имеющая место при зарождении Вселенной (в первые её мгновения), – это также «всего лишь» некое *видоизменение («переплетение») законов физики*, которые позже «окрепнут» и разделятся между собой, заслужив самого высокого звания – *фундаментальных* законов. «Окрепнут» настолько, что современная физика говорит о целом ряде физических *констант* (однако, строго говоря, они таковыми не являются, ибо характеризуют во времени только современную нам эпоху?).

3. Программа «Excel» и… число Скьюза

Стандартная электронная таблица «Excel» построена так, словно учитывает главную гипотезу… *космологии чисел* – ***в мире чисел Большой отрезок «отражает» эволюцию пространства-времени***, то есть эволюцию Вселенной вплоть до момента нашего «сегодня» – это порядка 10^61 *планковских времен* или столько же первых натуральных чисел (которые и названы мной – Большим отрезком). Даже сами размеры таблицы «Excel» – 65536 строк и 256 столбцов – подчиняются закону *теории чисел*: чтобы найти все целые *малые* делители у первых 65536 натуральных чисел – достаточно именно 256 столбцов (это корень квадратный: 65536^0,5 = 256). Ведь у всякого натурального числа *N* именно *малые* делители (они не превосходят корня квадратного из этого числа: *N*^0,5) содержат всю информацию о числе *N*, малые делители являются это как бы «паспортом» числа *N*.

В программе (в электронной таблице) «Excel» число свыше 1,797·10^308 – это тот предел, после которого компьютер «отказывается» вычислять и выдает сообщение: «#ЧИСЛО!» (то есть это предел для «Excel»). Так вот, чтобы увидеть некую «солидарность» программы «Excel» с моей *космологией чисел*, надо погрузиться в мои (уже довольно обширные) тексты, то есть в двух словах феномена «солидарности» не объяснить. Здесь же ограничусь таким странным заявлением: *я не удивлюсь, если вдруг окажется, что* ***число Скьюза порядка…*** **10^308** (то есть *предел* представления чисел в программе «Excel»). А ещё ниже приведу пример «коварства» мира чисел, который сыграл со мной злую шутку из-за таблицы «Excel» (ну и моей глупости, разумеется).

Выше мы установили, что у формулы Гаусса $K_г = \mathrm{Li}(N)$ относительная погрешность (ОП$_г$ ≡ $K_р/K_г$ – 1, имеющая знак «минус» вплоть до *числа Скьюза*) стремительно убывает (по закону: ОП$_г$ ≈ – 1/N^0,5). То есть для достаточно больших чисел N формула Гаусса дает нам практически (то есть в рамках *космологии чисел*) *реальные* количества ($K_р$) простых чисел на отрезке [2; N]. А вот у формулы Чебышева $K = N/(\ln N – 1)$ относительная погрешность (ОП ≡ $K_р/K$ – 1, *всегда* со знаком «плюс», начиная с числа N = 3529) убывает гораздо медленнее – по закону: ОП ≈ 2/(ln$N$)^2 (см. гл. 1).

Поэтому относительная погрешность (ОП*) формулы Чебышева относительно формулы Гаусса (разумеется, что правильнее говорить: параметра K относительно параметра $K_г$), запишется так:

$$\textbf{ОП*} \equiv (K_г – K)/K = K_г/K – 1, \qquad (3.1)$$

и, практически, является ОП формулы Чебышева. В самом деле: из формулы ОП$_г$ ≡ $K_р/K_г$ – 1 находим $K_г = K_р/(1 + ОП_г)$, а затем, подставляя это выражение в формулу (1), получаем:

$$\textbf{ОП*} \equiv K_р/K/(1 + ОП_г) – 1. \qquad (3.2)$$

Поскольку ОП$_г$ быстро устремляется к нулю, то ОП* должна столь же быстро устремляться к ОП формулы Чебышева $K = N/(\ln N – 1)$, которую отражает красная линия на графике рис. 3.1.

