Preuve De L'hypothese De Riemann (Proof of Riemann Hypothesis)

Babacar Gueye
e-mail: gbabacar155@yahoo.fr
Tel: 221 77 651 49 09

Abstract
In mathematics, the Riemann Hypothesis is a conjecture gived in 1859 by the deutch mathematician Bernard Riemann. It says that the non trivial zero of the zeta fonction of Riemann have all for real part $\frac{1}{2}$. We give here a proof of this conjecture that uses his relation with the Dirichlet fonction etz on the part of the plan $\Re(s)$, where s is a complex number. We use exactly the fact that if $\zeta(s) = 0$ then $\zeta(1 - s) = 0$, and better if $\zeta(s) = \zeta(1 - s)$ then $\Re(s) =\frac{1}{2}$

I) INTRODUCTION

En mathématiques, l'hypothèse de Riemann est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien allemend Bernard Riemann. Elle dit que les zéros non triviaux de la fonction zèta de Riemann ont tous pour partie réelle égale à $\frac{1}{2}$. Sa démonstration améliorerait la connaissance de la répartition des nombres premiers. Cette conjecture est l'un des problèmes non résolus les plus importants des mathématiques du XXI^e siècle : elle est l'un des vingt-trois fameux problèmes de Hilbert proposés en 1900, l'un des sept problèmes du prix du millénaire et l'un des dix-huit problèmes de Smale. Comme pour les six autres problèmes du millénaire, l'énoncé exact de la conjecture à démontrer est accompagné d'une description détaillée fournissant de nombreuses informations, qu'on aura à utiliser ici, sur l'historique du problème, son importance et l'état des travaux à son sujet. La fonction zeta de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe définie pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$, par la série de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Léonard Euler avec la formule, valable pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s}) \cdots}$$

. On peut étendre la fonction ζ sur $\Re(s) > 0$ à partir de la définition de la série alternée (appelée fonction eta de Dirichlet) pour avoir :

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

sur $\Re(s) > 0$, sauf pour $s = 1 + \mathrm{i}\frac{2k\pi}{ln(2)}$ ($k \in \mathbb{Z}$. Et cela en utilisant la relation fonctionnelle satisfait par ζ :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2} \Gamma(1 - s)\zeta(1 - s)$$

valable pour tout complexe s différent de 0 et 1, démontrée par Riemann en 1859. Ici Γ désigne la fonction gamma.

II) DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE

Je donne ici une démonstration de l'hypothèse de Riemann en utilisant le fait que si $\zeta(s) = 0$, alors $\zeta(s) = \zeta(1-s)$, et surtout que si $\zeta(s) = \zeta(1-s)$ alors $\Re(s) = \frac{1}{2}$.
Si $\zeta(s) = 0$, par l'égalité fonctionnelle $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$, on a $\zeta(1-s) = 0$.
Supposons que $\zeta(s) = \zeta(1-s)$ c'est à dire, par le prolongement de la fonction ζ sur le domaine $0 < \Re(s) < 1$, que :

$$(1-2^{1-s})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = (1-2^s)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{1-s}}$$

.

Ce qui équivaut à :
$(1-2^{1-s})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s} - (1-2^s)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{1-s}} = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}((1-2^{1-s})^{-1}n^{1-s} - (1-2^s)^{-1}n^s) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}((1-2^{1-s})^{-1}n^{1-s} - (1-2^s)^{-1}n^s) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{n^{1-s}}{1-2^{1-s}} - \frac{n^s}{1-2^s}) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{n^{1-s}(1-2^s)-n^s(1-2^{1-s})}{3-2^s-2^{1-s}}) = 0$ [1].

En posant $s = a + ib$ avec $0 < a < 1$,

on a que :
[1] $\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{n^{1-a-ib}(1-2^{a+ib})-n^{a+ib}(1-2^{1-a-ib})}{3-2^{a+ib}-2^{1-a-ib}}) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{n^{1-a}.n^{-ib}-n^{1-a}.n^{-ib}.2^a.2^{ib}-n^a.n^{ib}+n^a.n^{ib}.2^{1-a}.2^{-ib}}{3-2^a.2^{ib}-2^{1-a}.2^{-ib}}) = 0$ [2]
Si $a = \frac{1}{2}$,
alors :
[2] $\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{\sqrt{n}(n^{-ib}-n^{ib})-\sqrt{2n}((\frac{n}{2})^{-ib}-(\frac{n}{2})^{ib})}{3-\sqrt{2}(2^{ib}+2^{-ib})}) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{\sqrt{n}(e^{-ib.ln(n)}-e^{ib.ln(n)})-\sqrt{2n}(e^{-ib.ln(\frac{n}{2})}-e^{ib.ln(\frac{n}{2})})}{3-\sqrt{2}(e^{ib.ln(2)}+e^{-ib.ln(2)})}) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{2i\sqrt{2n}\sin(b.ln(\frac{n}{2}))-2i\sqrt{n}(\sin(b.ln(n)))}{3-2\sqrt{2}\cos(b.ln(2))}) = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2i}{\sqrt{n}}(\frac{\sqrt{2}\sin(b.ln(\frac{n}{2}))-\sin(b.ln(n))}{3-2\sqrt{2}\cos(b.ln(2))}) = 0.$

