

Foundations of a quasi-classical and quantum theory of gravity

Alexander P. Sobolev

sapsolto@mail.ru

ABSTRACT

The gravitational field equations were derived in general relativity (GR) using the assumption of their covariance relative to arbitrary transformations of coordinates. Over the past century, it has been repeatedly expressed as an opinion that such equality of all coordinate systems may not correspond to reality. In this article, general covariance is restricted by the introduction of a constraint. This constraint is interpreted from a physical point of view as a sufficient condition for the adiabaticity of the process of the evolution of the space–time metric. The original equations of the theory of gravity with the constraint are formulated. On this basis, a unified model of the evolution of the modern, early, and very early Universe is constructed that is consistent with the observational astronomical data but does not require the hypotheses of the existence of dark energy, dark matter or inflatons. It is claimed that: the gravitational field is the main source of energy of the Universe, the maximum global energy density in the Universe was 64 orders of magnitude smaller the Planckian one, and the entropy density is 18 orders of magnitude higher the value predicted by GR. The value of the relative density of neutrinos at the present time and the maximum temperature of matter in the early Universe are calculated. The wave equation of the gravitational field is formulated, its solution is found, and the wave function of the very early Universe is constructed. It is shown that the birth of the Universe was random.

Keywords: gravitation, quantum gravity, evolution of the Universe, restricted covariance, nonsingular theory, entropy of the gravitational field, dark matter, dark energy.

I. INTRODUCTION

Over a hundred years ago, in the derivation of the gravitational equations from the variational principle, Hilbert formulated “an axiom of the general invariance of the action in relation to arbitrary transformations of the world parameters [coordinates]” and chose “ R – the invariant built from the Riemann tensor [curvature of the four-dimensional manifold]” as the Lagrangian of the gravitational field.¹

Three years earlier, Einstein wrote: “Besides, it should be emphasized that we have no basis whatever for assuming general covariance of the gravitational equations From this it seems to follow that the equations sought will be covariant only with respect to a particular group of transformations, which for the time being, however, is unknown to us. It seems most natural to demand that the system of equations should be covariant against *arbitrary* [Einstein’s italics] transformations.” (Ref. 2, pp. 237, 243).

The success of the canonical theory of gravity ostensibly corroborated the validity of such an assumption, and it eventually acquired the status of a fundamental principle, although the opposite point of view had also been expressed earlier (Ref. 3, p. 631): “...the physical meaning of GR [general relativity] boils down to the creation of a new theory of gravity. However, Einstein, the author of the theory, had another point of view, as do a number of his followers. They believe that in addition to this, and fundamentally, GR establishes the principle of the equality of all reference frames. It is difficult to agree with this position, however, since this illegitimately interprets the equality of reference frames from the perspective of a formal mathematical apparatus as equality in terms of their physical essence.”

In the light of new experimental data, GR no longer seems as unshakeable as it once did.⁴⁻⁶ For an explanation of the results derived within the framework of this theory, it was necessary to introduce certain hypothetical entities (the Λ CDM model⁷) the nature of which are still unclear. “*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*”; it is likely that the necessity for the introduction of inflatons at first, and now of dark energy and dark matter in GR (with the development of new methods of astronomical observation), are symptoms of a defect in its fundamental basis.

General relativity violates the unity of the material world. In GR, the gravitational field itself does not have the properties of a material medium; its energy–momentum density is zero. This is a direct consequence of the general covariance of the gravitational field equations. Attempts to introduce a non-general covariant energy–momentum density actually mean refuting the original axiom of general covariance.

In my opinion, *it is the general covariance of the equations that is the source of the troubles of GR*. These troubles were detected at the stage of its formation, and today they have become a whole set of unresolved problems: the problems of energy, singularities, black holes, the cosmological constant, and cold dark matter; the problem of the description of elementary particles; and finally, the impossibility of the creation of a quantum theory of gravitation on the basis of GR.

One possible way to construct a *non-generally covariant theory of gravity without violating Hilbert’s axioms* (as I see it) is the introduction of an *a priori* constraint that restricts the choice of coordinate system. Attempts of such a kind have been made previously, for example the unimodular theory of gravity, whose origins date back to Einstein. A consequence of the introduction of this constraint is the appearance of an edge in the space–time manifold. Therefore, *restrictedly covariant geometric objects are defined only on manifolds with this edge*. In the presence of the differential constraint, there is an opportunity to choose the position of the edge so as to single out a nonsingular interior region of the manifold.

Under such an approach, the fundamental principle of the equivalence of all reference systems compatible with the pseudo-Riemannian metric, which underlies GR, is not violated. In addition, we do not put into doubt the principle of the invariance of *matter* action relative to arbitrary transformations of coordinates. At the same time, in contrast to GR, *a covariance of the gravitational equations is restricted by the constraint*. Thus, *a priori*, only the “medium-strong principle” of equivalence is met in this case.⁸ However, this cannot be grounds for rejecting the proposed approach as contradicting the experiments verifying the strong equivalence principle for bodies of cosmic scales.⁹

The fact is that already in GR, within the framework of the Λ CDM model, space itself is endowed with energy. The same thing occurs when an *a priori* constraint is introduced. Space becomes a self-gravitating object because of the nonlinearity of the gravitational equations. One can determine the inertial and gravitational masses of such an object. The solution of the gravitational equations has enough free parameters to not only ensure the requirement of the equality of the inertial mass of the gravitational field to its gravitational mass, but also to determine inertial mass in accordance with Mach’s principle (the latter problem has not been solved in GR). From this point of view, the results of experiments⁹ should be considered as an indication that *only such (quasi) stationary self-gravitating objects exist for which inertial mass is equal to gravitational mass*.

Hilbert’s axioms are formulated in a coordinate language. The gravitational field was represented by the ten components $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ of the metric tensor. In addition, it was assumed that derivatives of the metrics no higher than second order could enter into the gravitational equations.

There is no theorem prohibiting the existence of a constraint between the components of a metric in mathematical physics. However, the unimodular theory turned out to be unacceptable from a physical point of view, which prompted Einstein to abandon it in favor of the general covariant theory. Currently, such theories are considered as an approach to the construction of a quantum

theory of gravity.¹⁰ Among the other possible approaches, *a restriction of general covariance has the least effect on the concepts about the world around us that are dictated by common sense.*¹¹ Of course, there must be sufficiently substantial physical grounds to introduce the restrictions on the group of coordinate transformations.

There is a deep analogy between the mathematical description of gravitational interaction in GR and the description of gauge interactions in elementary particle physics.¹² The only way to calibrate for the latter (due to the requirement for general covariance) is by imposing the condition that the 4-divergence of the gauge fields is equal to zero. A similar condition for the gravitational field would be the requirement for an equality to zero of a 4-divergence of the connectivity consistent with the metric, simplified by a pair of indices $\Gamma_{\nu\rho}^\rho$. However, due to the fact that GR is not a gauge theory,¹³ to avoid contradictions with the initial provisions, such a condition should be considered not as a gauge, but as a constraint. This constraint must be resolved before obtaining the motion equations from the variational principle.

My basic assumption is that (in contrast to the unimodular theories) *the components of the metric tensor $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ are constrained by the following conservation law* (the physical interpretation of this constraint is given in Sec. II):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho}^\rho) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \right) = 0, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

The left-hand side of (1.1) is not a generally covariant scalar. For an arbitrary coordinate transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu$,⁸

$$g'(x') = g(x) \times J^2, \quad J = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right). \quad (1.2)$$

It follows from the definition of a scalar that the determinant of the metric tensor changes as a scalar under transformations of coordinates with the Jacobian of the transformation equal to unity in modulus

$$g'(x') = g(x), \quad J = 1. \quad (1.3)$$

On the restricted group of coordinate transformations on which $\sqrt{-g}$ is a scalar, the constraint becomes a geometrical object in some region of the space–time continuum and acquires a physical meaning.

Thus, *the constraint (1.1) is a geometric object and defines an edge of the manifold only at the restriction of the group of admissible coordinate transformations, from local general diffeomorphisms to special diffeomorphisms with the Jacobian equal to unity.* In addition, *the constraint (1.1) allows global linear transformations of coordinates.*

II. GRAVITATIONAL FIELD EQUATIONS IN THE PRESENCE OF THE CONSTRAINT

In the currently accepted notations, the Hilbert action has the form

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x,$$

where $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ is the scalar curvature, $R_{\mu\nu}$ is the Ricci tensor,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho,$$

and $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ is the Christoffel symbols,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right).$$

The derivation of the gravitational field equations from the Hilbert action in the presence of the constraint is a variational problem involving a conditional extremum. The standard method for solving such problems in cases where the constraints are not solvable in an explicit form is the method of Lagrange multipliers. Introducing a Lagrange multiplier (the scalar field Φ), we write the action in the presence of the constraint (1.1) in the form

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}. \quad (2.1)$$

Since Q is a restrictedly covariant scalar, integration is defined not on a manifold but only on a manifold with an edge, unlike the Hilbert action. Now *all the components of the metric tensor and the scalar Φ can be considered as independent quantities*, and when the action is varied, we obtain an equation that determines the edge, along with the equations of motion.

When varying the action with respect to field Φ (instead of the equals sign, the arrow indicates that the full derivatives that do not contribute to the equations of motion are omitted), we obtain

$$\delta S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta(Q \sqrt{-g}) d^4x = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x^\nu} \right) d^4x \rightarrow \\ \frac{c^3}{16\pi G} \int \delta \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \right) d^4x.$$

From the principle of stationary action, in view of the arbitrariness of the Φ variation, we derive Eq. (1.1).

The scalar curvature is covariant relative to arbitrary coordinate transformations; therefore, the calculation of its variation, and accordingly its contribution to the field equations, does not differ from that in Ref. 8.

The presence in the Lagrangian of the additional members besides the scalar curvature gives a contribution at the metric variation

$$\delta(Q \sqrt{-g}) = \left[\frac{\partial \delta \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} (\delta g^{\mu\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right] \rightarrow \\ \frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}.$$

This leads to the occurrence of a new object $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$ in the Hilbert–Einstein equations along with the energy–momentum tensor of matter $(\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right]. \quad (2.3)$$

Object (2.3) contains ordinary derivatives instead of covariant ones and therefore behaves like a tensor only under a restricted group of coordinate transformations. It is *covariant only relative to local special diffeomorphisms and global linear transformations of coordinates*.

Since the covariant derivative is defined for arbitrary coordinate transformations, its action is also defined for objects that are tensors relative to restricted group of transformations. The only difference is that the new objects belong again to the same type of tensors on which it acts.

Constraint (1.1) does not include matter fields. Therefore, the action for matter remains invariant under general coordinate transformations, as in GR. The covariant derivative of the expression on the left-hand side of (2.2) is zero for mixed tensors in view of the reduced Bianchi identity (the validity of which is due only to general covariance of the curvature tensor); therefore, taking into account the above, the derivative of the sum on the right-hand side of (2.2) must also be equal to zero. Thus, the object $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$ changes as a tensor at the stated transformations of coordinates, is symmetric, is a source of curvature of space–time like matter, and in the absence of matter, its covariant derivative on the field equation is equal to zero.

All this in aggregate makes it possible to call object (2.3) an energy–momentum density tensor of the gravitational field, expressed using the auxiliary field Φ . The field is auxiliary because it does not initially enter either the Hilbert action, the matter action, or the constraint equation. At the same time, the introduction of the field Φ is inevitable in the very essence of the mathematical problem. Section III considers the case where it is possible to explicitly exclude the scalar field Φ from the gravitational field equations. The question of the positive definiteness of the energy density of the gravitational field will also be considered there.

Thus, we have derived the system of equations involving constraint (1.1) and ten equations (2.2) for eleven unknowns listed above.

Since the remaining terms in (2.2) are generally covariant, on the whole, the system of gravitation equations will be covariant only relative to the indicated restricted group of coordinate transformations in the presence of the constraint.

From a physical point of view, constraint (1.1) can be interpreted as a sufficient condition for adiabaticity of the metric evolution process. We determine the vector of *the entropy density flux of the gravitational field* by the relation

$$s_{gr} v^\mu = \text{const} \times g^{\mu\lambda} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}, \quad v^\mu v_\mu = 1, \quad s_{gr} = \text{const} \times v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}. \quad (2.4)$$

In the Planck system of units, this constant can be written in the form

$$\text{const} = a \times \frac{k}{l_{pl}^2}, \quad l_{pl}^2 = \frac{\hbar G}{c^3}, \quad (2.5)$$

where k is the Boltzmann constant and l_{pl} is the Planck length. For a quasi-classical theory, the condition $|a| \leq 1$ must be satisfied. The sign of the constant a must be chosen so that the entropy density would be positive on time-like geodesic lines. Now constraint (1.1) can be written in the form of the relativistic adiabaticity condition¹⁴

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} s_{gr} v^\mu) = 0. \quad (2.6)$$

We note that under definition (2.4), all the thermodynamic potentials will be scalars only relative to the restricted group of transformations.

Thus, *the determination of the energy densities (2.3) and entropy (2.4) satisfying the conservation laws allows us to consider the gravitational field as an ordinary material medium¹⁴ and restores the unity of the material world violated by GR.*

For inclusion in the consideration of spinor matter and gauge fields, the system of equations (1.1, 2.2) can be formulated in a nonholonomic orthogonal frame. In addition to this, along with the affine connection, the spin connection is introduced. This is possible, despite the presence of the constraint, since the group of local Lorentz transformations is unimodular.

In the limiting case, when the energy–momentum density of the gravitational field is negligibly small in comparison with the energy–momentum density of matter, the system of equations (2.2) becomes the equations of GR and, in the limit of a weak gravitational field, leads to Newton’s law of gravitation. In this case, (1.1) restricts the gauge arbitrariness.

If we assume that matter had been playing an insignificant role and that the energy–momentum density of matter can be neglected at the initial stage of the evolution of the Universe, then the system of equations (2.2) is radically simplified. In this case, we can find the exact general solution of the system of equations (1.1, 2.2), and this solution will be unique.

III. EVOLUTION OF THE SPACE–TIME MANIFOLD IN THE ABSENCE OF MATTER

If we imagine that matter and the radiations generated by it were absent at the initial instant of time in the Universe, there would not be physical possibility to distinguish the points of outer space. What could be the metric properties of such a space in this case?

There are nine possible types of principal homogeneous spaces (admitting a group of motions) with a time-dependent metric (the Bianchi classification) in three-dimensional space.¹⁵ The introduction of the constraint restricts not only the group of coordinate transformations admissible in GR, but also the group of motions that preserve the metric. If the first group is given by condition (1.3), then at motion, by virtue of the requirement of form-invariance, this condition takes the form

$$g(x^0, x'^m) = g(x^0, x^m), \quad x^m \rightarrow x'^m \quad (m = 1, 2, 3),$$

that is, the determinant of the metric tensor does not depend on spatial coordinates. Note that this does not exclude the dependence of the components of the metric tensor on coordinates. These

dependences are given in Ref. 16 (pp. 265–268) for all nine types of homogeneous spaces. Calculating the determinant of the metric tensor, we make sure that it does not depend on spatial coordinates only for homogeneous spaces of type I and II according to the Bianchi classification. This means that if constraint (1.1) applies, only these two types of homogeneous spaces can exist:

$$\text{I. } g_{mn} = a_{mn}(x^0), g_{00} = a_{00}(x^0) > 0, g_{0n} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

$$\text{II. } g_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}x^1 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{22}x^1 + a_{23} \\ a_{12}x^1 + a_{13} & a_{22}x^1 + a_{23} & a_{22}(x^1)^2 + 2a_{23}x^1 + a_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{mn} = a_{mn}(x^0), g_{00} = a_{00}(x^0), g_{0n} = 0.$$

For the first of these, the components of the metric tensor depend only on time. In this case, if the spatial metric is non-degenerate, then the most general expression for the space–time interval is the transformation of coordinates with the Jacobian equal to unity,¹⁵

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^m \rightarrow x^m + \phi^m(x^0),$$

which can always be reduced to the form

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 + g_{mn}(x^0)dx^m dx^n, \quad \gamma = -\det(g_{mn}) > 0 \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

A. Gravitational equations for homogeneous spaces of type I

The absence of general invariance of action (2.1) does not allow us to eliminate the metric component g_{00} . The expressions for the Christoffel symbols and the nonzero components of the Ricci tensor for metric (3.1) will take the form

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\frac{dg_{00}}{dx^0}, \Gamma_{0l}^0 = 0, \Gamma_{nl}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{dg_{nl}}{dx^0}, \Gamma_{00}^m = 0, \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{2}g^{mk}\frac{dg_{kl}}{dx^0}, \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (3.2)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d\gamma}{dx^0}\right) - \frac{1}{4g_{00}}g^{mk}\frac{dg_{kp}}{dx^0}g^{pn}\frac{dg_{nm}}{dx^0}, \quad (3.3)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma g_{00}}}\frac{d}{dx^0}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}}g^{mp}\frac{dg_{km}}{dx^0}\right), \quad (3.4)$$

and the nonzero components of the energy–momentum density tensor (2.3) for metric (3.1) will take the form

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = -\frac{c^4}{16\pi G}\left[\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{g_{00}}\frac{d\Phi}{dx^0}\right) + \frac{2}{g_{00}\sqrt{g_{00}\gamma}}\frac{d\sqrt{g_{00}\gamma}}{dx^0}\frac{d\Phi}{dx^0}\right], \quad (3.5)$$

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = -\frac{c^4}{16\pi G}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{g_{00}}\frac{d\Phi}{dx^0}\right)\delta_k^p. \quad (3.6)$$

Taking these relations into account, the gravitational field equations (2.2) in mixed components

$$R_\mu^\lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\left[(\varepsilon_{gr})_\mu^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\mu^\lambda(\varepsilon_{gr})_\nu^\nu\right]$$

in the presence of the constraint will take the form

$$\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{g_{00}}\frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0}\right) = 0, \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{d\gamma}{dx^0}\right) - \frac{1}{4g_{00}}g^{mk}\frac{dg_{kp}}{dx^0}g^{pn}\frac{dg_{nm}}{dx^0} = \frac{\sqrt{\gamma g_{00}}}{2}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{g_{00}\sqrt{\gamma g_{00}}}\frac{d\Phi}{dx^0}\right), \quad (3.8)$$

$$-\frac{d}{dx^0}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}}g^{mp}\frac{dg_{km}}{dx^0}\right) = \delta_k^p\frac{d}{dx^0}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}}\frac{d\Phi}{dx^0}\right). \quad (3.9)$$

B. Solution of the system of equations (3.7 ... 3.9)

The system of equations (3.7 ... 3.9) is a nonlinear system of eight equations for eight unknown functions of the world coordinate time: $\Phi(x^0)$, $g_{00}(x^0)$, $g_{mn}(x^0)$ ($m, n = 1, 2, 3$). We show that there is an exact general solution to this nonlinear system of equations (which in itself is a significant, surprising fact).

Eq. (3.9) shows that

$$g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} + \delta_k^p \frac{d\Phi}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} L_k^p. \quad (3.10)$$

The constant matrix L_k^p is not arbitrary. Since Eq. (3.10) shows that

$$\frac{dg_{kn}}{dx^0} + g_{kn} \frac{d\Phi}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} g_{np} L_k^p, \quad (3.11)$$

the matrix must satisfy the condition

$$g_{np}(x^0) L_k^p \equiv g_{kp}(x^0) L_n^p. \quad (3.12)$$

For a general metric tensor, this condition will be satisfied only in the case where the matrix L_k^p is proportional to the identity matrix. Otherwise, the matrix $L_k^p = \text{diag}(L_1, L_2, L_3)$, and the metric tensor must also be diagonal.

Simplifying Eq. (3.10) with respect to the indices p and k gives

$$3 \frac{d\Phi}{dx^0} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} + \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} L_k^k. \quad (3.13)$$

Thus, in the case of a homogeneous space of type I, it is possible to explicitly express the derivative of the field Φ in terms of the metric field and its derivatives. This demonstrates the auxiliary nature of this field. Substituting (3.13) into (3.10), we get

$$g^{pm} \frac{dg_{km}}{dx^0} = \frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_k^p + \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} \left(L_k^p - \frac{1}{3} \delta_k^p L_n^n \right). \quad (3.14)$$

Equation (3.14) shows that

$$g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 + \frac{g_{00}}{\gamma} \left[L_k^p L_p^k - \frac{1}{3} (L_n^n)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Using this expression and Eq. (3.13), it is possible to eliminate Φ and all spatial metric components from Eq. (3.8), and we can write it in the form

$$3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{3c^2}{2\gamma} \left[L_k^p L_p^k - \frac{1}{3} (L_n^n)^2 \right] = g_{00} \sqrt{\gamma} \frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma g_{00}} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt} - c L_n^n \right), \quad (3.16)$$

where the notation $c dt = \sqrt{g_{00}} dx^0$ is introduced.