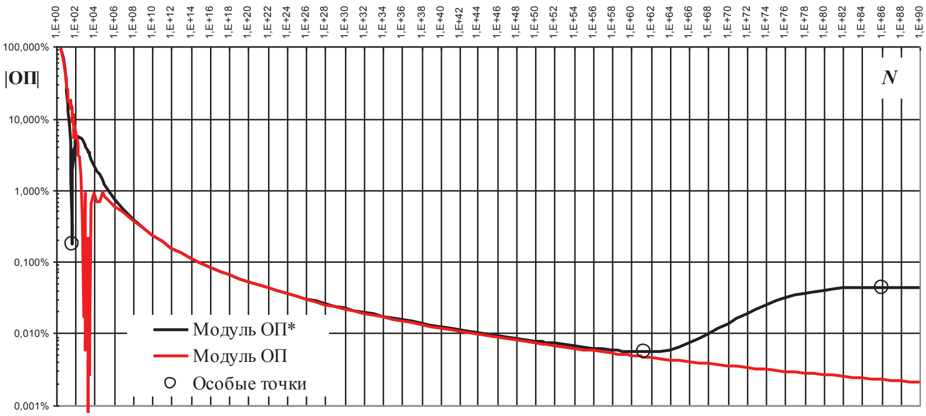

Рис. 3.1. Модуль ОП у формулы Чебышева и «странная» кривая (чёрная линия)

Однако, когда я начинаю откладывать на графике (см. чёрную линию на графике рис. 3.1) значения *модуля* ОП* по формуле (3.1), то получаю странную кривую, но с точкой, о которой… *мог бы только мечтать в рамках моей космологии чисел*. Эта точка – число **N ≈ 1,855·10^61**, при котором достигается странный минимум: |ОП*|$_{min}$ ≈

0,0055 %, после чего странная ОП* продолжает уходить вверх с красной линии (т.е. от ожидаемой мной ОП формулы Чебышева). Указанное число $N \approx$ **1,855·10^61** интересно тем, что оно почти повторяет количество *планковских длин* (2,7·10^61) в примерном радиусе наблюдаемой Вселенной (46 миллиардов световых лет или 4,4·10^26 м). При этом непосредственно в районе минимума ОП* неплохо работает квадратная парабола (с погрешностью < 0,01%):

$$\text{ОП}^* \approx 2{,}5192\cdot10^{-130}\cdot\boldsymbol{N^2} - 9{,}3493\cdot10^{-69}\cdot\boldsymbol{N} + 5{,}4846\cdot10^{-5}, \quad (3.3)$$

А на отрезке от $N \approx$ 10^59 до $N \approx$ 10^62 относительная погрешность квадратной параболы не превысит 3%. Около $N \approx$ 1,855·10^61 лежит и дно параболы, а после его прохождения – ОП* начинает монотонно расти, устремляясь к максимуму: $|\text{ОП}^*|_{max} \approx$ 0,044 % при $N \approx$ 10^86.

И если первый минимум на графике (провал модуля ОП* до 0,172 % при N = 43) – легко объяснить (ОП* меняет свой знак с «минуса» на «плюс» после N = 43), то вот второй минимум при $N \approx$ 10^61 (и максимум при $N \approx$ 10^86) – поставили меня в тупик. Но первая мелькнувшая мысль была такой: числа 10^61 и 10^86 – это некие «тени»… *числа Скьюза*! (да плюс ещё синий текст выше!).

В рамках моей космологии чисел *время* (t) (как его понимает физика) в мире чисел «отражает» параметр $\boldsymbol{t \equiv \ln\ln N}$. И если именно ***число Скьюза «отражает» наше «сегодня»*** (возраст Вселенной около 13,81 миллиарда лет), то числу Скьюза соответствует такое значение параметра: $t \equiv$ lnln(1,855·10^61) ≈ 4,9493. При этом порождаются довольно любопытные факты, например:

1). Для числа N = 10^86 имеем $t \equiv$ lnln(10^86) ≈ 5,2884 или 14,76 млрд лет (из обычной *числовой пропорции*). А по прогнозу ученых в 14,7 млрд лет Земля уже станет непригодной для житья (см. книгу Британских авторов «Большой взрыв: полная история Вселенной», таблица на стр. 184).

2). Для числа N = 10^308 имеем $t \equiv$ lnln(10^308) ≈ 6,5641 или 18,32 млрд лет. К этому времени начнется превращение Солнца в красного гиганта и разрушение Земли.