Tous les termes de cette somme sont des imaginaires purs (sont donc dans la même direction) qui changent de sens, (de norme décroissant à partir d'un certain rang), d'un terme au suivant. La convergence de la somme partielle vers 0, possible, ne dépend que de b.

Mais notre but ici est de montrer que si $a \neq \frac{1}{2}$, la somme infinie de termes ne peut pas etre égale à 0 ; en d'autres termes que la somme partielle ne peut pas converger vers 0.

En effet si $a \neq \frac{1}{2}$

[2] $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.A_n = 0$ où on a posé $A_n = \frac{n^{1-a}.n^{-ib} - n^{1-a}.n^{-ib}.2^a.2^{ib} - n^a.n^{ib} + n^a.n^{ib}.2^{1-a}.2^{-ib}}{3 - 2^a.2^{ib} - 2^{1-a}.2^{-ib}}$.
On a alors :
$A_n = \frac{n^{1-a}.e^{-ib.ln(n)} - n^a.e^{ib.ln(n)} - n^{1-a}.2^a.e^{-ib.ln(\frac{n}{2})} + n^a.2^{1-a}.e^{ib.ln(\frac{n}{2})}}{3 - (2^a + 2^{1-a})\cos(b.ln(2)) - i(2^a - 2^{1-a})\sin(b.ln(2))}$
$= \big((3 - (2^a + 2^{1-a})\cos(b.ln(2)))(n^{1-a}.e^{-ib.ln(n)} - n^a.e^{ib.ln(n)} - n^{1-a}.2^a.e^{-ib.ln(\frac{n}{2})} + n^a.2^{1-a}.e^{ib.ln(\frac{n}{2})}) + i((2^a - 2^{1-a})\sin(b.ln(2)))(n^{1-a}.e^{-ib.ln(n)} - n^a.e^{ib.ln(n)} - n^{1-a}.2^a.e^{-ib.ln(\frac{n}{2})} + n^a.2^{1-a}.e^{ib.ln(\frac{n}{2})})\big) : \big((3 - (2^a + 2^{1-a})\cos(b.ln(2)))^2 + ((2^a - 2^{1-a})\sin(b.ln(2)))^2\big)$.

$\frac{A_n}{n}$ est un nombre complexe de module décroissant vers zéro, car $0 < a < 1$ et en plus on aura $bln(n) \sim bln(n+1)$, $bln(\frac{n}{2}) \sim bln(\frac{n+1}{2})$, $n^a \sim (n+1)^a$ et $n^{1-a} \sim (n+1)^{1-a}$).
Et à partir d'un certain rang son module est relativement petit devant le module de la somme partielle. Il change de direction de peu de l'étape n à l'étape $n+1$ et le terme général de la série, à savoir $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \times A_n$ change de sens car n et $n+1$ de parités différentes.
Pour dire que pour n assez grand, le module de la somme partielle (qui reste toujours plus grand que le module du terme général) va alors commencer à osciller autour du module d'un complexe non nul, vers lequel il va tendre.
Pour dire que

$$\zeta(a+ib) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times A_n$$

ne peut pas s'annuler, c'est à dire que la somme partielle va converger vers un complexe de module non nul.

EN RESUME :

On a montré que pour $s = a + ib$, si $a \neq \frac{1}{2}$ alors $\zeta(s) \neq \zeta(1-s)$.

Alors $\zeta(s) = 0$ impliquant $\zeta(s) = \zeta(1-s)$ implique $a = \frac{1}{2}$.

cqfd

....

Références :

Pour de plus amples informations sur l'hypothèse de Riemann et les résultats utilisés dans cet article, on peut consulter les pages "hypothèse de Riemann" et "la fonction zeta de Riemann" de WIKIPEDIA.