Equation (3.7) implies

$$\frac{1}{g_{00}} \frac{dg_{00}}{dt} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{T\sqrt{\gamma}}, \quad T = \text{const}. \quad (3.17)$$

This equation allows us to eliminate g_{00} from (3.16) and to write the equation for the function γ :

$$2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{\sigma}{\gamma} = 0, \quad \sigma = B_n^n - \frac{3}{2} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_n^n)^2], \quad (3.18)$$

where $\tau = t/T$ is the dimensionless proper time and $B_k^p = cT L_k^p$ is a matrix of dimensionless constants. The order of Eq. (3.18) can be reduced by introducing the function $u(\gamma)$, which is the dimensionless rate of change of the volume factor $\sqrt{\gamma}$

$$u = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau}. \quad (3.19)$$

The equation then takes the form

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma, \quad \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (3.20)$$

It is remarkable that, when $\sigma > 1/4$, the determinant of the spatial metrics is not equal to zero anywhere. In what follows, we will consider this restriction on the value of σ to be satisfied.

Integrating Eq. (3.20), we find that

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} = f(u), \quad f(u) = \sqrt{\frac{4u^2 - 2u + \sigma}{\sigma}} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\text{arctg} \frac{4u - 1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \right) \right], \quad (3.21)$$

where $\sqrt{\gamma_{\min}}$ is the minimum value of $\sqrt{\gamma}$ at $u = 0$.

Differentiating (3.21) with respect to τ gives

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{d\tau}, \quad \frac{df}{du} = \frac{4u}{4u^2-2u+\sigma} f(u).$$

Hence, we find the solution of Eq. (3.18) in the parametric form in consideration of (3.19) and (3.21):

$$\tau - \tau_{st} = \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2-2y+\sigma} dy. \quad (3.22)$$

Evolution of space begins at the time point τ_{st} from a state of rest with the minimal volume factor.

From Eq. (3.17), taking into account (3.22), it follows that

$$d \ln(\gamma g_{00}) = \frac{dt}{T\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma}} \frac{4f(u)du}{4u^2-2u+\sigma} = \frac{4du}{4u^2-2u+\sigma}.$$

Integrating this equation,

$$\frac{\gamma(u)g_{00}(u)}{\gamma_{\min}g_{00}(0)} = \exp\left(\int_0^u \frac{4du}{4u^2-2u+\sigma}\right) = \exp\left[\frac{4}{\sqrt{4\sigma-1}}\left(\arctg\frac{4u-1}{\sqrt{4\sigma-1}} + \arctg\frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}}\right)\right],$$

and taking into account determination (3.21), we get

$$\sqrt{\frac{g_{00}(u)}{g_{00}(0)}} = \frac{\sigma \cdot f(u)}{4u^2-2u+\sigma}.$$

Using this relation, proceeding from determination (3.19), we can show that

$$\sqrt{g_{00}(x^0)} dx^0 = cT\sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2-2u+\sigma} du. \quad (3.23)$$

The world coordinate time x^0 has been determined up to an arbitrary linear transformation. The quantity $u \geq 0$ by definition and does not change under such a transformation. Therefore, the parameter u with the dimensional factor can be called world physical time.

C. Energy–momentum density and scalar curvature of a homogeneous space on the field equations

Using relations (3.13) and (3.17), we can transform (3.5) as follows:

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = \rho_{gr} = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{1}{2\gamma} B_k^k \right]. \quad (3.24)$$

Using Eq. (3.18), we eliminate the second derivative, then

$$\rho_{gr} = \frac{c^2}{96\pi GT^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{3}{2\gamma} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] = \frac{c^2}{24\pi GT^2 \gamma} \left[u^2 - \frac{3}{8} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right]. \quad (3.25)$$

The first term in the brackets vanishes at small values of u , and the second term characterizing the global anisotropy of space is constant and positive and enters into the expression for the energy density with a minus sign. Now we can answer the question posed in 1972: “Accepting the agreement with observations, we want to understand *why the laws of physics should demand (rather than merely permit) a universe that is homogeneous and isotropic to high accuracy on large scales* [authors’ italics].” (Ref. 17, 30.1, p. 800). *The energy density of the gravitational field will be positive only in the case when a homogeneous space is isotropic ($B_m^n \propto \delta_m^n$).*

In this case, the solution of (3.14) can be presented in the form

$$g_{kn} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\min}} \right)^{1/3} g_{kn}(0). \quad (3.26)$$

Due to the invariance of the theory with respect to global linear transformations of coordinates, the original metric $g_{kn}(0)$ can always be reduced to a diagonal Euclidean form. Then, taking into account relations (3.26), (3.23), and (3.21), interval (3.1) takes the form

$$ds^2 = \left(cT\sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2-2u+\sigma} \right)^2 (du)^2 - f^{2/3}(u) dx^m dx^n \delta_{mn}. \quad (3.27)$$

We note that a homogeneous space of type II has an unremovable anisotropy. Therefore, bearing in mind the connection between the positive definiteness of the energy density and the

absence of anisotropy, it can be argued that *from a physical point of view, there is no other noncontradictory theory of a three-dimensional homogeneous space besides type I.*

We introduce the Hubble parameter H and the acceleration parameter q (instead of the deceleration parameter⁸) according to the modern representations:

$$H \equiv \frac{1}{6T\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad q \equiv 1 + \frac{1}{6H^2 T^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right). \quad (3.28)$$

The substitution of these expressions into (3.18) allows us to derive the equation describing change of the acceleration–deceleration eras:

$$q = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{u(\gamma)} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 + 1 - \frac{3}{4\sigma}. \quad (3.29)$$

This implies that two scenarios are possible. When $\sigma > 3/4$, only acceleration ($q > 0$) is possible. When $3/4 > \sigma > 1/4$, a change of eras is possible: acceleration–deceleration–acceleration. The change of eras occurs when the values

$$u_1 = \frac{\sigma}{1 + \sqrt{1 - 4\sigma/3}} > \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \approx 0.1376, \quad u_2 = \frac{\sigma}{1 - \sqrt{1 - 4\sigma/3}} < \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \approx 1.3624. \quad (3.30)$$

The recently discovered change of eras⁴⁻⁶ indicates that the second scenario takes place.

The maximum value of the deceleration is reached at $u = \sigma$

$$q_{\max} = 1 - \frac{3}{4\sigma} > -2 \quad (3.31)$$

After the onset of the second era of acceleration, q asymptotically approaches unity according to (3.29). The energy density (3.25) of the isotropic gravitational field is related to the Hubble parameter (3.28) by the relation

$$\rho_{gr} = \frac{c^2}{24\pi G T^2 \gamma(u)} u^2 = \frac{3c^2 H^2(u)}{8\pi G}. \quad (3.32)$$

Thus, the energy density of the gravitational field is proportional to the square of the rate of change of the volume factor and is equal to the critical density at any moment of time.

The Hubble parameter reaches its maximum value during the era of the first acceleration at $u = \sigma/2 < u_1$,

$$H_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp \left(-\frac{\arctg \sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}} \right), \quad (3.33)$$

and then monotonously decreases, tending to the constant value

$$H_{\infty} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}} + \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (3.34)$$

From (3.6), the spatial components of the energy–momentum density tensor are equal in the field equations to

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = \frac{c^2}{48\pi G T^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{1}{2\gamma} B_n^n \right] \delta_k^p, \quad (3.35)$$

and differ from the expression for the energy density in the sign of the last two members. These components can possess both positive and negative values during evolution. Eliminating the second derivate again by means of Eq. (3.18) and assuming $(\varepsilon_{gr})_m^n = -p_{gr} \delta_m^n$ (as accepted for macroscopic mediums), the gravitational field pressure can be written as

$$p_{gr} = -\frac{c^2}{48\pi G T^2} \frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma(u)}. \quad (3.36)$$

This implies that when $0.25 < \sigma < 0.5$, there is a change of the pressure sign at the following u values:

$$u_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\sigma}}{2} > \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \approx 0.146, \quad u_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\sigma}}{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \approx 0.8536. \quad (3.37)$$

The gravitational field has a positive pressure in the interval $u_3 < u < u_4$; in other cases, it has a negative pressure.

Let us consider the curvature tensor. Substituting relations (3.14) and (3.15) into (3.3) and (3.4), we find the expressions for the curvature tensor on the field equations:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{1}{12c^2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2, \quad R_k^k = -\frac{1}{2c^2 \sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt} \right). \quad (3.38)$$

Excluding the second derivatives, we can write the expressions for the scalar curvature of space–time R :

$$R = R_0^0 + R_k^k = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma(u)} \left(\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma \right). \quad (3.39)$$

The space–time curvature changes during evolution and possesses at first negative values, then positive values, and finally negative values once more.

D. Kinematics of a homogeneous space

According (3.32) and (3.33), the maximum density of the gravitational field energy is

$$\rho_{gr\max} = \frac{c^2 \sigma}{96\pi G T^2 \gamma_{\min}} \exp \left(-\frac{2 \arctg \sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}} \right). \quad (3.40)$$

Hence, for $\sigma \approx 1/4$,

$$T \sqrt{\gamma_{\min}} = \left(\frac{c^2 \sigma}{96\pi \cdot G \cdot \rho_{gr\max}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\arctg \sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}} \right) \approx \frac{c}{8e} \left(\frac{1}{6\pi G \rho_{gr\max}} \right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

Relations (3.23) and (3.28) can be written in the dimensional form

$$t - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H(u) = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u}{f(u)}. \quad (3.42)$$

According (3.21), $f(u)$ depends only on the constant σ . Substituting the current values (Ref. 18, pp. 110, 111) of the time from the beginning of evolution till now ($t^0 - t_{st} = 13.81 \times 10^9$ years) and the Hubble parameter ($H^0 = 67.3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$) into these relations gives a pair of equations with two unknowns (σ and the value of the parameter u^0 at the current time):

$$t^0 - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H^0 = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{f(u^0)}.$$

The quasi-classical approach is justified providing that the parameter $T \sqrt{\gamma_{\min}} \geq t_{pl}$, where t_{pl} is the Planck time. *According to (3.40), the maximum energy density of the gravitational field, which is four orders of magnitude smaller than the Planck density, corresponds to the minimum value of this parameter.* In this case, the solution of the system of equations is

$$\sigma = 0.2501278984, \quad u^0 = 6.118625359. \quad (3.43)$$

The results of the calculations of other parameters for this case are presented in Table I. In Table II, the results of a similar calculation are given, but with the maximum energy density equal to that achieved on accelerators with an energy of 1 TeV ($\rho_{gr\max} = (1 \text{ TeV})^4 \approx 2 \times 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$).

The characteristic values u^0 , $u/2$, $u/4$, σ , $u/3$, $u/1$, and $\sigma/2$, supplemented by a number of the intermediate values, have been chosen for the parameter u . In the tables, q is the cosmic acceleration, z is cosmological redshift, R is the scalar curvature of space–time, $t - t_{st}$ is the proper time, and H is the Hubble parameter.

TABLE I. Space kinematics at the maximum energy density $\rho_{g\text{rmax}} = 5.2 \times 10^{109} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.

$T\sqrt{\gamma_{\text{min}}}=t_{pl} \text{ s}; \rho_{g\text{rmax}} = 5.2 \times 10^{109} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}; \sigma = 0.2501278984; u^0 = 6.118625359$					
u	q	z	R, m^{-2}	$t - t_{st}, \text{s}$	H, s^{-1}
6.118625359	0.7599	0	-5.589×10^{-52}	4.358×10^{17}	2.181×10^{-18}
1.362294111	0	0.84987	-6.308×10^{-52}	1.876×10^{17}	3.074×10^{-18}
0.853462941	-0.5	1.41598	-6.144×10^{-52}	1.129×10^{17}	4.290×10^{-18}
0.8	-0.5819	1.52552	-5.890×10^{-52}	1.029×10^{17}	4.594×10^{-18}
0.7	-0.7600	1.79266	-4.732×10^{-52}	8.275×10^{16}	5.435×10^{-18}
0.6	-0.9789	2.20159	-6.939×10^{-53}	6.051×10^{16}	7.019×10^{-18}
0.5	-1.2496	2.93915	1.977×10^{-51}	3.650×10^{16}	1.089×10^{-17}
0.4	-1.5775	4.83051	3.079×10^{-50}	1.305×10^{16}	2.826×10^{-17}
0.35	-1.7543	7.80386	3.648×10^{-49}	4.161×10^{15}	8.511×10^{-17}
0.3	-1.9156	24.3239	1.843×10^{-46}	1.963×10^{14}	1.737×10^{-15}
0.28	-1.9643	87.6127	3.105×10^{-43}	4.848×10^{12}	6.945×10^{-14}
0.265826306	-1.9880	1090	9.993×10^{-37}	2.719×10^9	1.230×10^{-10}
0.250127898	-1.9985	8.09106×10^{10}	1.484×10^{11}	7.062×10^{-15}	4.723×10^{13}
0.146537059	-0.5	2.16717×10^{20}	-9.435×10^{66}	3.785×10^{-43}	5.317×10^{41}
0.137705891	0	2.24648×10^{20}	-2.067×10^{67}	3.125×10^{-43}	5.565×10^{41}
0.125063950	1	2.33685×10^{20}	-4.321×10^{67}	2.426×10^{-43}	5.689×10^{41}
0	∞	2.58860×10^{20}	-4.788×10^{68}	0	0

TABLE II. Space kinematics at the maximum energy density $\rho_{g\text{rmax}} = 2 \times 10^{49} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.

$\rho_{g\text{rmax}} = 2 \times 10^{49} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}; T\sqrt{\gamma_{\text{min}}}=8.6912868 \times 10^{-14} \text{ s}; \sigma = 0.2505131772; u^0 = 6.116607675$					
u	q	z	R, m^{-2}	$t - t_{st}, \text{s}$	H, s^{-1}
6.116607675	0.75979	0	-5.588×10^{-52}	4.358×10^{17}	2.181×10^{-18}
1.362058100	0	0.84978	-6.145×10^{-52}	1.876×10^{17}	3.074×10^{-18}
0.853190333	-0.5	1.41607	-9.218×10^{-52}	1.129×10^{17}	4.291×10^{-18}
0.8	-0.58143	1.52504	-5.894×10^{-52}	1.030×10^{17}	4.592×10^{-18}
0.7	-0.75942	1.79220	-4.740×10^{-52}	8.281×10^{16}	5.433×10^{-18}
0.6	-0.97810	2.20058	-7.194×10^{-53}	6.057×10^{16}	7.014×10^{-18}
0.5	-1.2485	2.93699	1.0963×10^{-51}	3.656×10^{16}	1.088×10^{-17}
0.4	-1.5757	4.82107	3.042×10^{-50}	1.313×10^{16}	2.813×10^{-17}
0.35	-1.7519	7.76490	3.545×10^{-49}	4.218×10^{15}	8.404×10^{-17}
0.3	-1.9124	23.6505	1.564×10^{-46}	2.130×10^{14}	1.602×10^{-15}
0.28	-1.9607	78.6976	1.638×10^{-43}	6.670×10^{12}	5.054×10^{-14}
0.263724335	-1.9863	1090	9.820×10^{-37}	2.741×10^9	1.221×10^{-10}
0.250513177	-1.9939	5.92654×10^5	2.294×10^{-20}	17.963	0.001859
0.146809667	-0.5	1.84758×10^{10}	-3.638×10^6	6.102×10^{-13}	3.301×10^{11}
0.137941901	0	1.91536×10^{10}	-7.974×10^6	5.037×10^{-13}	3.456×10^{11}
0.125256589	1	1.99255×10^{10}	-1.6669×10^7	3.910×10^{-13}	3.533×10^{11}
0	∞	2.20739×10^{10}	-1.8450×10^8	0	0

Thus, instead of the standard cosmological model (SCM), in this case, we have a continuum of cosmological models parameterized by the value of the maximum energy density $\rho_{g\text{rmax}}$. Comparison of the data in Tables I and II shows that the results of the calculation are in good agreement, at least up to redshift of the last-scattering surface,

$$z(0.2647 \pm 0.0011) = 1090, \quad z(u) = \left(\sqrt{\frac{\gamma(u^0)}{\gamma(u)}} \right)^{1/3} - 1, \quad (3.44)$$

despite a difference in the value of the maximum energy density of more than sixty orders. This circumstance excludes doubts about the possibility of an unambiguous description of the evolution of space in this range of redshift variation. It should be noted that the “last scattering” occurred less than 100 years after the beginning of the evolution process, as opposed to 373000 years in the Λ CDM model (Ref. 18, pp. 110, 111).

Significant differences between the models exist only at large values of z . The scalar curvature has a definite final value at the moment of the beginning of evolution; therefore, it is possible to determine the characteristic initial size as the reciprocal of the root of the modulus of curvature. This size depends on the value $\rho_{gr\max}$, and for the energy ranges considered in Tables I and II, can be from 10^{-34} to 10^{-4} meters.

E. Geodesics and entropy of a homogeneous space

The lines $x^1 = x^2 = x^3 = \text{const}$ are geodesics for metric (3.27), as for the Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric, and in each point, it is possible to introduce the concomitant coordinate system where *the variable t defined above will be a proper time*.

Substituting the Christoffel symbols (3.2) for metric (3.27) in the geodesic equations $x^\mu(\xi)$ with the natural parameter ξ ,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\xi} \frac{dx^\lambda}{d\xi} = 0,$$

and integrating the derived equations, we find:

$$\frac{dx^m}{d\xi} = A^m \gamma^{-\frac{1}{3}}(x^0), \quad \sqrt{g_{00}}(x^0) \frac{dx^0}{d\xi} = \pm \sqrt{A^2 \gamma^{-\frac{1}{3}}(x^0) + B}, \quad A^2 = A^m \delta_{mn} A^n, \quad A^m, B = \text{const.} \quad (3.45)$$

The hypersurface $t = t_{st}$ is the edge of the found space–time manifold. On the edge, $u(t_{st}) = 0$ and the cosmic acceleration (3.29), which is an invariant observable quantity, becomes infinite. In this regard, any geodesic extending to the edge, with a finite value of ξ , will be confronted with an unremovable singularity. Consequently, *the found manifold is maximally extendable along geodesics up to the edge*.

According to (3.45), the velocity 4-vector is defined in the concomitant coordinate system along the geodesic

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = (g_{00}^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0).$$

In this case, it follows from the adiabatic equation, in consideration of (2.4), (2.5), (3.17), and (3.21), that:

$$s_{gr} = a \frac{k}{l_{pl}^2} v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda} = \frac{a \times k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma(u)}} = \frac{\sigma \times k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma(u)}}. \quad (3.46)$$

In the last equality, we identified an unknown constant a with the only in the theory dimensionless parameter σ (3.18) that characterizes the found space–time manifold. It follows from (3.46) that the entropy density of the manifold currently depends rather weakly on the maximum energy density, and, at $\rho_{gr\max} = 2 \times 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$, is equal to

$$s_{gr}(u^0) = \frac{\sigma \times k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma_{\min f}(u^0)}} \approx 1.7 \times 10^{42} \text{ k} \cdot \text{m}^{-3}.$$

This value is 18 orders of magnitude greater than the contribution of all remaining entropy sources considered in the framework of GR.¹⁹

In view of (3.45), for an observer resting at the origin of the coordinates and connected by a 0-geodesic ($B = 0$) with a concomitant point, the distance is determined (as in GR) by the relation⁷

$$d(t) = c \times a(t^0) \times \int_t^{t^0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.47)$$

where $a(t)$ is the scale factor and t is the proper time. The factor $a(t) = \gamma^{1/6}(t)$ is determined in the case under consideration by the relations given above; after the discovery of cosmic acceleration, in GR, it is determined within the framework of the Λ CDM model.⁷ The parameters of this model are selected proceeding from a condition of providing the best agreement with all sets of experimental data that are available at the present time (their numerical values as of 2013 are given in Ref. 18).