3). Для числа $N \approx$ e^(e^10^141) имеем $t \equiv \ln\ln N \approx$ 10^141 или порядка 10^150 лет. К этому времени уже распадутся все протоны, затем произойдет распад чёрных дыр (10^100 лет) и наступит фотонный век: достижение Вселенной состояния предельно низкой энтропии? То есть наступит… смерть Вселенной.

Но, увы, всё оказалось просто и глупо. Кстати, нечто подобное происходило уже не раз, словно мир чисел «коварно шутил» со мной.

Исследование мира чисел – это не только интересно, поучительно, но и довольно… опасно для психики человека. Ведь ***мир чисел часто и безжалостно уличает нас в слабости нашего разума****…*

Итак, после размышлений я понял, почему черная линия ушла вверх от красной линии на графике рис. 3.1. Причины указаны ниже.

В нашем конкретном случае (при $N > 10$^24) формула Гаусса – это, практически, просто сумма *гауссовых слагаемых* (G_k):

$$\boldsymbol{K_г = \mathrm{Li}(N) \approx \sum G_k}, \qquad (3.4)$$

где $\boldsymbol{G_k \equiv (\ln N)}$**^*k*/*k*/*k*!** – это *k*-ое гауссово слагаемое**;** $k = 1, 2, 3, 4,\ldots$ до бесконечности, но на практике – берем до тех пор, пока *k*-ое слагаемое больше нуля: $G_k > 0$. При этом «Excel» с помощью своей стандартной функции вычисляет *факториал* ($k!$) «только» до $k = 170$ (а именно: 170! ≈ 7,26·10^306), и при $k = 171$ компьютер уже выдает сообщение: «#ЧИСЛО!» (поскольку 171! > 10^308). Поэтому в моем алгоритме далее вступала в работу формула Муавра-Стирлинга:

$$\boldsymbol{k! \approx [(2\cdot\pi\cdot k)\text{^}0{,}5\cdot(k/e)\text{^}k]\cdot W}, \qquad (3.5)$$

но только, увы, ранее я брал $W = 1$, а теперь просто забыл об этом допущении. А когда я «включил» формулу «на полную мощность»:

$$\boldsymbol{W = 1 + 1/12/k + 1/288/k\text{^}2 - 139/51840/k\text{^}3 - 571/2488320/k\text{^}4 + \ldots}, \quad (3.6)$$

то черная линия на графике (после числа $N = 10$^24) – сразу легла на красную линию (и я с горечью уличил себя в роковой ошибке).

Если ввести обозначения (и брать *для всех* $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$):

$(G_k)_{max}$ – это *k*-ое гауссово слагаемое, когда у *k*-факториала $W = 1$,

G_k – это «штатное» *k*-ое гауссово слагаемое (параметр W вычисляется по формуле 3.6, и, повторяю, для всех *k* – с самого начала), то тогда я получаю следующее неравенство (которое нетрудно доказать?):

$$\boldsymbol{\exp(1/12/(k + 1)) < (G_k)_{max}/G_k < \exp(1/12/k)}. \qquad (3.7)$$

Если ввести обозначения (и брать *для всех* $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$):

$(K_г)_{max}$ – значение по формуле Гаусса, когда у *k*-факториала $W = 1$,

$K_г$ – «штатное» значение по формуле Гаусса (параметр W вычисляется по формуле 3.6 и, повторяю, для всех *k* – с самого начала), то получим такую эмпирическую оценку (модуль ОП < 0,0001% при $N > 10$^47):

$$\boldsymbol{(K_г)_{max} \approx [1 + 0{,}08862/(\ln N)\text{^}1{,}00927]\cdot K_г}. \qquad (3.8)$$

Именно эта формула и задает (через параметр ОП*) положение верхней (максимально возможной) чёрной линии ОП* на графике рис. 3.1. К этой линии *плавно* (в силу принятого мною *ошибочного* алгоритма, см. выше) устремляется чёрная линия (минуя дно параболы при $N \approx 10$^61 и «вершину» при $N \approx 10$^86).

Если $K_р$ – реальное количество простых чисел на отрезке [2; N], то тогда *теория чисел* дает нам следующее важное неравенство:

$$|K_р - K_г| < 1/8/\pi \cdot N\hat{}0{,}5 \cdot \ln N. \qquad (3.9)$$

При этом по моей эмпирической оценке:

$$[(K_г)_{max} - K_г]/|K_р - K_г| \approx 4{,}34 \cdot N\hat{}0{,}48929/10\hat{}6, \qquad (3.10)$$

то есть значения $(K_г)_{max}$ будут на много-много порядков больше, чем правильные значения формулы Гаусса ($K_г$) и реальные значения ($K_р$). Для $N > 10\hat{}24$ получаем такую (грубую) эмпирическую оценку:

$$(K_г)_{max} - K_г \sim N/10\hat{}5. \qquad (3.11)$$

Могу также добавить, что реальные данные ($K_р$) на отрезке от N = 10^6 до N = 10^24 дают линию тренда с малой погрешностью:

$$|ОП^*|/|ОП| \approx 1 + 115{,}08/N\hat{}0{,}4389, \qquad (3.12)$$

что доказывает быстрое сближение модулей значений ОП* и ОП.
На отрезке от N = 10^24 до N = 10^308 искомая погрешность формулы Чебышева относительно формулы Гаусса убывает по закону:

$$ОП^* \equiv K_г/K - 1 \approx 1{,}1446/(\ln N)\hat{}2{,}0211. \qquad (3.13)$$

Чем вообще полезен параметр $(K_г)_{max}$ – пока не ясно («спасибо» ему, конечно, что уличил меня в глупости, ну а что ещё?). Тем не менее, *у меня осталось стойкое «ощущение», что* ***число Скьюза*** *вполне может оказаться близким к числу* **N ≈ 10^61** и, скорее всего, лишь только потому, что хочется верить в свою *космологию чисел*, и, кажется, что программа «Excel» также «верит» в нечто подобное…

4. Число Скьюза – порядка 10^61

Уже опубликовав (22 марта 2016) выше изложенный материал в виде статьи на портале «Техно-сообщество России», я всё-таки получил на удивление простое (инженерное) «доказательство» того, что пресловутое число Скьюза действительно вполне может оказаться порядка 10^61. Столько *планковских времен* содержится в возрасте Вселенной: 13,81 миллиардов лет ≈ 8,078·10^60 *эви* – элементарных временных интервалов (планковских времен). В рамках моей теории числовой отрезок [1; N], содержащий такое количество натуральных чисел я назвал ***Большим отрезком***. В пределах именно этого отрезка находится немало примеров, говорящих о том, что законы мира чисел отчасти «отражают» законы физического мира (в виде простейшей математической модели пространства-времени). И если число Скьюза окажется порядка 10^61, то это станет очередным аргументом в пользу *космологии чисел*. Но только математики смогут доказать или опровергнуть мою гипотезу о том, что число Скьюза порядка 10^61.

Разность (R) или *гауссова разность* – так мы назовем разность между гауссовым номером $K_г$ = Li(P) простого числа (P) и его реальным порядковым номером (K) в общем ряде всех простых чисел: P = **2**, **3**, **5**, **7**, **11**, **13**, **17**,… . То есть согласно нашему определению:

$$\boldsymbol{R \equiv K_г - K}. \tag{4.1}$$

В *теории чисел* доказано следующее важное неравенство:

$$\boldsymbol{|K_г - K| < 1/8/\pi \cdot P\text{^}0{,}5 \cdot \ln P}, \tag{4.2}$$

где 1/8/π ≈ 0,0398, а само неравенство (4.2) начинает выполняться при $P \geq 2657$ (это 384-ое простое число, то есть у него K = 384). При этом вплоть до *числа Скьюза* ($N_с$) разница $R \equiv K_г - K$ будет положительной, то есть при $P < N_с$ всегда $R > 0$, то есть $K_г > K$. А затем (при $P > N_с$) ***разница R бесконечное количество раз поменяет свой знак*** («плюс» на «минус» и наоборот). Но при этом неравенство (4.2) по-прежнему будет выполняться, то есть *модуль* разницы $R \equiv K_г - K$ будет меньше указанного выражения: $|R| < 0{,}04 \cdot P\text{^}0{,}5 \cdot \ln P$.