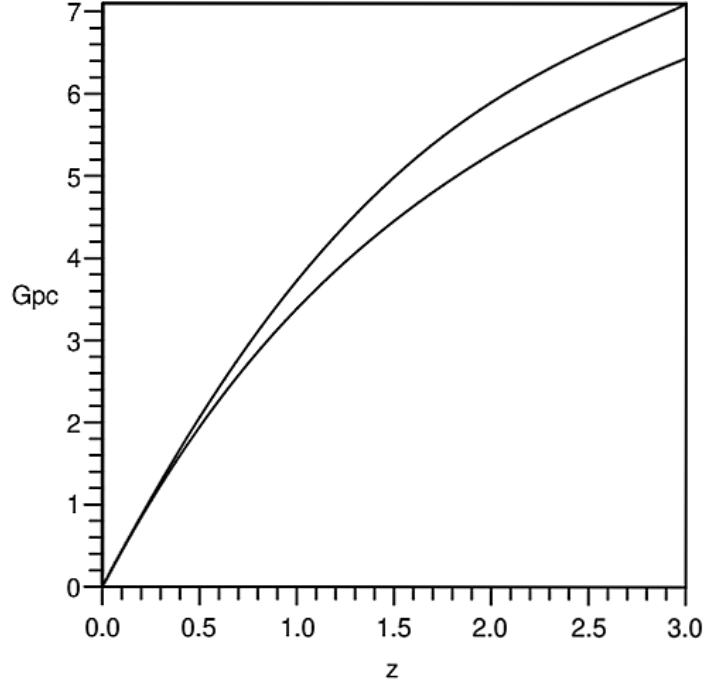


FIG. 1. Distance to an object (Gpc) depending on its redshift, as calculated by (3.47) for this theory and the Λ CDM models. The upper curve displays this theory, the lower curve displays the Λ CDM model.

All data sets relating to the dependence of distance on redshift that were available at the time of writing were given in a graphical form (Ref. 18, p. 364, Fig. 26.1). Comparison with these data sets shows that both dependences presented in Fig. 1 lie in the range of error of the experimental data. Moreover, as follows from the data in Fig. 2, even future experiments of this kind will be unlikely to allow a choice between these two dependencies. When the above dependence is continued to the region of large values of z , its course will be defined by the maximum energy density of the gravitational field, which is unknown at the present time. Fig. 2 shows the relative distance D_{rel} calculated as the ratio of the quantities presented in Fig. 1 over a wider range of redshift. The relatively small value of the deviation is associated with the integral nature of the dependence of the distance on redshift. For a local parameter, such as the Hubble parameter, the situation is different (Fig. 3). In this case, as the comparison of the calculation results with the experimental data shows (Fig. 4; see Ref. 20, p. 20), both dependences are also within the limits of the experimental error for $z < 2.5$. Figure 4 shows the quantity $H_{\text{rel}} = H_{\Lambda\text{cdm}}/H$ equal to the ratio of the quantities presented in Fig. 3 over a wider range of redshift. The discrepancy between them increases dramatically at large redshifts, as shown in Fig. 4. Thus, only one of the two theories can be valid.

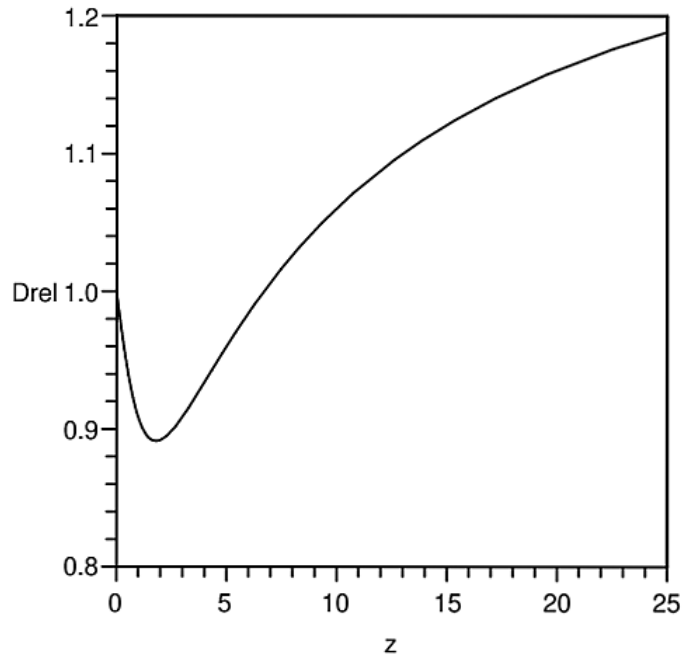


FIG. 2. Deviation of the ratio of the distances from unity calculated according to GR and this theory (vertically) depending on the value of redshift.

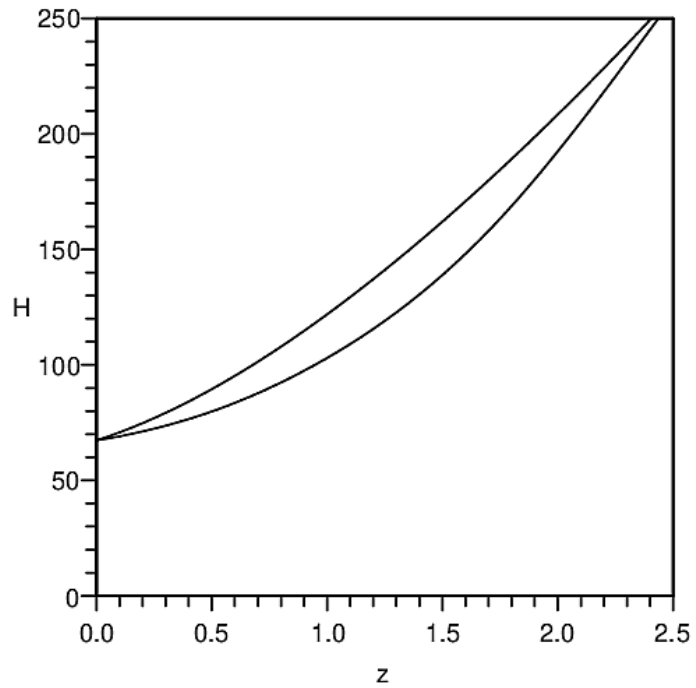


FIG. 3. Dependence of the Hubble parameter ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$) on redshift. The upper curve represents the Λ CDM model, the lower curve represents this theory.

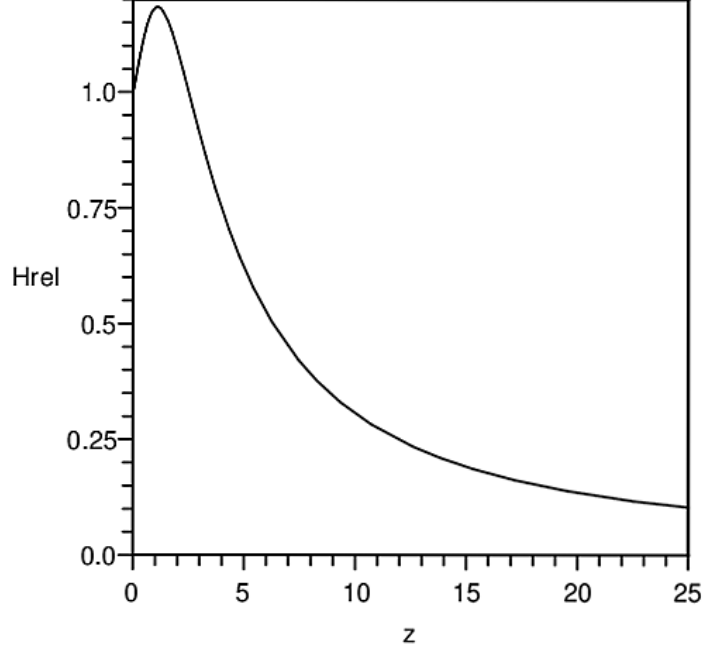


FIG. 4. Dependence of the ratio of the Hubble parameter in the Λ CDM model to its value in this theory.

It is essential that the dependence does not have free parameters in this region of redshifts, is determined only by the initial values at $z = 0$, and, as can be seen from Table I, is valid up to the initial instant of time. The hypotheses about the existence of dark energy and dark matter are introduced in GR within the framework of the Λ CDM model to ensure agreement with experiments. The hypothesis about the existence of inflatons is introduced to describe the dependence in the region of large values of z .

F. Temperature of the homogeneous gravitational field

The gravitational field in empty space possesses the characteristics inherent in a material medium: energy, pressure, and entropy. By virtue of the general laws of thermodynamics, another characteristic of the state of a medium is temperature, the change of which in an equilibrium process without a heat supply is associated with a change of the pressure by the relation²¹

$$S_{gr} \frac{d\theta_{gr}}{dt} = \frac{dp_{gr}}{dt}. \quad (3.48)$$

This equation allows us to determine the temperature of empty space from the found dependences of the pressure (3.36) and entropy density of the gravitational field (3.46) on u . Substituting the corresponding relationships into (3.48), we have

$$-\frac{c^2}{48\pi GT^2} \sqrt{\gamma(u)} d\left(\frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma(u)}\right) = \frac{\sigma \times k}{2l_p^2 c T} d\theta_{gr}. \quad (3.49)$$

Integrating this equation taking into account the dependence $\gamma(u)$ (3.21), we find

$$\theta_{gr}(u) = \frac{\hbar}{12\pi \times k \times T \sqrt{\gamma_{\min}}} \int_0^u \frac{1}{\sigma f(u)} \times \frac{\sigma - 2u(1 - \sigma)}{\sigma - 2u + 4u^2} du. \quad (3.50)$$

The value of the integral for the data in Tables I and II is the same and is 0.5 (with an accuracy of eight significant figures) at $u = u^0$ (the present moment of time). At the same time, the temperature of the gravitational field $\theta_{gr}(u^0)$ changes from 1.879×10^{30} K in the first case to 1.166 K in the

second. Fig. 5 implicitly shows the dependence of the relative temperature $T_{rel} = \theta_{gr}(u)/\theta_{gr}(u^0)$ on time.

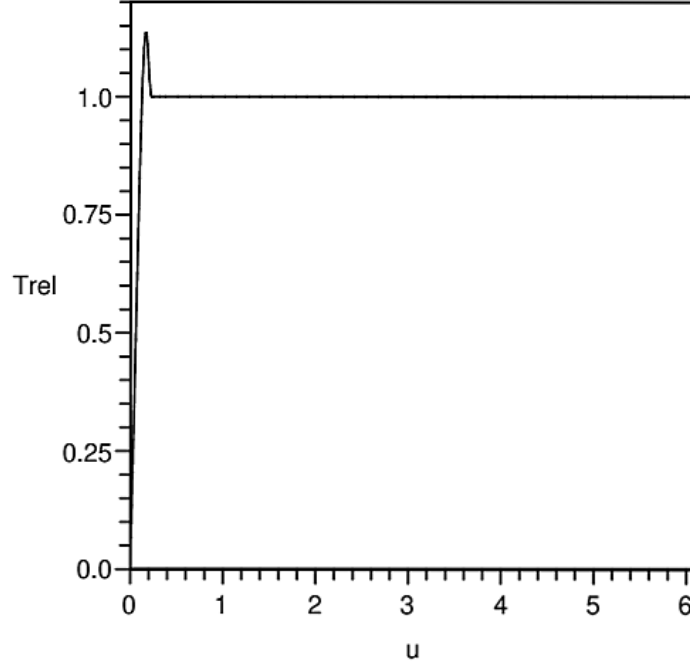


FIG. 5. Ratio of the current temperature to its value at the present time as a function of u (3.19).

The relationship between the dimensionless rate of change of the volume factor u and the proper time is seen in Tables I and II. It should be noted that for both variants presented in the table, the calculated dependences are almost identical. Aside from a short initial time interval, the temperature of the manifold remains at a constant level equal to its current value; that is, the gravitational field has had a constant temperature for almost 14 billion years up to the present moment, and it will continue to have this value until achieving complete equilibrium. It acts as a thermostat for the Universe.

The temperature of such a thermostat can be estimated by observing the temperature change of the bodies in thermal contact with it. Their temperature should asymptotically tend to the temperature of the thermostat when approaching the equilibrium state. In particular, if we consider the temperature of the cosmic microwave background (CMB) radiation, under adiabatic cooling it will tend to the temperature of the thermostat over time, but not to zero. At present, the temperature of the CMB radiation is $\theta_{rel}^0 = 2.7255$ K, and no changes have been recorded in the course of its adiabatic cooling. From this, we can conclude that the temperature of the gravitational field $\theta(u^0)$ is less than θ_{rel}^0 .

Equation (3.50) shows that

$$T\sqrt{\gamma_{min}} = \frac{0.5 \times \hbar}{12\pi k \theta_{gr}(u^0)}. \quad (3.51)$$

Using this relation and (3.41), it is possible to relate the maximum value of the global energy density ρ_{grmax} to the present temperature value:

$$\rho_{grmax} = \frac{3\pi}{2e^2} \times \frac{c^2}{G} \times \left(\frac{k\theta_{gr}(u^0)}{\hbar} \right)^2. \quad (3.52)$$

If we take the temperature $\theta_{gr}(u^0)$ as being equal to the CMB radiation temperature at the present time $\theta_{rel}^0 = 2.7255$ K for estimation, then $\rho_{g_{rmax}} < 1 \times 10^{50} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3} \sim (1.5 \text{ TeV})^4$. This is close to the value in the variant of evolution presented in Table II and *differs strikingly from the SCM, in which the energy density can reach a value 64 orders of magnitude greater* ($10^{19} \text{ GeV})^4$. Perhaps this is exactly the reason for the absence in the Universe of the hypothetical forms of matter that are not found in experiments at the Large Hadron Collider (LHC).

IV. BASIC MODEL OF THE EVOLUTION OF A HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC UNIVERSE

An increase in the intensity of the gravitational field during the evolution process will inevitably lead to the appearance of new structures of matter. Let us consider phenomenologically the influence of matter on the process of the evolution of the Universe.

As shown in Sec. III, there is a unique homogeneous space–time with an isotropic metric of the form

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

Let matter be born at some moment in this space–time. Owing to its homogeneity and isotropy, we write the tensor of the average energy–momentum density of matter in the form $(\varepsilon_{mat})^\nu_\mu = \text{diag}(\rho_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat})$.

In the presence of matter, the gravitational field equations (3.7)–(3.9) will take the forms

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma \sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{6g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 &= \sqrt{\gamma g_{00}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00} \sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{8\pi G}{c^4} (\rho + 3p)_{mat}, \\ -\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} \frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p &= \delta_k^p \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho - p)_{mat} \delta_k^p. \end{aligned}$$

Repeating all the computations taking into account these additional terms, instead of (3.20), we obtain the integro-differential equation

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.1)$$

where

$$M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = \frac{48\pi G T^2}{c^2} \left(-\gamma(\rho + p)_{mat} + \frac{1}{4} \int_0^u (\rho - p)_{mat} \left(\frac{d\gamma}{du} \right) \frac{du}{u} \right),$$

and it is supposed that *the pressure and density of matter are equal to zero at the initial time*.

The equations for cosmic acceleration, energy density, pressure, and scalar curvature of space are also modified in this case; instead of (3.29), (3.32), (3.36), and (3.39), we have

$$q = 1 - \frac{3}{2u} + \frac{3\sigma}{4u^2} + \frac{3}{4u^2} M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.2)$$

$$\rho_{gr} + \rho_{mat} = \frac{c^2}{24\pi G T^2} \frac{u^2}{\gamma(u)} = \frac{3c^2 H^2(u)}{8\pi G} \equiv \rho_{cr}(u), \quad (4.3)$$

$$p_{gr} + p_{mat} = -\frac{c^2}{48\pi G T^2} \frac{1}{\gamma(u)} \left[2u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right], \quad (4.4)$$

$$R = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma(u)} \left[\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right]. \quad (4.5)$$

According to observation data, the Universe currently contains macroscopic matter, electromagnetic radiation, and neutrinos. These components interact weakly both with each other and with the gravitational field. In this case, the conservation laws for each type of matter are satisfied separately, therefore the covariant derivative of the tensor $(\varepsilon_{mat})^\nu_\mu$ must be equal to zero.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} (\varepsilon_{mat})^\nu_\mu) - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda (\varepsilon_{mat})^\rho_\lambda = 0.$$

Substituting into this equation the expressions for connectivity (3.2) in the case of an isotropic metric, we obtain

$$\frac{d\rho_{mat}}{dx^0} = -(\rho + p)_{mat} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dx^0}$$

The pressure can be considered equal to zero for baryonic matter, $p = \rho/3$ for electromagnetic radiation, and for neutrinos, a similar relation will be valid as long as it is possible to neglect their mass. Under these conditions, for the components of matter, we obtain

$$\rho_b = \rho_b^0 \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \rho_\gamma = \rho_\gamma^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \rho_\nu = \rho_\nu^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}. \quad (4.6)$$

The values relating to the current time are denoted by the superscripts.

It is known that the energy densities of the two first components are respectively equal to $\Omega_b = 0.0499$ and $\Omega_\gamma = 5.46 \times 10^{-5}$ of the critical energy density at the present time (Ref. 18, pp. 110, 111). The data are less well defined for neutrinos, and $\Omega_\nu < 5.52 \times 10^{-3}$. Then, to estimate the maximum degree of the influence of matter on the evolution process, exactly this value of the relative density of neutrinos will be used.

At times not too far from the present, we have the following dependence of the average energy density and pressure of matter on the volume factor:

$$\rho_{mat} = \rho_{cr}^0 \left[\Omega_b \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} + \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.7)$$

The functional on the right-hand side (4.2–4.6) describes the inverse effect of matter on the metric. The functional is equal to zero at the beginning of evolution, and all the energy is concentrated in the gravitational field; therefore, to a first approximation, the inverse action can be neglected. Suppose that

$$M^{(1)}(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = 0,$$

where the index in parentheses indicates the approximation number. In this case, the change of the volume factor and its derivative will continue to be described by relations (3.20) and (3.21), and the critical density by relation (4.3). Thus, in this approximation, the energy density and matter pressure can be considered known functions of u at $u_b \leq u$:

$$\rho_{mat}(u) = \rho_{cr}^0 \frac{f(u^0)}{f(u)} \left[\Omega_b + \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{1/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.8)$$

A. Energy density of matter in the very early Universe

The conditions under which relations (4.8) are valid are violated at $0 \leq u \leq u_b$ (the very early Universe). The reason for this is the extremely high energy density of the gravitational field, reaching the level of the energy density of the LHC (as shown in Sec. III). Under these conditions, in addition to the particles listed, other components of the standard model of elementary particles and fields will also be born.

With this in mind, we redefine the dependences $\rho_{mat}(u)$ at the beginning of the evolution process as follows. Since there are no other sources of energy than gravity during this period, we assume that it is proportional to $\rho_{gr}(u)$ with a dimensionless coefficient that depends on the energy density of the gravitational field:

$$\rho_{mat}(u) = \lambda \times \left(\frac{u}{f(u)} \right)^n \times \rho_{gr}(u), \quad \lambda < 1, \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.9)$$

Excluding the gravitational energy density from relations (4.3) and (4.9), we have

$$\rho_{mat}(u) = \frac{\lambda \times u^n}{f^n(u) + \lambda \times u^n} \times \rho_{cr}(u), \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.10)$$

The constant λ and the quantity u_b are determined from the smooth conjugation conditions of dependences (4.8) and (4.10) at $u = u_b$. Equating separately the energy densities and their derivatives at $u = u_b$, we derive a system of two equations for determining u_b and λ :

$$\frac{\lambda \times u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \times u_b^n} = \left(\frac{u^0}{u_b}\right)^2 \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)}\right)^{2/3} \right], \quad (4.11)$$

$$4u_0^2 \times \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)}\right)^{2/3} \right] = \left(n + 2 - n \frac{\lambda \times u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \times u_b^n} \right) \frac{\lambda \times u_b^n (2u_b - \sigma)}{f^n(u_b) + \lambda \times u_b^n}. \quad (4.12)$$

This system of equations has two different solutions, and the solution with the smaller value of u_b is physically sensible. For this solution, $u_b \ll f(u_b) \ll f(u^0)$; therefore, Eq. (4.12) is simplified, and the solution takes the form

$$u_b \approx \frac{3(2+n) - \sqrt{9(2+n)^2 - 48(2+n)\sigma}}{16}.$$

The quantity u_b determines that moment of world time when matter is being separated from the gravitational field. This is due to a decrease in the absolute value of the scalar curvature over time. This happens specifically at the time of its first conversion to zero. It follows from (3.39) that $R(u) = 0$ when

$$u = \frac{6 - \sqrt{36 - 96\sigma}}{16}.$$

This expression is the same as u_b at $n = 0$. From (4.11), we find the ratio of the energy density of matter to the energy density of the gravitational field at the time of its separation from matter for this value:

$$\lambda \approx \Omega \times \left(\frac{u^0}{u_b}\right)^2 \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)}\right)^{2/3}, \quad u_b \approx \frac{6 - \sqrt{36 - 96\sigma}}{16}. \quad (4.13)$$

By substituting the values corresponding to the data of Table II into this relation, we find that this fraction was 2.754×10^{-20} . The energy density of the Universe is $1.390 \times 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ for $u = u_b$ at the time $t - t_{st} = 8.183 \times 10^{-13} \text{ s}$. When approaching the initial instant of time, the average energy density of matter decreases in accordance with (4.10), tending to zero together with the critical density.