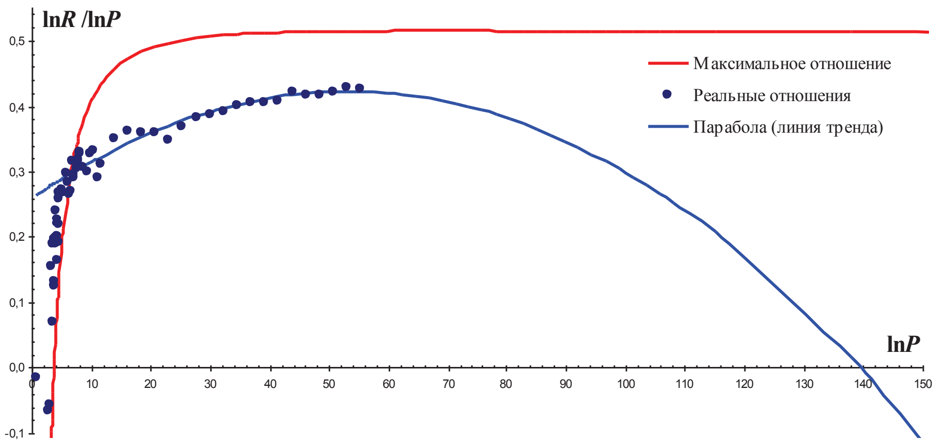

Рис. 4.1. «Доказательство» того, что число Скьюза – это P ~ 10^61 (ln$P$ ≈ 140)

Как понимать слова (из теории чисел в части разницы R, то есть это не мои слова) «*бесконечное количество раз*»? Из того, о чём я расскажу ниже следует, скажем, такая картина (правда, и она может оказаться ошибочной): после числа Скьюза (у меня это $N_с$ ~ 10^61, когда ln$P$ ≈ 140, см. график на рис. 4.1) разница R будет иметь знак «минус» ($R < 0$), скажем (я сам этого не знаю, а только предполагаю), до числа P ~ 10^122 (когда ln$P$ ≈ 280), а потом разница R будет иметь знак «плюс» (до некого нового колоссального числа $P >> 10^{122}$), и т.д. («*бесконечное количество раз*»). То есть, насколько я понимаю, после числа Скьюза у разницы R знак будет меняться («случайным» образом) но не от числа к числу (речь о близких друг к другу простых числах P), а через некие колоссальные отрезки числового ряда. Но поскольку для математиков отрезок, скажем, от числа $P = N_c \sim 10^{61}$ до числа $P \sim 10^{122}$ – это всё… «мелочи» на фоне *бесконечности* (∞), то математики спокойно говорят: «*бесконечное количество раз*» (хотя для мой *космологии чисел* всё это имеет ключевое значение).

Далее найдем отношение $\boldsymbol{Z \equiv \ln R/\ln P}$, вытекающее из (4.2):

$$\boldsymbol{Z \equiv 0{,}5 - 3{,}2/\ln P + \ln\ln P/\ln P}, \tag{4.3}$$

из которого следует, что $|Z| \to 0{,}5$ при $\ln P \to \infty$ (красная линия на графике рис. 4.1). Например, в конце *Большого отрезка* (при $P \approx 8{,}078 \cdot 10^{60}$ и $\ln P \approx 140{,}244$) мы получим $|Z| \approx 0{,}51226$, то есть *реальное* отношение будет меньше этого значения: $\ln|R|/\ln P < 0{,}51226$ (независимо от того, что будет сказано ниже про параметр $\ln R/\ln P$).

Затем мы возьмём ряд произвольно (случайно) взятых *простых чисел* от $P =$ **101** до $P \approx$ **10^24** (см. табл. 2) и вычислим для каждого из них *реальную* разность $R \equiv K_г - K$ и *реальное* отношение $\ln R/\ln P$ (синие точки на графике рис. 4.1) Все полученные реальные отношения $\ln R/\ln P$ (для 43-х простых чисел P, приведенных в табл. 2) наилучшим образом (проверьте это сами) описывает *квадратное уравнение* (синяя парабола на графике рис. 4.1):

$$\boldsymbol{\ln R/\ln P \approx A \cdot (\ln P)^2 + B \cdot \ln P + C}, \tag{4.4}$$

где $A = -0{,}0000569$; $B = 0{,}0060812$; $C = 0{,}2596899$ – коэффициенты, которые вычисляет сама программа “Excel”, когда её «просишь» построить *полиномиальную* линию тренда (степени 2, синяя парабола на графике) по 43-м реальным значениям $\ln R/\ln P$. Разумеется, что если брать иные простые числа P и (или), скажем, взять их во много раз больше, то и коэффициенты A, B, C будут другими. Однако по большому счету, принципиально ничего не должно измениться (это также можно расценивать как мою гипотезу) и в конечном итоге мы должны получить число Скьюза того же порядка: $N_c \sim 10^{61}$ (или близко к этому). Разумеется, что лучше всего это доказать чисто аналитически, но это может сделать только сильный математик.

Построенная парабола имеет наивысшую точку – максимальное отношение $(\ln R/\ln P)_{max} \approx 0{,}422159$ при $P \approx$ 10^23 (когда $\ln P \approx 53$). После чего отношение $\ln R/\ln P$ начинает уменьшаться вплоть до нуля – это происходит при $P \approx 4{,}1\cdot$10^60 (когда $\ln P \approx 139{,}57$), и данное число (порядка **10^61**) вполне может оказаться близким к реальному ***числу Скьюза***, ведь после него отношения $\ln R/\ln P$ будут иметь знак «минус», то есть разность R станет меньше единицы ($R < 1$). Ну а где единица – там недалеко и до таких значений: $R = 0$, $R < 0$, и это – самое «сильное» место в приведенном выше «доказательстве».))

Первые 25-ть простых чисел (P) — Таблица 1

Простое число – правая граница отрезка [1; P]	Логарифм простого числа	Номер простого числа: реальный номер	Номер простого числа: по формуле Гаусса	Реальная разность номеров	Реальное отношение	Квадратное уравнение	Теория чисел
P	$\ln P$	K	$K_Г = \mathrm{Li}(P)$	$R = K_Г - K$	$\ln R/\ln P$	$\ln R/\ln P$	$\ln R/\ln P$
2	0,693	1	0	-1,000	0,0000	0,2639	-4,6803
3	1,099	2	1,1184	-0,882	-0,1147	0,2663	-2,3492
5	1,609	3	2,5894	-0,411	-0,5531	0,2693	-1,2076
7	1,946	4	3,7119	-0,288	-0,6395	0,2713	-0,8148
11	2,398	5	5,5458	0,546	-0,2525	0,2739	-0,4799
13	2,565	6	6,3514	0,351	-0,4078	0,2749	-0,3898
17	2,833	7	7,8313	0,831	-0,0652	0,2765	-0,2704
19	2,944	8	8,5235	0,523	-0,2198	0,2771	-0,2282
23	3,135	9	9,8384	0,838	-0,0562	0,2782	-0,1638
29	3,367	10	11,6820	1,682	0,1544	0,2795	-0,0969
31	3,434	11	12,2701	1,270	0,0696	0,2799	-0,0796
37	3,611	12	13,9725	1,973	0,1881	0,2809	-0,0373
41	3,714	13	15,0646	2,065	0,1952	0,2815	-0,0149
43	3,761	14	15,5997	1,600	0,1249	0,2818	-0,0050
47	3,850	15	16,6506	1,651	0,1302	0,2823	0,0127
53	3,970	16	18,1847	2,185	0,1968	0,2829	0,0352
59	4,078	17	19,6755	2,676	0,2414	0,2835	0,0540
61	4,111	18	20,1640	2,164	0,1878	0,2837	0,0596
67	4,205	19	21,6069	2,607	0,2279	0,2843	0,0748
71	4,263	20	22,5516	2,552	0,2198	0,2846	0,0838
73	4,290	21	23,0193	2,019	0,1638	0,2847	0,0880
79	4,369	22	24,4049	2,405	0,2008	0,2852	0,0996
83	4,419	23	25,3151	2,315	0,1900	0,2855	0,1066
89	4,489	24	26,6622	2,662	0,2181	0,2858	0,1162
97	4,575	25	28,4274	3,427	0,2693	0,2863	0,1276