B. Temperature history of the early and very early Universe

Let us now turn to the temperature history of the early Universe. In so doing, we will proceed from the main points set forth in Ref. 7. The early period includes the period of time when the temperature of electromagnetic radiation was in the range from 10^{11} K to 4000 K . It is stated⁷ that the following relations between the density of entropy s , temperature θ , and the scale factor a for electromagnetic radiation and neutrino matter are valid (the corresponding quantities are marked with the subscript γ or ν):

$$s_\gamma(\theta)a^3 = \text{const}, \quad s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3} a_B \theta_\gamma^3, \quad s_\nu(\theta)a^3 = \text{const}, \quad s_\nu(\theta) = \frac{7}{2} a_B \theta_\nu^3, \quad a_B = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3}.$$

Using the expressions for the scale factor obtained in the previous section, we rewrite these relations in the form

$$s_\gamma(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\gamma(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); \quad s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3} a_B \theta_\gamma^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{4}{3} a_B \theta_\gamma^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \\ \theta_{\gamma b} = \theta_\gamma(u_b). \quad (4.14)$$

$$s_\nu(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\nu(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); \quad s_\nu(\theta) = \frac{7}{2} a_B \theta_\nu^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{7}{2} a_B \theta_\nu^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \\ \theta_{\nu b} = \theta_\nu(u_b). \quad (4.15)$$

It is shown in Ref. 7 that Eq. (3.48) is also applicable to describing the change in the temperature of matter in the Universe. In this case, by virtue of the additivity of the contributions of components to the pressure and entropy density, Eq. (3.48) takes the form:

$$dp_{mat} = (s_\gamma(\theta) + s_\nu(\theta))d\theta. \quad (4.16)$$

We apply this equation to the description of the initial stage of evolution at $0 \leq u \leq u_b \ll u^0$. In this case, as follows from (4.8), the contribution of baryons to the total energy density of matter is negligible, matter can be considered an ultrarelativistic medium, and taking into account (4.3) and (4.10), we can write the pressure of matter in the form

$$p_{mat}(u) = \frac{\lambda}{3} \times \frac{c^2}{24\pi GT^2 \gamma_{\min}} \times \left(\frac{u}{f(u)}\right)^2, \quad 0 \leq u \leq u_b.$$

Neglecting the possible differences in temperature of the components of matter, we write Eq. (4.16), which determines the change in temperature, as

$$\frac{\lambda}{3} \times \frac{c^2}{24\pi GT^2} \times \frac{f(u)}{f(u_b)} d\left(\frac{u}{f(u)}\right)^2 = \frac{29}{6} a_B \theta_b^3 d\theta. \quad (4.17)$$

Integrating this equation, taking into account definition (3.21) of the function $f(u)$ and its derivative, for we get

$$\theta^3(u_b) \times \theta(u) = \frac{\lambda}{29a_B} \times \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{\min}} \times \frac{1}{f(u_b)} \int_0^u \frac{(\sigma-2u)udu}{(4u^2-2u+\sigma)f(u)}. \quad (4.18)$$

Substituting (4.13) for the parameter λ into this equation, we find the temperature $\theta(u_b)$ at the moment of separation of matter from the gravitational field.

$$\theta(u_b) = \left[\frac{1}{29a_B} \times \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{\min}} \times \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u_b^3 \times f(u_b)}{u_b^3 \times f(u^0)} \right)^{2/3} I(u_b) \right]^{1/4}, \quad (4.19)$$

where

$$I(u_b) = \int_0^{u_b} \frac{(\sigma-2u)udu}{(4u^2-2u+\sigma)f(u)}.$$

The calculation for the values of the parameters corresponding to the data in Tables I and II gives $I(u_b) = 2.302(\pm 0.0005) \times 10^{-4}$. At the same time, $\theta(u_b) = 1.345 \times 10^{21}$ K in the first case, and $\theta(u_b) = 1.145 \times 10^{11}$ K in the second case.

According to the calculations given in Ref. 7, the radiation and neutrino temperatures coincide at $\theta = 10^{11}$ K. Below this temperature, neutrinos lose equilibrium with other particles and their temperature decreases, asymptotically tending to the value

$$\theta_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \theta_\gamma.$$

At the same time, the radiation temperature will decrease at $u > u_b$ with the growth of the scale factor according to the law⁷

$$\frac{\theta_\gamma(u)}{\theta_\gamma(u_b)} = \frac{\gamma^{1/6}(u_b)}{\gamma^{1/6}(u)} = \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)}. \quad (4.20)$$

Substituting expression (4.19) here, we find the dependence of the current value of radiation temperature on $u(t)$ at $u > u_b$:

$$\theta_\gamma(u) = \left[\frac{1}{29a_B} \times \frac{c^2}{8\pi GT^2 \gamma_{\min}} \times \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u_b^3 \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} \int_0^{u_b} \frac{(\sigma-2u)u^2 du}{(4u^2-2u+\sigma)f^2(u)} \right]^{1/4} \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)}. \quad (4.21)$$

C. Relative density of neutrinos in the Universe

For $u = u^0$, that is, at the present moment in our Universe, the value of the temperature $\theta_\gamma(u^0)$ should be equal to the experimentally observed temperature of the CMB radiation, 2.7255 K. The

calculation by (4.21) of the parameters values corresponding to the data in Table I gives $\theta_\gamma(u^0) = 6.6215$ K; for the data in Table II it gives $\theta_\gamma(u^0) = 6.6147$ K.

In the constructed continuum of models of the Universe for the two extreme cases, which differ in maximum energy density by 64 orders of magnitude, the temperatures of the CMB radiation practically coincide with each other at the same point of time (of our present), but they are more than double the value observed in our Universe. There are no free parameters in the described phenomenological model; therefore, such a discrepancy could mean its collapse, if not for one circumstance. As noted at the beginning of the section, the relative neutrino density according to the data in Ref. 18 (pp. 110, 111) is $\Omega_\nu < 5.52 \times 10^{-3}$, and it, unlike the radiation density $\Omega_\gamma = 5.46 \times 10^{-5}$, is not exactly determined, along with their sum $\Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$. This quantity is included in the expression for the temperature of the CMB radiation (4.21) in the form of a constant factor $\Omega^{1/4}$. Therefore, the discrepancy from experiment can be eliminated if a new value Ω^* is introduced instead of the old density value $\Omega = 5.575 \times 10^{-3}$:

$$\Omega^* = (\Omega_\nu^* + \Omega_\gamma) = 1.6068 \times 10^{-4}, \quad \Omega_\nu^* = 1.6068 \times 10^{-4} - 5.46 \times 10^{-5} = 1.0608 \times 10^{-4}. \quad (4.22)$$

Thus, if the stated theory is correct, then *the currently unknown relative density of neutrinos in the Universe is equal to* $\Omega_\nu^* = 1.0608 \times 10^{-4}$. In this case, at $\rho_{g\text{rmax}} = 2 \times 10^{49} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$, $\theta_\gamma(u_b) = 4.719 \times 10^{10}$ K, and the maximum radiation temperature in the Universe $\theta_{\gamma\text{max}} = 9.404 \times 10^{10}$ K is reached at $t - t_{st} = 4 \times 10^{-13}$ s. As shown in Sec. III, $\rho_{g\text{rmax}} < 2 \times 10^{50} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$. With this value of the maximum possible energy density, the temperature of matter in the Universe has never exceeded $\theta_{\gamma\text{max}} = 1.230 \times 10^{11}$ K.

D. Value of the relative density of matter observed in the Universe

The total average energy density in the Universe (4.3) is always equal to the critical one, regardless of the presence or absence of matter. Therefore, taking into account (4.8), the fraction of the average energy density of matter in its total amount (at the found value of the relative neutrino density Ω_ν^* is

$$\text{quota}(u) = \frac{\rho_{\text{mat}}(u)}{\rho_{\text{cr}}(u)} = \frac{u^{02} f^2(u)}{u^2 f^2(u^0)} \left[\Omega_b \frac{f(u^0)}{f(u)} + \Omega^* \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3} \right].$$

In view of (3.21) and (3.42), this quantity depends on time as shown in Fig. 6.

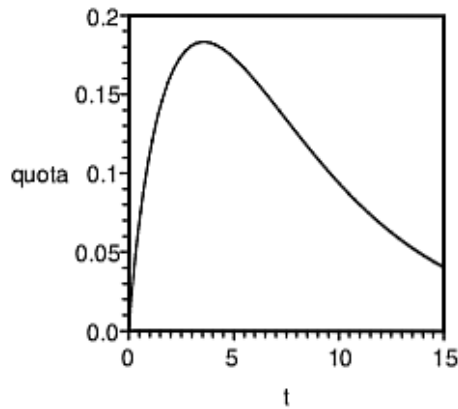


FIG. 6. Time dependence of the ratio of the average energy density of matter to the energy density in the Universe (in billions of years), $\rho_{g\text{rmax}} = 2 \times 10^{49} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.

The maximum fraction of the energy of matter does not exceed 0.1832; at the present time, this value is less than 0.055 and continues to decrease with time. In contrast to GR, where the energy density of matter increases indefinitely with decreasing time, here it reaches its maximum and then begins to decrease.

The remainder and main part of the energy of the Universe is the energy of the gravitational field

$$\rho_{gr}(u) = \rho_{cr}(u)(1 - \text{quota}(u)).$$

In view of (3.44), this value can be related to redshift of observed objects. We consider two such objects located in a homogeneous and isotropic gravitational field, the energy density of which depends on their distance to an observer (Fig. 7). Let us mentally select the volume of a sphere with a radius equal to the distance between the objects. Such surrounding gravitational field does not affect the dynamics of these objects. However, the object on the surface will be under the influence of gravity of the mass of such sphere, consisting of the mass of the main object and the distributed mass of the gravitational field. It is this additional mass (energy), and not dark matter, that manifests itself in the character of the dependences of the rotation curves of gravitation-coupled objects.

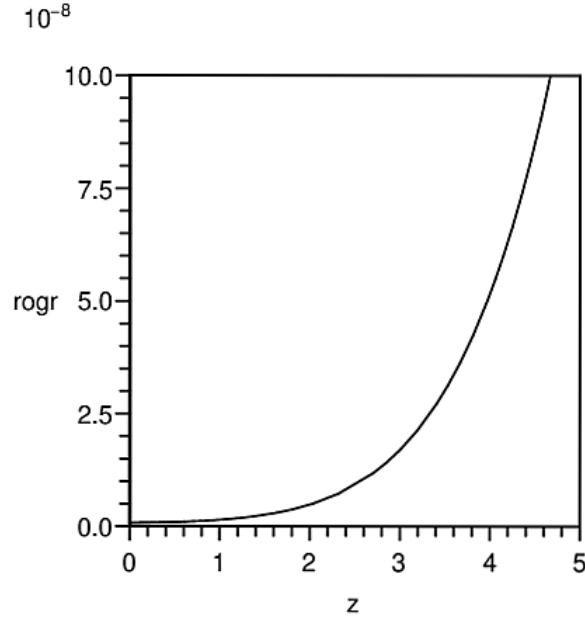


FIG. 7. Dependence of the energy density of the gravitational field ρ_{gr} ($10^{-8} \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$) on redshift in the location of the observed gravitation-coupled objects, $\rho_{gr\text{max}} = 2 \times 10^{49} \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$.

According to the data in Ref. 18 (pp.110, 111), the energy density of cold dark matter in GR is equal to

$$\rho_{cdm}(z) = \Omega_{cdm} \rho_{cr}^0 (1+z)^3, \quad \Omega_{cdm} = 0.265^{+0.16}_{-0.17}.$$

Fig. 8 shows the dependence of its ratio to the energy density of the gravitational field

$$\text{beta}(z) = \frac{\rho_{cdm}(z)}{\rho_{gr}(z)}$$

over a wider range of redshift. As can be seen from Fig. 8, a reasonable agreement with experiment can be obtained in a certain region of redshifts when calculating the rotation curves of gravitationally bound objects using a hypothetical dark matter density. However, there is a vast region of these values where such a calculation will lead to erroneous results. There are no

reasonable arguments for replacing the gravitational field, which is a real source of additional mass, with a hypothetical cold matter with a possible unpredictable error value. Thus, in contrast to GR, no new forms of matter besides those already known are required to describe the features of the evolution of the Universe.

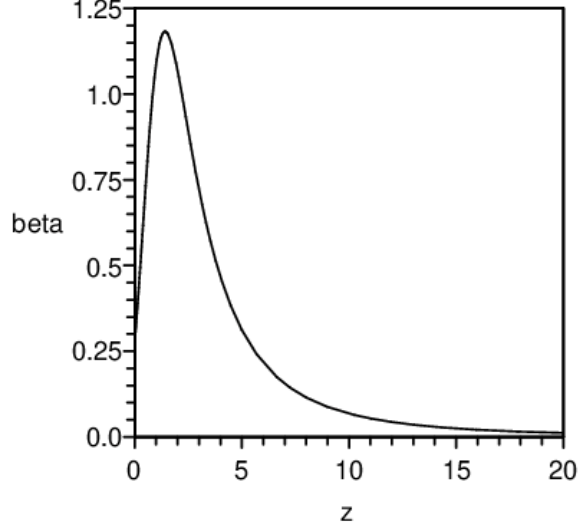


FIG. 8. Ratio of the energy density of cold dark matter to the energy density of the gravitational field depending on redshift.

E. Influence of the presence of matter on the evolution of the Universe

Now we estimate the influence of matter on the evolution of the space–time manifold. In the second approximation, for a given function $\gamma(u)$, we find

$$M^{(2)}\left(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}\right) \cong w(u),$$

$$w(u) = -2u^{02} \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega^* \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] + \int_0^u \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{2}{3} \Omega^* \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] \frac{4u^{02} du}{4u^2 - 2u + \sigma}. \quad (4.23)$$

Substituting (4.23) into (4.1), we derive the equation describing how matter in turn affects the change of the metric. The solution of this equation can be written as a quadrature:

$$\sqrt{\frac{\gamma(u)}{\gamma_{\min}}} = \psi(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)}\right), \quad (4.24)$$

$$t - t_{st} = T\sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4\psi(u)du}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)}. \quad (4.25)$$

The constant σ in these relations, in the same manner as in the previous section, has to be defined together with the value of u^0 from a condition of the equality of the evaluated age of the Universe and the Hubble parameter to their values observed now.

$$t^0 - t_{st} = T\sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4\psi(u)}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)} du, \quad H^0 = \frac{1}{3T\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{\psi(u^0)}. \quad (4.26)$$

The solution of this system of equations for $t^0 - t_{st} = 4.355 \times 10^{17}$ s, $H^0 = 2.181 \times 10^{-18}$ s⁻¹, maximum energy density $\rho_{gr\max} = 2 \times 10^{49}$ J·m⁻³, and relative density of matter components: $\Omega_b = 0.0499$; $\Omega_\gamma = 5.46 \times 10^{-5}$; $\Omega_\gamma^* = 1.0608 \times 10^{-4}$ has the form

$$T\sqrt{\gamma_{\min}} = 8.6912868 \times 10^{-14} \text{ s}, u^0 = 6.79 \dots, \sigma = 0.25050968.$$

The results of calculations carried out both with and without taking into account the presence of matter in the Universe are presented in graphical form in Figs. 9–11. The calculations were carried out at the value $\Omega_{\nu} = 5.52 \times 10^{-3}$. Therefore, the difference between each pair of dependencies will be even smaller when calculated with the real value $\Omega_{\nu}^* = 1.0608 \times 10^{-4}$. In view of the data provided in the previous section, it is possible to conclude that the influence of prehistory on the further course of the given dependences is insignificant in the range of redshifts less than 2.3. Furthermore, the birth of matter does not lead to a noticeable time shift in the change of the deceleration–acceleration eras.

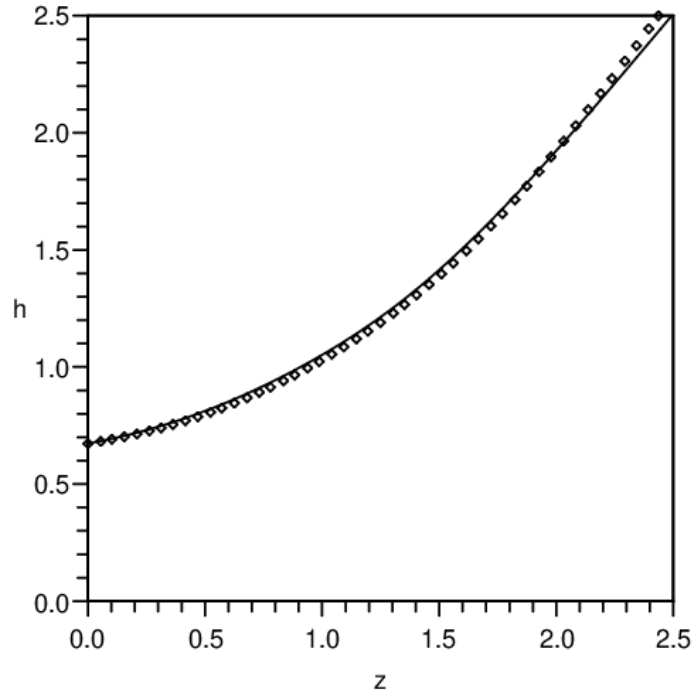


FIG. 9. Results of the calculation of the dependence of the Hubble parameter ($H = 100 h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$) on redshift taking into account (full line) and without taking into account (points) the presence of matter.

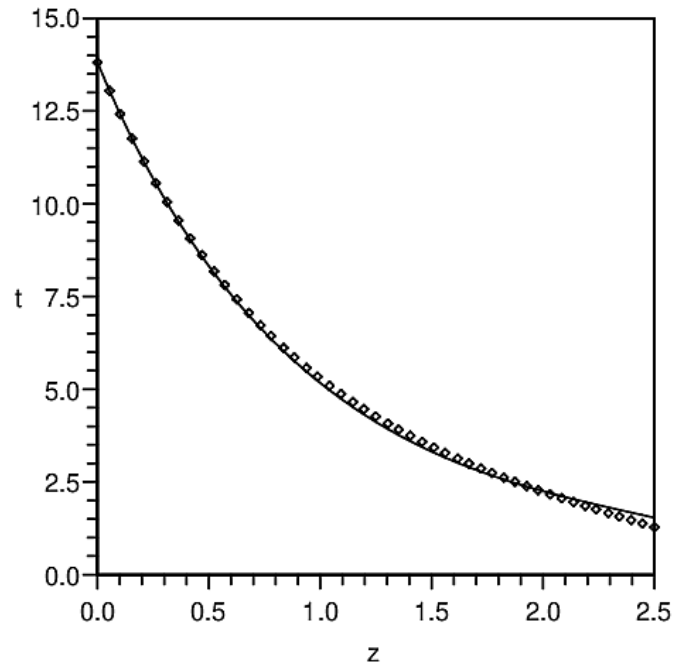


FIG. 10. Results of the calculation of the object age (in billions of years) depending on its observed redshift taking into account (full line) and without taking into account (points) the presence of matter.

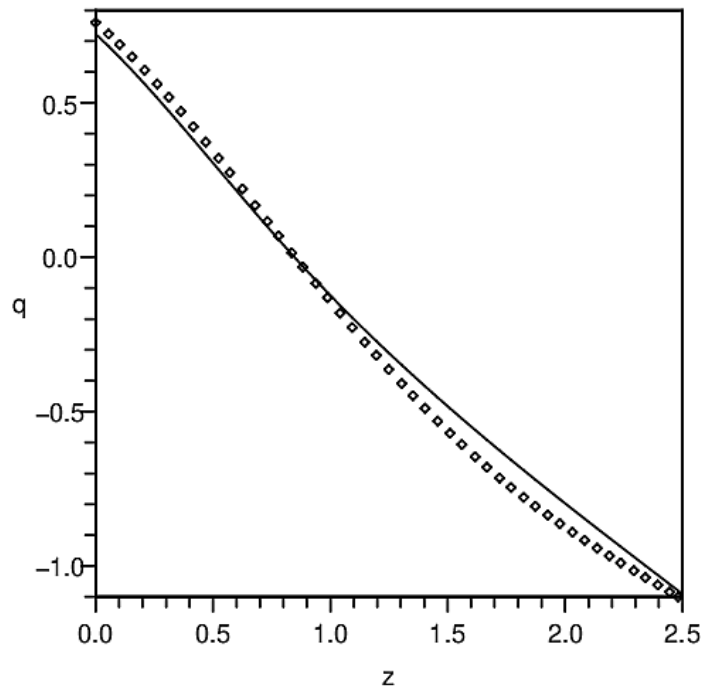


FIG. 11. Results of the calculation of the dependence of the cosmic acceleration against redshift taking into account (full line) and without taking into account (points) the presence of matter.

V. STATIC ISOTROPIC METRICS

Following the approach outlined in the section ‘‘Classical tests of Einstein’s theory’’ (Ref. 8, p.175-210), let us consider the static spherically symmetric metrics. The most general expression for the space–time interval can be reduced by the coordinate transformation with the Jacobian equal to unity⁸

$$x'^0 = x^0 + \phi(x^m), \quad x'^m = x^m$$

to the form

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - \frac{G(r)}{r^2}(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2 - C(r)(d\bar{x} \cdot d\bar{x}).$$

Constraint (1.1) is invariant relative to such transformations, but now, in contrast to GR, its presence does not allow reduction of the number of required metric components to two.

Using the Kronecker symbols δ_{mn} , we can write the metric tensor $g_{\mu\nu}$ as

$$g_{00} = F(r), \quad g_{0m} = 0, \quad g_{mn} = -C(r) \times \delta_{mn} - G(r) \frac{x_m x_n}{r^2}, \quad x_m \equiv x^m, \quad (5.1)$$

$$g(r) = \det g_{\mu\nu} = -FC^2(C + G).$$

The tensor $g^{\mu\nu}$ (the inverse of the metric tensor $g_{mn}g^{nk} = \delta_m^k$) has the form

$$g^{00} = \frac{1}{F(r)}, \quad g^{0m} = 0, \quad g^{mn} = -\frac{1}{C(r)}\delta^{mn} + \frac{G(r)}{C(C+G)} \frac{x^m x^n}{r^2}. \quad (5.2)$$

In the presence of constraint (1.1), it is more convenient to proceed not from the equations derived by varying the action with respect to components of the metric, but to choose as one of the varied functions $\Delta(r) = \sqrt{-g(r)}$.

The constraint gives the following contribution to action (2.1):

$$\Lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{1}{2g(r)} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = -\frac{\Phi'(r)g'(r)}{2(C(r)+G(r))g(r)} = -\frac{\Phi'(r)\Delta'(r)}{\Delta(r)^3} F(r)C(r)^2. \quad (5.3)$$

(the prime symbol here and below denotes differentiation with respect to r). The other terms can be found using the known results of calculations.^{8,11}

The scalar curvature and volume element are generally covariant and can therefore be found using spherical coordinates.

In spherical coordinates, the space–time interval has the form

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

By analogy with the ‘‘standard’’ form,⁸ we write this as follows:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^{*2}(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.4)$$

where $A(r) = G(r) + C(r)$, $r^*(r) = rC^{1/2}(r)$.

For this metric, the nonvanishing components of the connectivity differ slightly from the corresponding components of the ‘‘standard’’ form:⁸

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{F'}{2F}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r^*r'^*}{A}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r^*r'^*\sin^2\theta}{A}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{F'}{2A}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{r'^*}{r^*}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{r'^*}{r^*}, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \text{ctg}\theta. \end{aligned}$$

and the curvature tensor changes accordingly.

Using the expressions for the components of the connection, we find the scalar curvature:

$$R = \frac{1}{2F} \left(\frac{F'}{A}\right)' + \frac{1}{2A} \left(\frac{F'}{F}\right)' + \frac{2}{r^{*2}} \left(\frac{r^*r'^*}{A}\right)' + \frac{2}{A} \left(\frac{r'^*}{r^*}\right)' - \frac{2}{r^{*2}} + \frac{2}{A} \left[\left(\frac{r'^*}{r^*}\right)^2 + \frac{r'^*F'}{r^*F}\right].$$

Singling out the terms that form a pure divergence, it can be written in the form

$$R = \frac{1}{r^{*2}\sqrt{AF}} \frac{d}{dr} \left[r^{*2} \sqrt{AF} \left(\frac{F'}{AF} + \frac{4r'^*}{r^*A} \right) \right] - 2 \left[\frac{r'^*F'}{r^*AF} + \frac{1}{A} \left(\frac{r'^*}{r^*} \right)^2 + \frac{1}{r^{*2}} \right]. \quad (5.5)$$

The action for the gravitational field is

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + \Lambda) \sqrt{AF} r^{*2} \sin\theta dr d\theta d\phi dx^0,$$

and substituting here expression (5.5) for R and (5.3) for Λ , omitting the divergence and taking into account that $A = \Delta^2/FC^2$, we get

$$S_{gr} = \frac{c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{r^{*2}} + \frac{r^{*2}F}{\Delta r^4} (r^{*'})^2 + \frac{1}{\Delta r^4} r^{*3} r^{*'} F' + \frac{\Phi' \Delta' r^{*4} F}{2\Delta^2 r^4} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi dx^0.$$

Introducing the variable $\xi = r^3$ instead of r , the action takes the form

$$S_{gr} = \frac{3c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{9r^{*2}} + \frac{Fr^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{\Delta} r^{*3} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} + \frac{Fr^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) d\xi \sin\theta d\theta d\phi dx^0.$$

From the principle of least action, the gravitational field equations in space free from matter are found:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*4} F d\Delta}{\Delta^2 d\xi} \right) = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{9r^{*2}} - \frac{r^{*2}}{\Delta^2} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 F - \frac{r^{*3}}{\Delta^2} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} - \frac{1}{2\Delta^2} \frac{d}{d\xi} \left(r^{*4} F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{r^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*3}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) + \frac{r^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0, \quad (5.8)$$

$$-\frac{2\Delta}{9r^{*3}} - 2r^* \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^* F}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - r^{*3} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2 \frac{r^{*3} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0. \quad (5.9)$$

Equation (5.6) implies

$$\frac{r^{*4} F d\Delta}{\Delta^2 d\xi} = \alpha, \quad (5.6')$$

where α is a constant with the dimensions of length.

Multiplying Eq. (5.7) by 2Δ , subtracting from the result Eq. (5.8) multiplied by $2F$, and adding the result to Eq. (5.9) multiplied by r^* , after simple transformations, we reduce the equation to the form:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*4}}{\Delta} \left(\frac{dF}{d\xi} + F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \right] = 0.$$

This implies

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = \beta,$$

where β is another constant with the dimensions of length. Assuming $\beta = \sigma \alpha$, where σ is a numerical factor, and using (5.6'), this equation can be written in the form

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} = \sigma \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Taking into account that the function $\Phi(r)$ is defined to within a constant, we find:

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad (5.7')$$

and we rewrite Eq. (5.8) as

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*2}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) = \frac{r^{*3}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi}. \quad (5.8')$$

After substituting this expression into Eq. (5.9), it takes the form

$$r^{*4} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{Fr^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - 4 \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{r^* dr^*}{d\xi} \right)^2 + r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) \right] F + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0.$$

This equation is equivalent to

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right] + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0.$$

Integrating this equation over ξ , we obtain

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) - \beta_1 \frac{\Delta}{r^{*6}} + \frac{2}{9} \frac{\Delta}{r^{*6}} \int_0^\xi \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi = 0, \quad (5.9')$$

where $\beta_1 = \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right]_{\xi=0}$ is another constant with the dimensions of length. Thus, the solution of the initial system of equations depends on the choice of the values of the three constants α , β_1 , and σ .

First of all, we consider the case when $\alpha = 0$. In this case, from (5.6') it follows that

$$\Delta(r) = \text{const} = \Delta(\infty) = 1.$$

Next, sequentially from (5.7'), (5.8'), and (5.9'), we find

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\ln F(r). \\ \frac{r^*(r)}{r} &= \text{const} = \frac{r^*(r)}{r} \Big|_{r=\infty} = 1. \\ F(r) &= 1 - \frac{\beta_1}{r}.\end{aligned}$$

This solution coincides in form with the Schwarzschild solution. However, there is a fundamental difference related to the presence of the scalar $\Phi(r)$. Its value on the gravitational radius tends to infinity. On the one hand, this means that the solution cannot be continued beyond the gravitational radius, and on the other hand, the energy of the gravitational field also tends to infinity [Eq. (A.8) in Appendix I]. Therefore, this solution turns out to be nonphysical, and $\beta_1 = 0$ should be taken; the solution is the Minkowski metric.

Let us assume further that $\beta_1 = 0$ so the Minkowski metric can be a solution of this system of equations (in the case where the constant α is equal to zero). Integrating Eq. (5.9') one more time, we represent the function $F(r)$ in the form

$$F = \frac{2}{9} r^{*2} \int_{\xi}^{\infty} \left(\int_0^{\xi} \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi \right) \frac{\Delta}{r^{*6}} d\xi. \quad (5.9'')$$

Substituting the expression for the derivative Δ from Eq. (5.6'), we rewrite Eq. (5.8') in the form

$$\frac{d}{dr^*} \frac{1}{V} = \frac{3\alpha}{2r^*F} \frac{d\Phi}{dr^*}, \quad V = \frac{\Delta(r^*)}{3r^{*2}} \frac{d\xi}{dr^*}.$$

Passing in all relations from the derivatives with respect to $\xi = r^3$ to the derivatives with respect to r^* , and introducing the dimensionless coordinates r/α and r^*/α (keeping the previous notation r and r^* for them), we can write the initial system of equations as follows:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr^*} = \frac{3V(r^*)}{Fr^{*2}}, \quad (5.10)$$

$$V(r^*) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \frac{1}{r^*F} \frac{d\Phi}{dr^*} dr^*}, \quad \Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad (5.11)$$

$$F(r^*) = 2r^{*2} \int_{r^*}^{\infty} \left(\int_{r^*_{\min}}^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{1}{r^{*4}} V(r^*) dr^*, \quad (5.12)$$

$$\frac{\Delta(r^*)r^2}{r^{*2}} \frac{dr}{dr^*} = V(r^*). \quad (5.13)$$

Generally speaking, the nonzero value $r^*_{\min} = r^*(0)$ indicates the presence of an *edge* in the space–time manifold. Consider the behavior of the metrics at $r^*_{\min} = 0$ and the small values of r^* . If the integral

$$2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{V(r^*)}{r^{*4}} dr^* = b > 0 \quad (5.14)$$

exists, Eq. (5.12) implies that the function $F(r^*) \approx b \times r^{*2}$ for small r^* . Then, assuming that $V(r^*) \approx b_1 \times r^{*\nu} \geq 0$, $\Delta(r^*) \approx b_2 \times r^{*\delta} \geq 0$, and substituting these expressions into (5.8') and (5.10), we have:

$$\nu = 3, \quad b_1 = \frac{2b}{2-\sigma \times \delta}, \quad \delta = \frac{6}{2-\sigma \times \delta}. \quad (5.15)$$

From the last relation follows:

$$\delta = \frac{1 \pm \sqrt{1-6\sigma}}{\sigma},$$

and therefore $\sigma \leq 1/6$.

Integrating Eq. (5.13), for small values of r and r^* , we find

$$r^3(r^*) = 3 \int_0^{r^*} \frac{V(r^*)}{\Delta(r^*)} r^{*2} dr^* \approx 3 \frac{b_1}{b_2} \int_0^{r^*} r^{*(5-\delta)} dr^*. \quad (5.16)$$

The last integral exists only at $\delta < 6$. In this case,

$$\delta = \frac{1-\sqrt{1-6\sigma}}{\sigma}, \quad \sigma < \frac{1}{6}. \quad (5.17)$$

Consider now the expression for the energy of the static isotropic gravitational field (Appendix I). In this case,

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d \ln(F \Delta^{-\sigma})}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma}(r^*_{\min}) \right]. \quad (A.8)$$

The last term in this relation has a logarithmic singularity at $r^*_{\min} = 0$. The energy will have a finite value only at $r^*_{\min} \neq 0$, that is, *if there is an edge*. This is possible only at the value $\sigma = 1/6$.

The quantity r^*_{\min} is an independent parameter, and for its definition, additional considerations are necessary. First, suppose that, according to *Mach's principle*, the inertial mass M_{in} is related to the total gravitational field energy E outside the edge by Einstein's formula $E = M_{in} c^2$. Secondly, in accordance with *the experimental data*, we assume the equality of the magnitudes of the inertial and gravitational masses $M_{in} = M_{gr}$. Finally, based on *the principle of correspondence with GR* we assume that, for large values of r^* , the first-term coefficient of the expansion of the function $F(r^*)$ in powers of $1/r^*$ is equal to the ratio of the gravitational radius to α .

$$F(r^*) = 1 - \frac{r_{gr}}{\alpha} \frac{1}{r^*} + \dots = 1 - \frac{2M_{gr}G}{c^2 \alpha} \frac{1}{r^*} + \dots. \quad (5.18)$$

In this case, relation (A.8) turns into an equation that determines the quantity r^*_{\min} :

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2r^*_{\min} F(r^*_{\min})}{3V(r^*_{\min})} - \ln \frac{F(r^*_{\min})}{\Delta(r^*_{\min})^{1/6} (r^*_{\min})}. \quad (5.19)$$

The solution of the system of equations (5.10) – (5.13) and (5.19) can be found by a successive approximation method. Starting from the trial function $V^{(0)}(r^*)$ at the chosen initial value r^*_{\min} , it is possible to find the function $F^{(0)}(r^*)$ as a first approximation from (5.12), and then to find $\Delta^{(0)}(r^*)$ from (5.10) and the new value $V^{(1)}(r^*)$ from (5.11). We continue this process before deriving the values of the desired functions with the required accuracy at the N th step. The value of r^*_{\min} is found from Eq. (5.19), and the function $r(r^*)$ is found from Eq. (5.13).

We construct a trial function. If Eq. (5.18) is valid for large values of r^* , then Eqs. (5.10) and (5.11) imply that $V(r^*) \approx 1 - v/r^{*2} + \dots$. Because in the presence of the edge, the behavior of the desired functions is not determined for small values of r^* , it is natural to assume that the relative size of r^*_{\min} is greater than unity. Providing that $r^*_{\min} \geq 1$, a trial function can be specified as follows:

$$V^{(0)}(r^*) = 1 - v/r^{*2}. \quad (5.20)$$

Substituting this expression in Eq. (5.12), we find

$$F^{(0)}(r^*) = 1 - \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{1}{r^*} + \frac{2}{5} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{v}{r^{*3}} - \frac{v^2}{3} \frac{1}{r^{*4}}. \quad (5.21)$$

Based on the correspondence principle, in this approximation we have

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right). \quad (5.22)$$

A constant value of v can be chosen so that the values of the trial function and the first approximation coincide $V^{(0)}(r^*_{\min}) = V^{(1)}(r^*_{\min})$ at the point $r^* = r^*_{\min}$. Substituting (5.20) and (5.21) into (5.10), we find

$$\ln \Delta^{(0)}(r^*) = -3 \int_{r^*}^{\infty} \frac{V^{(0)}(r^*)}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} dr^*, \quad (5.23)$$

and then from (5.11) we have

$$V^{(1)}(r^*) = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{r^* F^{(0)}(r^*)} - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \left(1 + \frac{V^{(0)}(r^*)}{2r^* F^{(0)}(r^*)} \right) \frac{dr^*}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} \right)^{-1}. \quad (5.24)$$

In this case,

$$v = (1 - V^{(1)}(r^*_{\min}))r^*_{\min}{}^2. \quad (5.25)$$

This equation defines v as a function of r^*_{\min} .

Spline approximations were used for the calculations in the higher approximations. After five successive approximations, solving Eq. (5.19), we find (using six intervals in the calculations), with an error equal to fractions of a percent,

$$r^*_{\min} \approx 1.74.$$

As expected, this value is greater than one. In a dimensional form,

$$r^*_{\min} \approx 0.935r_{gr}. \quad (5.26)$$

It should be noted that, according to (5.26), the existence of trajectories located below the gravitational radius is not excluded. The results of the calculations are presented in Table III.

TABLE III. Solution of the system of equations (5.10 ... 5.13) at the value $\sigma = 1/6$.

$\sigma = 1/6; x_{\max} = 0.575; r_{gr}/\alpha = 1.859$				
$x = \alpha/r^*$	$V(x)$	$F(x)$	$\Delta(x)$	$C^{-1/2}(x) = r(x)/r^*$
0	1	1	1	1
0.1	0.9875	0.8160	0.7184	1.1792
0.2	0.9346	0.6381	0.4814	1.3523
0.3	0.8202	0.4746	0.2980	1.4556
0.4	0.6471	0.3386	0.1721	1.4378
0.5	0.4596	0.2366	0.0962	1.2288
0.575	0.3413	0.1813	0.0543	0

The value of one of the metric functions $C(r)$ increases indefinitely on approaching the edge; that is, there is an irreducible singularity on the edge. Thus, *in the presence of constraint (1.1), there is a stationary distribution of the centrosymmetrical gravitational field for which the equality of inertial (defined according to Mach's principle) and gravitational mass is satisfied.* The found solution asymptotically tends to the Schwarzschild solution for $r \gg r_{gr}$. This is enough to ensure that the agreement with the results of classical experiments for the verification of Einstein's theory is not violated.⁸

VI. FOUNDATIONS OF A QUANTUM THEORY OF GRAVITY

The formulation of the main provisions of a quantum theory is essentially impossible without invoking the classical theory.²² To construct a quantum theory, it is first necessary to determine the dynamic degrees of freedom. As shown in Sec. III, in the quasi-classical theory of gravity, there exists a unique homogeneous space-time with an isotropic metric of the form

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

For this metric, the expressions for the Christoffel symbols and the nonzero components of the Ricci tensor have the form

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \Gamma_{0l}^0 = 0, \Gamma_{nl}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{d\gamma^{1/3}}{dx^0} \delta_{nl}, \Gamma_{00}^m = 0, \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{6\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_l^m, \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (6.1)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{12g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2, \quad (6.2)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{6\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (6.3)$$

In the general case, the action of the gravitational field in the quasi-classical theory of gravity has the form (2.1)

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}.$$

Substituting expressions for the scalar curvature and omitting the total derivatives that do not contribute to the equation of motion, we find the expression for the action of the homogeneous and isotropic space of volume V

$$S_{gr} = \int L dt = \frac{c^2}{16\pi G} \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} dt \times V, \quad (6.4)$$

where L is the Lagrangian of the gravitational field, and the notation $cdt = \sqrt{g_{00}} dx^0$ is introduced.

It should be noted that in expression (6.4) we changed the sign of the action from minus to plus in comparison with (2.1). It was proved in GR¹⁵ that the scalar curvature must enter into action with a minus sign. However, this proof does not hold for homogeneous space (3.1). If there is a minus sign before integral (6.4), standard reasoning leads to the conclusion that this action cannot have a minimum. The correct sign is a plus.

The volume of homogeneous isotropic space can be represented in Planck units as

$$V = l_{pl}^3 \lambda = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{3/2} \lambda, \quad \lambda = \text{const.}$$

Then, the initial action for quantization will take the form

$$S_{qgr} = \int L dt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} \lambda dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}, \quad t_{pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2}. \quad (6.5)$$

In a quantum theory, it is necessary to introduce a specific value λ for the transition to the action. This is in contrast to the classical theory, in which the equations of motion do not depend on the magnitude of the action. The solution of the gravitational equations in the quasi-classical theory involves the parameter $(\gamma_{\min})^{1/2}$, which is the minimum value of the volume factor (3.21). If we take

$$\lambda = (\sqrt{\gamma_{\min}})^{-1}, \quad (6.6)$$

then action (6.5) takes the form

$$S_{qgr} = \int L dt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}. \quad (6.7)$$

In this case, the action turns out to be scale invariant with respect to change in the magnitude of the volume factor.