Произвольно взятые 43 простых числа (P) Таблица 2

Простое число – правая граница отрезка [1; P]	Логарифм простого числа	Номер простого числа		Реальная разность номеров	Реальное отношение	Квадратное уравнение	Теория чисел
		реальный номер	по формуле Гаусса				
P	ln$P$	K	$K_Г = \mathrm{Li}(P)$	$R = K_Г - K$	ln$R$/ln$P$	ln$R$/ln$P$	ln$R$/ln$P$
101	4,615	26	29	3,298	0,2586	0,2865	0,1328
163	5,094	38	42	4,030	0,2736	0,2892	0,1866
211	5,352	47	51	4,213	0,2687	0,2906	0,2110
307	5,727	63	69	5,513	0,2981	0,2926	0,2417
401	5,994	79	85	5,540	0,2856	0,2941	0,2609
503	6,221	96	101	5,231	0,2660	0,2953	0,2755
659	6,491	120	126	5,757	0,2697	0,2968	0,2914
1 009	6,917	169	178	8,867	0,3155	0,2990	0,3135
1 091	6,995	182	190	7,655	0,2910	0,2994	0,3172
1 229	7,114	201	209	8,214	0,2960	0,3001	0,3226
2 003	7,602	304	314	10,159	0,3049	0,3026	0,3427
2 243	7,716	334	345	11,491	0,3164	0,3032	0,3469
2 251	7,719	335	347	11,527	0,3167	0,3032	0,3471
2 521	7,832	369	381	12,246	0,3199	0,3038	0,3511
3 187	8,067	451	465	13,982	0,3270	0,3050	0,3591
3 253	8,087	459	473	14,153	0,3277	0,3051	0,3598
3 319	8,107	467	481	14,304	0,3282	0,3053	0,3604
3 527	8,168	492	507	14,863	0,3304	0,3056	0,3624
5 003	8,518	670	684	13,588	0,3063	0,3074	0,3730
10 007	9,211	1230	1246	15,852	0,3000	0,3109	0,3910
20 011	9,904	2263	2289	25,680	0,3277	0,3143	0,4060
30 011	10,309	3246	3277	30,921	0,3328	0,3163	0,4136
60 013	11,002	6058	6083	24,983	0,2925	0,3197	0,4249
100 003	11,513	9593	9629	36,024	0,3113	0,3222	0,4322
1 000 003	13,816	78499	78627	127,721	0,3510	0,3328	0,4567
10 000 019	16,118	664580	664919	338,539	0,3614	0,3429	0,4724
100 000 007	18,421	5761456	5762209	752,710	0,3596	0,3524	0,4831
1E+09	20,723	5,08E+07	5,08E+07	1,70E+03	0,3589	0,3613	0,4907
1E+10	23,026	4,55E+08	4,55E+08	3,10E+03	0,3492	0,3695	0,4962
1E+11	25,328	4,12E+09	4,12E+09	1,16E+04	0,3695	0,3772	0,5003
1E+12	27,631	3,76E+10	3,76E+10	3,83E+04	0,3819	0,3843	0,5034
1E+13	29,934	3,46E+11	3,46E+11	1,09E+05	0,3875	0,3907	0,5058
1E+14	32,236	3,20E+12	3,20E+12	3,15E+05	0,3927	0,3966	0,5077
1E+15	34,539	2,98E+13	2,98E+13	1,05E+06	0,4015	0,4018	0,5092
1E+16	36,841	2,79E+14	2,79E+14	3,21E+06	0,4067	0,4065	0,5104
1E+17	39,144	2,62E+15	2,62E+15	7,96E+06	0,4059	0,4105	0,5113
1E+18	41,447	2,47E+16	2,47E+16	2,19E+07	0,4079	0,4140	0,5121
1E+19	43,749	2,34E+17	2,34E+17	9,99E+07	0,4210	0,4168	0,5127
1E+20	46,052	2,22E+18	2,22E+18	2,23E+08	0,4174	0,4191	0,5132
1E+21	48,354	2,11E+19	2,11E+19	5,97E+08	0,4179	0,4207	0,5135
1E+22	50,657	2,01E+20	2,01E+20	1,93E+09	0,4221	0,4217	0,5138
1E+23	52,959	1,93E+21	1,93E+21	7,25E+09	0,4287	0,4222	0,5141
1E+24	55,262	1,84E+22	1,84E+22	1,71E+10	0,4263	0,4220	0,5143

24.03.2016

© А. В. Исаев, 2016