Let us carry out a canonical quantization of the gravitational field based on action (6.7). We introduce the scale-invariant generalized time-dependent coordinates

$$q^1 = \sqrt{\gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^2 = \ln \sqrt{g_{00} \gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^3 = \Phi, \quad 1 \leq q^1 < \infty, \quad -\infty < q^2, \quad q^3 < \infty, \quad (6.8)$$

their velocities $v^i = \dot{q}^i$ (time derivatives), and its conjugate momenta

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}: \quad p_1 = A \frac{4v^1}{3q^1}, \quad p_2 = A q^1 v^3, \quad p_3 = A q^1 v^2. \quad (6.9)$$

We find from here the velocities as functions of coordinates and momenta

$$v^1 = \frac{3q^1 p_1}{4A}, \quad v^2 = \frac{p_3}{A q^1}, \quad v^3 = \frac{p_2}{A q^1}. \quad (6.10)$$

Let us find the energy of the gravitational field in the Lagrangian's formalism

$$E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L = A \left(\frac{2}{3q^1} (v^1)^2 + q^1 v^2 v^3 \right). \quad (6.11)$$

Eliminating the velocities from this relation, using (6.10) we find the Hamiltonian of the gravitational field

$$H_{gr} = \frac{1}{A} \left(\frac{3}{8} q^1 (p_1)^2 + \frac{1}{q^1} p_2 p_3 \right). \quad (6.12)$$

We find the wave equation of the gravitational field passing in accordance with the rules of canonical quantization from coordinates and momenta to their operators,²² and replace the product of non-commutative operators with the symmetrized product

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_{gr} \Psi, \quad \hat{H}_{gr} = \frac{1}{A} \left(\frac{3}{16} \hat{q}^1 (\hat{p}_1)^2 + \frac{3}{16} (\hat{p}_1)^2 \hat{q}^1 + \frac{1}{\hat{q}^1} \hat{p}_2 \hat{p}_3 \right),$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{3\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 q^1 + \frac{16}{3q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \Psi. \quad (6.13)$$

The Hamiltonian depends on only one coordinate q^1 . Therefore, the wave function can be represented as a superposition of products of the wave eigenfunctions of the energy E and momenta p_2, p_3 .

$$\Psi(t, q^i) = \int a(E) b(p_2) c(p_3) \exp \frac{i}{\hbar} (-Et + p_2 q^2 + p_3 q^3) \phi_E dE dp_2 dp_3, \quad (6.14)$$

where

$$E \phi_E = -\frac{6\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{8}{3q^1} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \right) \phi_E. \quad (6.15)$$

Let us denote by a prime symbol the derivative with respect to the variable $x = q^1$. Then, Eq. (6.13) takes the form

$$x \phi_E'' + \phi_E' - \frac{8}{3x} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \phi_E + \frac{Et_{pl}}{6\pi\hbar} \phi_E = 0. \quad (6.16)$$

This equation belongs to the type of equations solvable in terms of Bessel functions (Ref. 23, p. 245). If

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{x} w' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{x^2} \right] w = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma - \text{const},$$

then $w = x^\alpha Z_\nu(\beta x^\gamma)$, where $Z_\nu(\beta x^\gamma)$ is a Bessel function of the 1st, 2nd, or 3rd kind. Comparing the last two equations, we find

$$\alpha = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \pm \left(\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar} \right)^{1/2}, \quad \nu = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}, \quad \phi_E = Z_\nu(\beta \sqrt{x}), \quad x = q^1. \quad (6.17)$$

The presence of the edge in the quasi-classical theory means that the evolution of the metric has a beginning. From the point of view of quantum theory, this should be interpreted as the wave function equaling zero before the initial moment of time. It is necessary to take $\phi_E(q^1) = 0$ for $q^1 \leq 1$ due to the requirement for the single-valuedness and continuity of the wave function across the entire space.²²

The solutions of Eq. (6.16) will decrease for large values of the argument only if the order of Bessel functions is real. This leads to the condition $p_2 \times p_3 \geq 0$. This requires that both momenta p_2 and p_3 have either non-positive or non-negative values. In addition, solutions will be valid for $\beta \geq 0$. Thus, for $E \geq 0$, the solution to Eq. (6.16) satisfying all these conditions is the functions

$$\phi_E(q^1, E) = J_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) N_\nu \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) - N_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) J_\nu \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right), \quad \nu = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}. \quad (6.18)$$

For $E < 0$, it is impossible to construct a solution that would vanish for $q^1 = 1$ and, at the same time, would be bounded at infinity. *Therefore, the gravitational field has only a continuous spectrum of energy, the spectrum of discrete energy levels is absent.*

Using the expression of Neumann functions via Bessel functions²³

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu \pi} [J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)] \quad (\nu \neq n),$$

we write $\phi_E(q^1)$ (if ν is not an integer) as follows:

$$\phi_E(q^1, E) = \frac{1}{\sin \nu \pi} \left[J_{-\nu} \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) J_\nu \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) - J_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) J_{-\nu} \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) \right], \quad \nu = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}$$

Hence it follows that this solution is an even function of ν and the energy levels are not degenerate.

The general view of the wave function of the very early Universe has the form of (6.14) (in the presence of only the gravitational field, that is, before the formation and separation of matter), and $\phi_E(q^1)$ is given by the relations (6.18). To define the specific wave function, it is necessary to set it at the initial time $t = 0$. Without such information, we can go a little further based on the results of

the quasi-classical theory. According to (3.7) and (3.13), the “velocities” are related to each other by the relations

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} = \frac{1}{2T\sqrt{\gamma}}, \quad T = \text{const}, \quad \frac{dq^2}{dt} = \frac{1}{2T\sqrt{\gamma_{\min} q^1}}, \quad (6.19)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\sigma}{3T\sqrt{\gamma}}, \quad \sigma = \text{const}, \quad \frac{dq^3}{dt} = -\frac{2}{3q^1} \frac{dq^1}{dt} + \frac{\sigma}{3q^1 T \sqrt{\gamma_{\min}}}. \quad (6.20)$$

From (6.19), taking into account (6.9), it follows that at $t=0$ the momentum p_3 had a certain positive value

$$p_3^0 = \frac{\hbar t_{pl}}{32\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} > 0. \quad (6.21)$$

Similarly, from (6.20), taking into account (6.9) and $v^1(0) = 0$, it follows that

$$p_2^0 = -\frac{\hbar t_{pl}}{24\pi} v^1(0) + \frac{\hbar t_{pl} \sigma}{48\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}}, \quad p_2^0 = \frac{\hbar t_{pl} \sigma}{48\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} > 0. \quad (6.22)$$

The momentum p_2 also had a certain positive value, and the product of the momenta values satisfies the condition $p_2^0 \times p_3^0 > 0$. Thus, the wave function can be represented at the initial moment of time as

$$\Psi(0, q^i) = \psi(q^1) \exp i \frac{t_{pl}(2\sigma q^2 + 3q^3)}{96\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}}, \quad \nu^0 = 4 \sqrt{\frac{2p_2^0 p_3^0}{3\hbar^2}} = \frac{t_{pl} \sqrt{\sigma}}{12\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} \ll 1. \quad (6.23)$$

The square of the function $\psi(q^1)$ gives the probability density of different values of the coordinate q^1 for $t=0$. The function $\psi^2(q^1)$ must be continuous, equal to zero for $q^1 = 1$, and exponentially decrease at infinity. These conditions are satisfied by the gamma distribution of the probability density²⁴ (with two parameters and a shift along the coordinate).

$$\psi^2(q^1) = \frac{(q^1-1)^k}{\Gamma(k)\mu^{k+1}} \exp\left[-\frac{(q^1-1)}{\mu}\right], \quad k > 0, \quad q^1 \geq 1. \quad (6.24)$$

Let us assume that $k = 1$ for eliminating the random distributions with extreme values of the derivative 0 and ∞ (as non-physical) at $q^1 = 1$. In this case, the average deviation of q^1 from unity is 2μ , and the variance of the distribution is $2\mu^2$.

Let us assume that the root-mean-square fluctuation of coordinate values is proportional to the ratio of the Planck time to the characteristic time of the quasi-classical theory. This ratio is included in the wave function as the index $\nu = \nu^0$ (6.23) of a Bessel function, therefore

$$\sqrt{2}\mu = \nu^0, \quad \nu^0 = \frac{t_{pl} \sqrt{\sigma}}{12\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} \ll 1. \quad (6.25)$$

Thus, the initial wave function (6.23) is completely defined, and along with it, in principle, the wave function of the very early Universe is also defined. Indeed, it follows now from (6.14), (6.18), (6.23), (6.24), and (6.25) that

$$\frac{\sqrt{2(q^1-1)}}{\nu} \exp\left[-\frac{(q^1-1)}{\sqrt{2}\nu}\right] = \int_0^\infty a(E) \phi_E(q^1, E) dE, \quad \nu = \nu^0. \quad (6.26)$$

From a physical point of view, this integral equation specifies the decomposition of $\psi(q^1)$ with respect to eigenfunctions of the Hamiltonian operator. Let us consider the solution of this equation. We multiply both sides of the equation by $\phi_E(q^1, E)$ and integrate with respect to q^1 from 1 to ∞ .

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{2(q^1-1)}}{\nu} \exp\left[-\frac{(q^1-1)}{\sqrt{2}\nu}\right] \phi_E(q^1, E) dq^1 = \int_1^\infty \left(\int_0^\infty a(E') \phi_{E'}(q^1, E') dE' \right) \phi_E(q^1, E) dq^1. \quad (6.27)$$

By virtue of Weber's integral theorem (Ref. 25, p. 470, eq. 6), the multiple integral in (6.27), after appropriate re-designations, can be represented as

$$\int_1^\infty \left(\int_0^\infty a(E') \phi_{E'}(q^1, E') dE' \right) \phi_E(q^1, E) dq^1 = \frac{6\pi\hbar}{t_{pl}} \left[J_\nu^2 \left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}} \right) + N_\nu^2 \left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}} \right) \right] a(E). \quad (6.28)$$

From (6.27) and (6.28) it follows that

$$a(E) = \frac{t_{pl}}{6\pi\hbar} \left[J_\nu^2 \left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}} \right) + N_\nu^2 \left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}} \right) \right]^{-1} \int_1^\infty \frac{\sqrt{2(q^1-1)}}{\nu} \exp\left[-\frac{(q^1-1)}{\sqrt{2}\nu}\right] \phi_E(q^1, E) dq^1. \quad (6.29)$$

The wave function of the very early universe is now fully defined

$$\Psi(t, q^i) = \int_0^\infty a(E) \exp i \left[\frac{t_{pl}(2\sigma q^2 + 3q^3)}{96\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} - \frac{Et}{\hbar} \right] \phi_E(q^1, E) dE, \quad \nu = \nu^0. \quad (6.30)$$

VII. CONCLUSIONS

A distinctive feature of the presented theory is that, in addition to its metric and connectivity, a space–time manifold with an edge is endowed with all the properties of a material medium, and the gravitational field is the main source of the energy of the Universe. A consequence of this is the observed high degree of homogeneity and isotropy of the Universe. Another feature of the theory is the possibility of constructing manifolds free from singularities. However, there is a singularity at the edge of the manifold (the moment of the beginning of the evolution of the Universe or the surface near the gravitational radius), where some observable invariant quantities take infinite values. This fact should be considered as a sign of the need to account for quantum effects near the edge.

The accuracy of the available astronomical observations is still insufficient to choose between the predictions of GR and the proposed theory of gravity. However, over the past twenty years, the physical natures of dark energy, dark matter, and inflatons have not been established, and no new particles with suitable properties have been detected at the LHC. This is an essential argument for doubting their existence.

From the point of view of the theory presented here, all observable effects associated with dark energy and dark matter are only manifestations of the material essence of the gravitational field. On the one hand, in the present era of the second acceleration, the gravitational field has a negative pressure; that is, it behaves like hypothetical dark energy. On the other hand, the energy density of the gravitational field exceeds the average energy density of matter on the galactic scale and, like dark matter, leads to an increase in the speed of observed gravitationally bound objects.

The initial expansion (inflation) is an immanent property of the evolution of the space–time structure associated with the presence of the gravitational field. The pressure of the gravitational field is in itself negative during this period of time, and there is therefore no need for any inflatons.

The global energy density of the Universe is currently 94.5% composed of the energy density of the gravitational field, and all known types of matter only contribute 5.5%. Furthermore, over time, the first will grow and the second will decrease. The absence of hypothetical forms of matter in nature means that the cosmology of GR (the Friedmann model) contradicts the results of experiments, while the predictions of the proposed theory are consistent with them.

It is established that the maximum global energy density in the Universe was less than the Planckian value by 64 orders of magnitude, and this is significantly lower than the value being currently attained in experiments at the LHC!

APPENDIX I. ENERGY OF THE STATIC ISOTROPIC GRAVITATIONAL FIELD

From the Bianchi identity, the energy density of the gravitational field T_μ^ν must satisfy to the relation

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} (\varepsilon_{gr})^\nu_\mu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu} (\varepsilon_{gr})^{\lambda\rho} = 0.$$

In the case of a static field, the energy of the gravitational field is conserved¹⁵:

$$E = \int (\varepsilon_{gr})_0^\nu \sqrt{-g} dS_\nu, \quad (\text{A.1})$$

where, according to (2.3),

$$(\varepsilon_{gr})_0^\lambda = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\delta_0^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^0} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\eta} - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} \right]. \quad (\text{A.2})$$

In a static field, the last two terms in this relation are equal to zero, and (A.1) [taking into account (A.2)] takes the form

$$E = -\frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) dV. \quad (\text{A.3})$$

Substituting the expressions for the components of the metric tensor from (5.2), we derive

$$E = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{C+G} \frac{d\Phi}{dr} \right) dV = \frac{c^4}{4G} \left[\int_0^\infty \sqrt{-g} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{(C+G)} \frac{d\Phi}{dr} \right) dr \right]. \quad (\text{A.4})$$

Let us consider now that, by definition and by relation (5.13),

$$C(r^*) + G(r^*) = \frac{r^4 (\sqrt{-g})^2}{r^{*4} F(r^*)}, \quad r^2 dr = \frac{V(r^*)}{\sqrt{-g}} r^{*2} dr^*. \quad (\text{A.5})$$

Substituting these expressions into (A.4) and moving to the dimensionless coordinate r^*/α , we have:

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d\Phi}{dr^*} \right]_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - \int_{r^*_{\min}}^\infty \frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*) \sqrt{-g}} \frac{d\Phi}{dr^*} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} dr^*. \quad (\text{A.6})$$

By virtue of relations (5.7') and (5.10),

$$\Phi = -\ln(F \Delta^{-\sigma}), \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} = \frac{3V}{r^{*2} F}, \quad \Delta = \sqrt{-g}. \quad (\text{A.7})$$

Taking into account these relations,

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \right]_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \times \ln F \Delta^{-\sigma} (r^*_{\min}). \quad (\text{A.8})$$

This includes boundary values for the derivative of the function $F(r^*)$.

Considering the behavior of the fields at infinity and fact that $dF/dr^* = 2F/r^*_{\min}$ from relation (5.12) at $r^* = r^*_{\min}$, we find:

$$-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} = -\frac{r_{gr}}{\alpha} + \frac{2F(r^*_{\min}) r^*_{\min}}{V(r^*_{\min})}. \quad (\text{A.9})$$

REFERENCES

- ¹ D. Hilbert, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* **3**, 395 (1915).
- ² A. Einstein, *Collection of Scientific Papers, Volume 1* (Nauka, Moscow, 1965).
- ³ P. K. Rashevsky, *Riemannian Geometry and Tensor Analysis* (Nauka, Moscow, 1967).
- ⁴ A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- ⁵ P. Schmidt et al., *Astrophys. J.* **507**, 46 (1998).
- ⁶ S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- ⁷ S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, New York, 2008).
- ⁸ S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- ⁹ Y. L. Kokurin, *Quantum Electron.* **33**(1), 45 (2003).
- ¹⁰ L. Smolin, arXiv: hep-th/0904.4841v1 (2009).
- ¹¹ L. Smolin, arXiv: hep-th/0303.185v2 (2003).
- ¹² T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Clarendon Press, Oxford, 1984).
- ¹³ D. D. Ivanenko and G. A. Sardanashvili, *Gravity* (URSS, Moscow, 2004).
- ¹⁴ L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Volume 6* (Pergamon Press, Oxford, 1987).
- ¹⁵ L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Volume 2* (Pergamon Press, Oxford, 1971).
- ¹⁶ A. Z. Petrov, *Einstein Spaces* (Pergamon Press, Oxford, 1969).
- ¹⁷ C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- ¹⁸ K. A. Olive et al. (Particle data group), *Chin. Phys. C*, **38**(9), 090001 (2014).
- ¹⁹ C. A. Egan and C. H. Lineweaver, arXiv: astro-ph.CO/0909.3983v.1 (2009).
- ²⁰ D. N. Spergel et al., *Astrophys. J.* **5** (2007); arXiv: astro-ph/0603449v.2 (2007).

- ²¹ L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1, Volume 5* (Pergamon Press, Oxford, 1980).
- ²² L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- ²³ E. Janke, F. Emde, and F. Lösch, *Tables of Higher Function* (McGraw-Hill, New York, 1960).
- ²⁴ D. J. Hudson, *Statistics* (CERN, Geneva, 1964).
- ²⁵ G. N. Watson, *A treatise on the Theory of Bessel function* (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).

Основы квазиклассической и квантовой теории тяготения
Соболев Александр Павлович
sapsolto@mail.ru

Аннотация

В общей теории относительности (ОТО) при выводе уравнений гравитационного поля использовалось предположение о ковариантности их относительно произвольных преобразований координат. За истекшее столетие неоднократно высказывалось мнение, что такое равноправие всех систем координат, может не соответствовать реальности. Общая ковариантность ограничена в статье за счет введения связи. С физической точки зрения связь интерпретируется как достаточное условие адиабатичности процесса эволюции метрики пространственно-временного континуума. Сформулированы исходные уравнения теории тяготения со связью. На этой основе построена единая модель эволюции современной, ранней и очень ранней Вселенной, согласующаяся с наблюдательными астрономическими данными без привлечения гипотез о существовании «темной энергии», «темной материи» и «инфлатонов». Утверждается, что: основным источником энергии Вселенной является гравитационное поле, максимальная глобальная плотность энергии во Вселенной была на 64 порядка меньше планковской, а плотность энтропии на 18 порядков превышает предсказываемое ОТО значение. Рассчитана величина относительной плотности нейтрино в настоящее время и максимальная температура материи в ранней Вселенной. Сформулировано волновое уравнение гравитационного поля и построена волновая функция очень ранней Вселенной. Показано, что рождение Вселенной имело случайный характер.

Ключевые слова: гравитация, квантовая гравитация, эволюция Вселенной ограниченная ковариантность, энтропия гравитационного поля, темная материя, темная энергия.

1. Введение

Более ста лет назад при выводе уравнений гравитации из вариационного принципа Д. Гильберт сформулировал «аксиому общей инвариантности действия по отношению к произвольным преобразованиям мировых параметров (координат)» и выбрал « R - инвариант тензора Римана (кривизны четырехмерного многообразия)» в качестве лагранжиана гравитационного поля [1].

Тремя годами ранее А. Эйнштейн писал [2, с. 237, 243]: «Необходимо, впрочем, подчеркнуть, что у нас нет никаких оснований для общей ковариантности уравнений гравитации.... Мы не знаем относительно какой группы преобразований должны быть ковариантны искомые уравнения. Сначала наиболее естественным кажется требование ковариантности системы уравнений относительно *произвольных* (курсив А. Эйнштейна) преобразований».

Успех канонической теории тяготения как будто бы подтвердил правильность такого допущения, а само оно со временем обрело статус фундаментального принципа. Хотя ранее высказывалась и другая противоположная точка зрения [3, с. 631]: «...физический смысл ОТО сводится именно к созданию новой теории тяготения. Правда, сам автор теории А. Эйнштейн и ряд его последователей придерживаются иной точки зрения. Они считают, что ОТО помимо этого (и в первую очередь) устанавливает принцип равноправия всех систем отсчета....С этой точкой зрения, однако, трудно согласиться, так как при этом равноправие систем отсчета с точки зрения формально-математического аппарата незаконно истолковывается как равноправие и по их физическому существу дела».

В свете новых экспериментальных данных [4-6] ОТО уже не кажется столь незыблемой, как прежде. Для объяснения полученных результатов в рамках этой теории пришлось ввести некие гипотетические сущности (Λ CDM – модель [7]), природа которых до настоящего времени неясна. «*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*»; возможно необходимость введения в ОТО (по мере развития новых методов астрономических наблюдений) сначала «инфлатонов», а теперь еще «темной энергии» и «темной материи» это симптомы дефекта в самой её основе.

ОТО нарушает единство материального мира. В ОТО гравитационное поле само по себе не обладает свойствами материальной среды. Его плотность энергии-импульса равна нулю. Это прямое следствие общей ковариантности уравнений гравитационного поля. Попытки же ввести не обще ковариантную плотность энергии-импульса означают фактически отказ от исходной аксиомы общей ковариантности.

По нашему мнению, именно, *общая ковариантность уравнений является источником трудностей* ОТО. Обнаруженные уже на стадии ее формирования, сегодня эти трудности стали совокупностью нерешенных до настоящего времени проблем: проблемы энергии, сингулярностей, космологической постоянной, холодной темной материи, проблемы описания элементарных частиц, предстающих в канонической теории гравитации в облике «микроскопических черных дыр» и, наконец, невозможность построения квантовой теории тяготения на основе ОТО.

Возможный путь построения *не обще ковариантной теории тяготения без нарушения аксиом Гильберта* видится во введении априорной связи, ограничивающей выбор системы координат. Ранее предпринимались попытки такого рода, пример тому унимодулярная теория тяготения, истоки которой восходят к А. Эйнштейну. Следствием введения связи является возникновение края у пространственно - временного многообразия, поэтому *ограничено ковариантные, геометрические объекты определены только на многообразиях с краем*. При наличии дифференциальной связи появляется возможность выбрать положение края таким образом, чтобы выделить не сингулярную внутреннюю область многообразия.

При таком подходе лежащий в основании ОТО общий принцип относительности, как принцип эквивалентности всех систем отсчета, совместимых с псевдоримановой метрикой, не нарушается. Кроме того не ставится под сомнение и незыблемость принципа инвариантности действия *материи* относительно произвольных преобразований координат. В то же время в отличие от ОТО *связь ограничивает общую ковариантность уравнений гравитации*. Таким образом, априори в этом случае выполняется лишь «среднесильный принцип» эквивалентности [8]. Это, однако, не может являться основанием для того, чтобы отвергнуть предлагаемый подход как противоречащий экспериментам по проверке сильного принципа эквивалентности для тел космических масштабов [9].

Дело в том, что уже в ОТО в рамках Λ CDM – модели само пространство наделяется энергией. То же самое происходит и при введении априорной связи. В силу нелинейности уравнений гравитации пространство становится самогравитирующим объектом. Для такого объекта можно определить инертную массу и гравитационную массу. Решение уравнений гравитации имеет достаточно свободных параметров для того, чтобы не только обеспечить требование равенства инертной массы гравитационного поля массе тяготеющей, но и определить инертную массу в соответствии с принципом Маха (последняя задача так и не была решена в ОТО). С этой точки зрения результаты экспериментов [9] следует рассматривать как указание на то, что *существуют только такие (квази)стационарные самогравитирующие объекты, для которых инертная масса равна массе гравитационной*.

Аксиомы Гильберта сформулированы на координатном языке. Гравитационное поле представлялось десятью компонентами $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ метрического тензора. Кроме того

предполагалось, что в уравнения гравитации могут входить производные метрики не выше второго порядка.

В математической физике не существует теоремы, запрещающей существование связи между компонентами метрики. Однако унимодулярная теория оказалась неприемлемой с физической точки зрения, что и побудило Эйнштейна отказаться от нее в пользу обще ковариантной теории. В настоящее время теории такого типа рассматриваются в качестве подхода к построению *квантовой теории гравитации* [10]. Среди других возможных подходов [11] *ограничение общей ковариантности в наименьшей степени затрагивает диктуемые здравым смыслом представления об окружающем нас мире.*

Для введения ограничений на группу преобразований координат, безусловно, должны иметься, достаточно весомые физические основания.

Существует глубокая аналогия между математическим описанием гравитационного взаимодействия в ОТО и описанием калибровочных взаимодействий в физике элементарных частиц [12]. Для последних единственным способом калибровки в силу требования общей ковариантности является наложение условия равенства нулю 4-дивергенции калибровочных полей. Для гравитационного поля аналогичным условием было бы требование равенства нулю 4-дивергенции упрощенной по паре индексов связности $\Gamma_{\nu\rho}^{\rho}$ согласованной с метрикой. Однако в силу того, что ОТО не является калибровочной теорией [13], во избежание противоречий с исходными положениями такое условие следует рассматривать не как калибровку, а как связь. И эта связь должна разрешаться до получения уравнений движения из вариационного принципа.

Наше основное предположение состоит в том, что (в отличие от унимодулярных теорий) компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ *связаны законом сохранения* (физическая интерпретация связи дана в разделе 2):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho}^{\rho} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \right) = 0, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Левая сторона (1.1) не является обще ковариантным скаляром. При произвольном преобразовании координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ [8]

$$g'(x') = g(x) \cdot J^2, \quad J = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right). \quad (1.2)$$

Из определения скаляра следует, что детерминант метрического тензора изменяется как скаляр при преобразованиях координат с якобианом преобразования равным по модулю единице

$$g'(x') = g(x), \quad J = 1. \quad (1.3)$$

На ограниченной группе преобразований координат, на которой $\sqrt{-g}$ является скаляром, связь в некоторой области пространственно-временного континуума *становится геометрическим объектом и приобретает физический смысл.*

Таким образом, *связь (1.1) является геометрическим объектом и определяет край многообразия только при ограничении группы допустимых преобразований координат от локальных общих диффеоморфизмов до специальных диффеоморфизмов с равным единице якобианом.* Кроме того *связь (1.1) допускает глобальные линейные преобразования координат.*

2. Уравнения гравитационного поля при наличии связи

В принятых сейчас обозначениях действие Гильберта имеет вид:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x.$$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ - скалярная кривизна, $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho,$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ – символы Кристоффеля,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right).$$

Вывод уравнений гравитационного поля из действия Гильберта при наличии связи является вариационной задачей на условный экстремум. Стандартным методом решения таких задач в случаях, когда связи не разрешимы в явном виде, является метод множителей Лагранжа. При наличии одной связи (1.1), введем множитель Лагранжа – скалярное поле Φ , и запишем действие в виде

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}. \quad (2.1)$$

Поскольку Q является ограничено ковариантным скаляром, то в отличие от действия Гильберта интегрирование определено не на многообразии, а только на многообразии с краем. Теперь все компоненты метрического тензора и скаляр Φ могут рассматриваться, как независимые величины и при варьировании действия наряду с уравнениями движения получаем уравнение, определяющее край.

При варьировании действия по полю Φ (вместо знака равенства стрелка указывает на то, что опущены полные производные, не дающие вклада в уравнения движения) получим:

$$\begin{aligned} \delta S_{gr} &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta(Q \sqrt{-g}) d^4x = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x^\nu} \right) d^4x \rightarrow \\ &\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta \Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \right) d^4x \end{aligned}$$

Из принципа стационарности действия в силу произвольности вариации Φ получим уравнение (1.1).

Скалярная кривизна ковариантна относительно произвольных преобразований координат, поэтому вычисление ее вариации и соответственно вклада в уравнения поля не имеет никаких отличий от [8].

Наличие в лагранжиане дополнительных членов помимо скалярной кривизны дает при варьировании по метрике вклад:

$$\begin{aligned} \delta(Q \sqrt{-g}) &= \left[\frac{\partial \delta \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} (\delta g^{\mu\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right] \rightarrow \\ &\frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Это приводит к появлению в уравнениях Гильберта-Эйнштейна наряду с тензором энергии-импульса материи $(\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}$ нового объекта $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(g^{\rho\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}\right]. \quad (2.3)$$

Объект (2.3) содержит обычные производные вместо ковариантных, и поэтому ведет себя как тензор только при ограниченной группе преобразований координат. *Он ковариантен относительно локальных специальных диффеоморфизмов и глобальных линейных преобразований координат.*

Поскольку ковариантная производная определена для произвольных преобразований координат, то ее действие определено и для объектов, являющихся тензорами относительно ограниченной группы преобразований. Разница заключается лишь в том, что при этом новые объекты относятся снова к тому же типу тензоров, на которые она действуют.

Связь (1.1) не включает поля материи. Поэтому как и в ОТО действие для материи остается инвариантным при общих преобразованиях координат. Для смешанных тензоров ковариантная производная левой стороны (2.2) равна нулю в силу свернутого тождества Бианки (справедливость которого обусловлена лишь общей ковариантностью тензора кривизны), поэтому с учетом выше сказанного должна равняться нулю и производная суммы в правой стороне (2.2). Таким образом, объект $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$ изменяется как тензор при указанных преобразованиях координат, симметричен, подобно материи является источником кривизны пространства-времени, а при отсутствии материи его ковариантная производная на уравнениях поля равна нулю.

Все это в совокупности позволяет назвать объект (2.3) тензором плотности энергии - импульса гравитационного поля, выраженным с помощью вспомогательного поля Φ . Поле является вспомогательным потому, что оно исходно не входит ни в действие Гильберта, ни в действие материи, ни в уравнение связи. В то же время введение поля Φ является неизбежным по самой сути математической проблемы. В разделе 3 рассмотрен случай, когда удается в явном виде исключить скалярное поле Φ из уравнений гравитационного поля. Там же будет рассмотрен вопрос о положительной определенности плотности энергии гравитационного поля.

Таким образом, мы получили систему уравнений, включающих связь (1.1) и десять уравнений (2.2) для одиннадцати перечисленных выше неизвестных.

Поскольку остальные члены в (2.2) обще ковариантны, то в целом система уравнений гравитации при наличии связи будет ковариантна лишь относительно указанной ограниченной группы преобразований координат. С физической точки зрения связь (1.1) может быть интерпретирована как достаточное условие адиабатичности процесса эволюции метрики. Определим вектор *потока плотности энтропии гравитационного поля* соотношением

$$s_{gr}v^\mu = const \cdot g^{\mu\lambda}\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}, \quad v^\mu v_\mu = 1, \quad s_{gr} = const \cdot v^\lambda(x)\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}. \quad (2.4)$$

В планковской системе единиц эту постоянную можно записать в виде

$$const = a \cdot \frac{k}{l_{pl}^2}, \quad l_{pl}^2 = \frac{\hbar G}{c^3}, \quad (2.5)$$

где k - постоянная Больцмана, l_{pl} - планковская длина. Для квазиклассической теории должно выполняться условие $|a| \leq 1$. Знак постоянной a должен выбираться так, чтобы на времени - подобных геодезических линиях плотность энтропии была положительной. Теперь связь (1.1) можно записать в виде релятивистского условия адиабатичности [14]

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}s_{gr}v^\mu) = 0. \quad (2.6)$$

Отметим, что в силу определения (2.4) все термодинамические потенциалы будут скалярами только относительно ограниченной выше группы преобразований.

Таким образом, *определение плотностей энергии (2.3) и энтропии (2.4), удовлетворяющих законам сохранения позволяет рассматривать гравитационное поле как обычную материальную среду [14] и восстанавливает нарушенное ОТО единство материального мира.*

Для включения в рассмотрение спинорной материи и калибровочных полей система уравнений (1.1, 2.2) может быть сформулирована в неголономном ортогональном репере. При этом наряду с аффинной связностью вводится связность спиновая. Это возможно, несмотря на наличие связи, поскольку группа локальных лоренцевых преобразований унимодулярна.

В предельном случае, когда плотность энергии-импульса гравитационного поля будет пренебрежимо мала по сравнению с плотностью энергии-импульса материи, уравнения (2.2) переходят в уравнения ОТО и в пределе слабого гравитационного поля приводят к Ньютону закону тяготения. При этом уравнение (1.1) *ограничивает калибровочный произвол.*

Если предположить, что на начальном этапе эволюции Вселенной материя играла незначительную роль и можно пренебречь плотностью энергии-импульса материи, то система уравнений (2.2) радикально упрощается. В этом случае можно найти точное общее решение системы уравнений (1.1, 2.2), причем это решение будет единственным.

3. Эволюция пространственно - временного многообразия в отсутствии материи

Если представить, что в начальный момент во Вселенной еще отсутствовала материя, а вместе с ней и генерируемые ею излучения, то не было бы и физической возможности различать точки космического пространства. Какими могли бы быть в этом случае метрические свойства такого пространства?

В трехмерном пространстве имеется девять возможных типов главных однородных пространств (допускающих группу движений) с зависящей от времени метрикой (классификация Бианки) [15]. Введение связи ограничивает не только группу допустимых в ОТО преобразований координат, но и группу движений сохраняющих метрику. Если первая группа задана условием (1.3), то при движении в силу требования форм-инвариантности это условие принимает вид

$$g(x^0, x'^m) = g(x^0, x^m), \quad x^m \rightarrow x'^m \quad (m=1,2,3),$$

то есть детерминант метрического тензора не должен зависеть от пространственных координат. Заметим, что это не исключает зависимость компонент метрического тензора от координат. Эти зависимости приведены в [16 с. 265-268] для всех девяти типов однородных пространств. Вычисляя детерминант метрического тензора, убедимся в том, что он не зависит от пространственных координат лишь для однородных пространств типа I и II по классификации Бианки. Это означает, что при наличии связи (1.1) допустимо существование однородных пространств только этих двух типов.

$$I. \quad g_{mn} = a_{mn}(x^0), \quad g_{00} = a_{00}(x^0) > 0, \quad g_{0n} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

$$II. \quad g_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}x^1 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{22}x^1 + a_{23} \\ a_{12}x^1 + a_{13} & a_{22}x^1 + a_{23} & a_{22}(x^1)^2 + 2a_{23}x^1 + a_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{mn} = a_{mn}(x^0), \quad g_{00} = a_{00}(x^0), \quad g_{0n} = 0.$$

Для первого из них компоненты метрического тензора зависят только от времени. В этом случае, если пространственная метрика не вырождена, то наиболее общее выражение для пространственно-временного интервала преобразованием координат с равным единице якобианом [15]

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^m \rightarrow x^m + \varphi^m(x^0),$$

всегда может быть приведено к виду

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 + g_{mn}(x^0)dx^m dx^n, \quad \gamma = -\det(g_{mn}) > 0 \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

3.1 Уравнения гравитации для однородного пространства типа I.

Отсутствие общей инвариантности действия (2.1) не позволяет исключить g_{00} компоненту метрики (3.1). Выражения для символов Кристоффеля и отличных от нуля компонент тензора Риччи для метрики (3.1) примут вид:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \quad \Gamma_{0l}^0 = 0, \quad \Gamma_{nl}^0 = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{dg_{nl}}{dx^0}, \quad \Gamma_{00}^m = 0, \quad \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \frac{dg_{kl}}{dx^0}, \quad \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (3.2)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{4g_{00}} g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0}, \quad (3.3)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} \right). \quad (3.4)$$

Отличные от нуля компоненты тензора плотности энергии-импульса (2.3) для метрики (3.1):

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{2}{g_{00}\sqrt{g_{00}\gamma}} \frac{d\sqrt{g_{00}\gamma}}{dx^0} \frac{d\Phi}{dx^0} \right], \quad (3.5)$$

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = -\frac{c^4}{16\pi G} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (3.6)$$

С учетом этих соотношений уравнения гравитационного поля (2.2) в смешанных компонентах

$$R_\mu^\lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \left[(\varepsilon_{gr})_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda (\varepsilon_{gr})_\nu^\nu \right]$$

при наличии связи примут вид:

$$\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{4g_{00}} g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0} = \frac{\sqrt{\gamma g_{00}}}{2} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right), \quad (3.8)$$

$$-\frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} \right) = \delta_k^p \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right). \quad (3.9)$$

3.2 Решение системы уравнений (3.7...3.9).

Система уравнений (3.7...3.9) является нелинейной системой восьми уравнений для восьми неизвестных функций мирового координатного времени: $\Phi(x^0)$, $g_{00}(x^0)$, $g_{mn}(x^0)$ ($m, n =$

1, 2, 3). Покажем, что существует точное общее решение этой нелинейной системы уравнений (что само по себе является многозначительным, вызывающим удивление фактом).

Из (3.9) следует:

$$g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} + \delta_k^p \frac{d\Phi}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} L_k^p. \quad (3.10)$$

Постоянная матрица L_k^p не является произвольной. Поскольку из (3.10) следует

$$\frac{dg_{kn}}{dx^0} + g_{kn} \frac{d\Phi}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} g_{np} L_k^p, \quad (3.11)$$

матрица должна удовлетворять условию

$$g_{np}(x^0) L_k^p = g_{kp}(x^0) L_n^p. \quad (3.12)$$

Для метрического тензора общего вида это условие будет выполняться только в случае, когда матрица L_k^p пропорциональна единичной матрице. В противном случае матрица $L_k^p = \text{diag}(L_1, L_2, L_3)$ и метрический тензор также должен быть диагональным.

Упрощая (3.10) по индексам p и k , получим

$$3 \frac{d\Phi}{dx^0} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} + \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} L_k^k. \quad (3.13)$$

Таким образом, в случае однородного пространства типа I удается в явном виде выразить производную поля Φ через метрическое поле и его производные. Что демонстрирует вспомогательный характер этого поля. Подставляя (3.13) в (3.10) получим

$$g^{pm} \frac{dg_{km}}{dx^0} = \frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_k^p + \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} \left(L_k^p - \frac{1}{3} \delta_k^p L_n^n \right). \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует

$$g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 + \frac{g_{00}}{\gamma} \left[L_k^p L_p^k - \frac{1}{3} (L_n^n)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Используя это выражение и (3.13), можно исключить Φ и все пространственные компоненты метрики из уравнения (3.8) и записать его в виде:

$$3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{3c^2}{2\gamma} [L_k^p L_p^k - \frac{1}{3} (L_n^n)^2] = g_{00} \sqrt{\gamma} \frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma g_{00}} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt} - c L_n^n \right), \quad (3.16)$$

где введено обозначение $cdt = \sqrt{g_{00}} dx^0$.

Из уравнения (3.7) следует

$$\frac{1}{g_{00}} \frac{dg_{00}}{dt} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{T\sqrt{\gamma}}, T = \text{const}. \quad (3.17)$$

Это уравнение позволяет исключить g_{00} из (3.16) и записать уравнение для функции γ

$$2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{\sigma}{\gamma} = 0, \quad \sigma = B_n^n - \frac{3}{2} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_n^n)^2], \quad (3.18)$$

где $\tau = t/T$ безразмерное время, $B_k^p = cTL_k^p$ - матрица безразмерных постоянных. Порядок уравнения (3.18) можно понизить при введении функции $u(\gamma)$ - безразмерной скорости изменения *объемного фактора* - $\sqrt{\gamma}$

$$u = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau}. \quad (3.19)$$

Уравнение примет вид

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma, \quad \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (3.20)$$

Замечательно, что при $\sigma > 1/4$ определитель пространственной метрики нигде не равен нулю. Далее будем считать это ограничение на величину σ выполненным.

Интегрируя уравнение (3.20), найдем

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} = f(u), \quad f(u) = \sqrt{\frac{4u^2 - 2u + \sigma}{\sigma}} \exp\left[\frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\arctg \frac{4u - 1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \right)\right], \quad (3.21)$$

где $\sqrt{\gamma_{\min}}$ - минимальное значение $\sqrt{\gamma(u)}$ при $u = 0$.

Дифференцируя (3.21) по τ , получим

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{d\tau}, \quad \frac{df}{du} = \frac{4u}{4u^2 - 2u + \sigma} f(u).$$

Отсюда с учетом (3.19), (3.21) найдем в параметрическом виде решение уравнения (3.18)

$$\tau - \tau_{st} = \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy. \quad (3.22)$$

Эволюция пространства начинается в момент времени τ_{st} из состояния покоя с минимальным объемным фактором.

Из уравнения (3.17) с учетом (3.22) следует

$$d \ln(\gamma g_{00}) = \frac{dt}{T\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma}} \frac{4f(u)du}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{4du}{4u^2 - 2u + \sigma}.$$

Интегрируя это уравнение

$$\frac{\gamma(u)g_{00}(u)}{\gamma_{\min}g_{00}(0)} = \exp\left(\int_0^u \frac{4du}{4u^2 - 2u + \sigma}\right) = \exp\left[\frac{4}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\arctg \frac{4u - 1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \right)\right]$$

и учитывая определение (3.21), получим

$$\sqrt{\frac{g_{00}(u)}{g_{00}(0)}} = \frac{\sigma \cdot f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma}.$$

Используя это соотношение, исходя из определения (3.19) можно показать, что

$$\sqrt{g_{00}(x^0)} dx^0 = cT\sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma} du. \quad (3.23)$$

Мировое координатное время x^0 , определено с точностью до произвольного линейного преобразования. Величина же $u \geq 0$ по определению и не меняется при таком преобразовании. Поэтому параметр u с размерным фактором можно назвать мировым физическим временем.

3.3 Плотность энергии-импульса и скалярная кривизна однородного пространства на уравнениях поля.

Используя соотношения (3.13) и (3.17), преобразуем (3.5) следующим образом

$$\left(\varepsilon_{gr}\right)_0^0 = \rho_{gr} = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{1}{2\gamma} B_k^k \right]. \quad (3.24)$$

Используя уравнение (3.18) исключим вторую производную, тогда

$$\rho_{gr} = \frac{c^2}{96\pi GT^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{3}{2\gamma} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] = \frac{c^2}{24\pi GT^2 \gamma} \left[u^2 - \frac{3}{8} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] \quad (3.25)$$

Первый член в скобках при малых значениях u стремится к нулю, второй член, характеризующий глобальную анизотропию пространства, постоянен, положителен и входит в выражение для плотности энергии со знаком минус. Теперь мы можем ответить на вопрос, поставленный в 1972 году авторами [17, Т 2, с. 481]: «Принимая согласие с экспериментами, мы хотим понять, почему законы физики должны требовать (а не просто позволять), чтобы в больших масштабах Вселенная была с высокой точностью однородна и изотропна (курсив авторов)». Плотность энергии гравитационного поля (3.25) будет положительной только в том случае, когда однородное пространство изотропно ($B_m^n \propto \delta_m^n$).

В этом случае решение уравнений (3.14) можно представить в виде

$$g_{kn} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\min}} \right)^{1/3} g_{kn}(0). \quad (3.26)$$

В силу инвариантности теории относительно глобальных линейных преобразований координат, исходная метрика $g_{kn}(0)$ всегда может быть приведена к диагональной эвклидовой форме. Тогда интервал (3.1) с учетом соотношения (3.26) и (3.23), (3.21) примет вид:

$$ds^2 = \left(cT \sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma} \right)^2 (du)^2 - f^{2/3}(u) dx^m dx^n \delta_{mn}. \quad (3.27)$$

Заметим, что однородное пространство типа II имеет неустранимую анизотропию. Поэтому имея в виду связь положительной определенности плотности энергии с отсутствием анизотропии, можно утверждать, что с физической точки зрения не существует другой кроме типа I непротиворечивой теории трехмерного однородного пространства.

Введем параметр Хаббла H и в соответствии с современными представлениями параметр ускорения q (вместо параметра замедления [8])

$$H \equiv \frac{1}{6T\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad q \equiv 1 + \frac{1}{6H^2 T^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right). \quad (3.28)$$

Подстановка этих выражений в (3.18) позволяет получить уравнение, описывающее смену эпох ускорения-замедления.

$$q = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{u(\gamma)} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 + 1 - \frac{3}{4\sigma}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что возможны два сценария. При $\sigma > 3/4$ возможно только ускорение ($q > 0$). При $3/4 > \sigma > 1/4$ возможна смена эпох: ускорение-замедление-ускорение. Смена эпох происходит при значениях

$$u_1 = \frac{\sigma}{1 + \sqrt{1 - 4\sigma/3}} > \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \approx 0.1376, \quad u_2 = \frac{\sigma}{1 - \sqrt{1 - 4\sigma/3}} < \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \approx 1.3624. \quad (3.30)$$

Обнаруженная недавно смена эпох [4-6] указывает на то, что имеет место второй сценарий.

Максимальная величина замедления достигается при $u = \sigma$

$$q_{\max} = 1 - \frac{3}{4\sigma} > -2. \quad (3.31)$$

После наступления второй эпохи ускорения в соответствии с (3.29) q асимптотически стремится к единице.

Плотность энергии (3.25) изотропного гравитационного поля связана с параметром Хаббла (3.28) соотношением

$$\rho_{gr} = \frac{c^2}{24\pi GT^2 \gamma(u)} u^2 = \frac{3c^2 H^2(u)}{8\pi G}. \quad (3.32)$$

Таким образом, плотность энергии гравитационного поля пропорциональна квадрату скорости изменения объемного фактора и в любой момент времени равна критической плотности.

Параметр Хаббла достигает максимального значения в эпоху первого ускорения при $u = \sigma/2 < u_1$

$$H_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp\left(-\frac{\arctg \sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}}\right), \quad (3.33)$$

а затем монотонно убывает, стремясь к постоянному значению

$$H_{\infty} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}} + \frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (3.34)$$

Пространственные компоненты тензора плотности энергии-импульса, определенные соотношениями (3.6), на уравнениях поля равны:

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{1}{2\gamma} B_n^n \right] \delta_k^p, \quad (3.35)$$

и отличаются от выражения для плотности энергии знаком последних двух членов. Эти компоненты могут принимать в процессе эволюции как положительные, так и отрицательные значения. Исключая снова вторую производную с помощью уравнение (3.18), и полагая, как это принято для макроскопических сред $(\varepsilon_{gr})_m^n = -p_{gr} \delta_m^n$, запишем давление гравитационного поля в виде

$$p_{gr} = -\frac{c^2}{48\pi GT^2} \frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma(u)}. \quad (3.36)$$

Отсюда следует, что при $0.25 < \sigma < 0.5$ происходит изменение знака давления при следующих значениях u :

$$u_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\sigma}}{2} > \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \approx 0.146, \quad u_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\sigma}}{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \approx 0.8536 \quad (3.37)$$

Гравитационное поле имеет положительное давление в промежутке $u_3 < u < u_4$, в остальных случаях его давление отрицательное.

Рассмотрим тензор Риччи. Подставляя соотношения (3.14), (3.15) в (3.3), (3.4) найдем выражения для его отличных от нуля компонент на уравнениях поля:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{1}{12c^2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2, \quad R_k^k = -\frac{1}{2c^2 \sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt} \right). \quad (3.38)$$

Исключая вторые производные, запишем выражения для скалярной кривизны пространства-времени R .

$$R = R_0^0 + R_k^k = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma(u)} \left(\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma \right). \quad (3.39)$$

Кривизна пространства - времени изменяется в процессе эволюции и принимает сначала отрицательные затем положительные и, наконец, снова отрицательные значения.

3.4 Кинематика однородного пространства.

В силу (3.32), (3.33) максимальная плотность энергии гравитационного поля равна

$$\rho_{gr\max} = \frac{c^2 \sigma}{96\pi G T^2 \gamma_{\min}} \exp\left(-\frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}}\right). \quad (3.40)$$

Отсюда следует при $\sigma \approx 1/4$

$$T \sqrt{\gamma_{\min}} = \left(\frac{c^2 \sigma}{96\pi \cdot G \cdot \rho_{gr\max}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}}\right) \approx \frac{c}{8e} \left(\frac{1}{6\pi G \rho_{gr\max}}\right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

Соотношения (3.22), (3.28) можно записать в размерном виде:

$$t - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H(u) = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u}{f(u)}. \quad (3.42)$$

Согласно (3.21) $f(u)$ зависит только от постоянной σ . При подстановке в эти соотношения значений [18]: времени от начала эволюции до текущего момента $t^0 - t_{st} = 13.81 \cdot 10^9$ лет и параметра Хаббла $H^0 = 67.3 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпс}^{-1}$, получим пару уравнений для двух неизвестных – σ и значения параметра u^0 на текущий момент времени

$$t^0 - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H^0 = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{f(u^0)}.$$

Квазиклассический подход оправдан при условии, что параметр $T \sqrt{\gamma_{\min}} \geq t_{pl}$, где t_{pl} – планковское время. Минимальному значению этого параметра согласно (3.40) соответствует максимальная плотность энергии гравитационного поля на четыре порядка меньшая планковской. В этом случае решение системы уравнений:

$$\sigma = 0.2501278984, \quad u^0 = 6.118625359. \quad (3.43)$$

Результаты расчетов остальных параметров для этого случая представлены в Таблице 1. Ниже в Таблице 2 приведены результаты аналогичного расчета, но с максимальной плотностью энергии равной той, которая достигается на ускорителях с энергией в 1 TeV ($\rho_{gr\max} = (1\text{TeV})^4 \approx 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$).

Для параметра u выбраны характерные значения $u^0, u2, u4, \sigma, u3, u1, \sigma/2$, дополненные рядом промежуточных значений. В таблице: q – космическое ускорение, z – космологическое красное смещение, R – скалярная кривизна пространства-времени, $t - t_{st}$ – собственное время, H – параметр Хаббла.

$T\sqrt{\gamma_{\min}} = t_{pl} \text{ c}; \rho_{gr\max} = 5.2 \cdot 10^{109} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}; \sigma = 0.2501278984; u^0 = 6.118625359$					
u	q	z	$R, \text{ м}^{-2}$	$t-t_{st}, \text{ c}$	$H, \text{ с}^{-1}$
6.118625359	0.7599	0	$-5.589 \cdot 10^{-52}$	$4.358 \cdot 10^{17}$	$2.181 \cdot 10^{-18}$
1.362294111	0	0.84987	$-6.308 \cdot 10^{-52}$	$1.876 \cdot 10^{17}$	$3.074 \cdot 10^{-18}$
0.853462941	-0.5	1.41598	$-6.144 \cdot 10^{-52}$	$1.129 \cdot 10^{17}$	$4.290 \cdot 10^{-18}$
0.8	-0.5819	1.52552	$-5.890 \cdot 10^{-52}$	$1.029 \cdot 10^{17}$	$4.594 \cdot 10^{-18}$
0.7	-0.7600	1.79266	$-4.732 \cdot 10^{-52}$	$8.275 \cdot 10^{16}$	$5.435 \cdot 10^{-18}$
0.6	-0.9789	2.20159	$-6.939 \cdot 10^{-53}$	$6.051 \cdot 10^{16}$	$7.019 \cdot 10^{-18}$
0.5	-1.2496	2.93915	$1.977 \cdot 10^{-51}$	$3.650 \cdot 10^{16}$	$1.089 \cdot 10^{-17}$
0.4	-1.5775	4.83051	$3.079 \cdot 10^{-50}$	$1.305 \cdot 10^{16}$	$2.826 \cdot 10^{-17}$
0.35	-1.7543	7.80386	$3.648 \cdot 10^{-49}$	$4.161 \cdot 10^{15}$	$8.511 \cdot 10^{-17}$
0.3	-1.9156	24.3239	$1.843 \cdot 10^{-46}$	$1.963 \cdot 10^{14}$	$1.737 \cdot 10^{-15}$
0.28	-1.9643	87.6127	$3.105 \cdot 10^{-43}$	$4.848 \cdot 10^{12}$	$6.945 \cdot 10^{-14}$
0.265826306	-1.9880	1090	$9.993 \cdot 10^{-37}$	$2.719 \cdot 10^9$	$1.230 \cdot 10^{-10}$
0.250127898	-1.9985	$8.09106 \cdot 10^{10}$	$1.484 \cdot 10^{11}$	$7.062 \cdot 10^{-15}$	$4.723 \cdot 10^{13}$
0.146537059	-0.5	$2.16717 \cdot 10^{20}$	$-9.435 \cdot 10^{66}$	$3.785 \cdot 10^{-43}$	$5.317 \cdot 10^{41}$
0.137705891	0	$2.24648 \cdot 10^{20}$	$-2.067 \cdot 10^{67}$	$3.125 \cdot 10^{-43}$	$5.565 \cdot 10^{41}$
0.125063950	1	$2.33685 \cdot 10^{20}$	$-4.321 \cdot 10^{67}$	$2.426 \cdot 10^{-43}$	$5.689 \cdot 10^{41}$
0	∞	$2.58860 \cdot 10^{20}$	$-4.788 \cdot 10^{68}$	0	0

Таблица 1. Кинематика пространства при максимальной плотности энергии $\rho_{gr\max} = 5.2 \cdot 10^{109} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$.

$\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}; T\sqrt{\gamma_{\min}} = 8.691286792 \cdot 10^{-14} \text{ c}; \sigma = 0.2505131772; u^0 = 6.116607675$					
u	q	z	$R, \text{ м}^{-2}$	$t-t_{st}, \text{ c}$	$H, \text{ с}^{-1}$
6.116607675	0.7598	0	$-5.588 \cdot 10^{-52}$	$4.358 \cdot 10^{17}$	$2.181 \cdot 10^{-18}$
1.362058100	0	0.84978	$-6.145 \cdot 10^{-52}$	$1.876 \cdot 10^{17}$	$3.074 \cdot 10^{-18}$
0.853190333	-0.5	1.41607	$-9.218 \cdot 10^{-52}$	$1.129 \cdot 10^{17}$	$4.291 \cdot 10^{-18}$
0.8	-0.58143	1.52504	$-5.894 \cdot 10^{-52}$	$1.030 \cdot 10^{17}$	$4.592 \cdot 10^{-18}$
0.7	-0.75942	1.79220	$-4.740 \cdot 10^{-52}$	$8.281 \cdot 10^{16}$	$5.433 \cdot 10^{-18}$
0.6	-0.97810	2.20058	$-7.194 \cdot 10^{-53}$	$6.057 \cdot 10^{16}$	$7.014 \cdot 10^{-18}$
0.5	-1.2485	2.93699	$1.0963 \cdot 10^{-51}$	$3.656 \cdot 10^{16}$	$1.088 \cdot 10^{-17}$
0.4	-1.5757	4.82107	$3.042 \cdot 10^{-50}$	$1.313 \cdot 10^{16}$	$2.813 \cdot 10^{-17}$
0.35	-1.7519	7.76490	$3.545 \cdot 10^{-49}$	$4.218 \cdot 10^{15}$	$8.404 \cdot 10^{-17}$
0.3	-1.9124	23.6505	$1.564 \cdot 10^{-46}$	$2.130 \cdot 10^{14}$	$1.602 \cdot 10^{-15}$
0.28	-1.9607	78.6976	$1.638 \cdot 10^{-43}$	$6.670 \cdot 10^{12}$	$5.054 \cdot 10^{-14}$
0.263724335	-1.9863	1090	$9.820 \cdot 10^{-37}$	$2.741 \cdot 10^9$	$1.221 \cdot 10^{-10}$
0.250513177	-1.9939	$5.92654 \cdot 10^5$	$2.294 \cdot 10^{-20}$	17.963	0.001859
0.146809667	-0.5	$1.84758 \cdot 10^{10}$	$-3.638 \cdot 10^6$	$6.102 \cdot 10^{-13}$	$3.301 \cdot 10^{11}$
0.137941901	0	$1.91536 \cdot 10^{10}$	$-7.974 \cdot 10^6$	$5.037 \cdot 10^{-13}$	$3.456 \cdot 10^{11}$
0.125256589	1	$1.99255 \cdot 10^{10}$	$-1.6669 \cdot 10^7$	$3.910 \cdot 10^{-13}$	$3.533 \cdot 10^{11}$
0	∞	$2.20739 \cdot 10^{10}$	$-1.8450 \cdot 10^8$	0	0

Таблица 2. Кинематика пространства при максимальной плотности энергии $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$.

Таким образом, вместо стандартной космологической модели (СКМ) в этом случае мы имеем континуум космологических моделей, параметризованных значением максимальной плотности энергии ρ_{gmax} . Из сравнения этих данных Таблиц 1, 2 следует, что, по крайней мере, до космологического красного смещения поверхности «последнего рассеяния»

$$z(0.2647 \pm 0.0011) = 1090, \quad z(u) = \left(\sqrt{\frac{\gamma(u^0)}{\gamma(u)}} \right)^{1/3} - 1 \quad (3.44)$$

результаты расчетов хорошо согласуются между собой, несмотря на отличие в величине максимальной плотности энергии более чем на шестьдесят порядков. Это обстоятельство исключает сомнения в возможности однозначного описания эволюции пространства в этом диапазоне изменения красного смещения. Следует обратить внимание на тот факт, что «последнее рассеяние» произошло по истечении менее ста лет от начала процесса эволюции, в отличие от 373000 лет в Λ CDM – модели [18].

Существенные отличия между моделями имеются лишь при больших значениях z . В момент начала эволюции скалярная кривизна имеет определенное конечное значение, поэтому можно определить характерный начальный размер, как величину обратную корню из модуля кривизны. Этот размер зависит от величины ρ_{gmax} и для рассмотренного в Таблицах 1, 2 диапазона энергий может составлять от 10^{-34} до 10^{-4} метра.

3.5 Геодезические и энтропия однородного пространства.

Для метрики (3.27) как и для метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера, линии $x^1 = x^2 = x^3 = const$ являются геодезическими, и в каждой точке можно ввести сопутствующую систему координат, в которой *определенная выше переменная t будет являться собственным временем*.

Подставляя в уравнения геодезической $x^\mu(\xi)$ с натуральным параметром ξ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\xi} \frac{dx^\lambda}{d\xi} = 0$$

символы Кристоффеля (3.2) для метрики (3.27) и интегрируя полученные уравнения, найдем:

$$\frac{dx^m}{d\xi} = A^m \gamma^{-1/3}(x^0), \quad \sqrt{g_{00}(x^0)} \frac{dx^0}{d\xi} = \pm \sqrt{A^2 \gamma^{-1/3}(x^0) + B}, \quad A^2 = A^m \delta_{mm} A^m, \quad A^m, B = const. \quad (3.45)$$

Гиперповерхность $t = t_{st}$ является краем найденного пространственно–временного многообразия. На краю $u(t_{st}) = 0$ и космическое ускорение (3.29), являющееся инвариантной наблюдаемой величиной, обращается в бесконечность. В связи с этим любая, выходящая на край геодезическая, при конечном значении ξ столкнется с неустранимой особенностью. Следовательно, *найденное многообразие является максимально продолжимым вдоль геодезических вплоть до края*.

Согласно (3.45) в сопутствующей системе координат вдоль геодезической определен вектор 4-скорости

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = (g_{00}^{-1/2}, 0, 0, 0)$$

В этом случае из уравнения адиабатичности с учетом (2.4), (2.5), (3.17), (3.21) следует

$$s_{gr} = a \frac{k}{l_{pl}^2} v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda} = \frac{a \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma(u)}} = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma(u)}}. \quad (3.46)$$

В последнем равенстве мы отождествили неизвестную постоянную a с единственным в теории безразмерным параметром σ (3.18), характеризующим найденное пространственно –

временное многообразие. Из (3.46) следует, что плотность энтропии в настоящее время достаточно слабо зависит от максимальной плотности энергии и при $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$ равна

$$s_{gr}(u^0) = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma_{\min}} f(u^0)} \approx 1.7 \cdot 10^{42} \cdot k \cdot m^{-3} .$$

Эта величина на 18 порядков превосходит вклад всех остальных источников энтропии, учитываемых в рамках ОТО [19].

В силу (3.45) для наблюдателя, покоящегося в начале координат и связанного 0 – геодезической ($B=0$) с сопутствующей точкой, расстояние, как и в ОТО, определяется соотношением [7]

$$d(t) = c \cdot a(t^0) \cdot \int_t^{t^0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.47)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, t – собственное время. В рассматриваемом случае фактор $a(t) = \gamma^{1/6}(t)$ определен приведенными выше соотношениями, в ОТО после открытия космического ускорения он определяется в рамках Λ CDM – модели [7]. Параметры этой модели подбираются исходя из условия обеспечения наилучшего согласия со всей совокупностью имеющихся в настоящее время экспериментальных данных, их численные значения по состоянию на 2013 год приведены в [18].

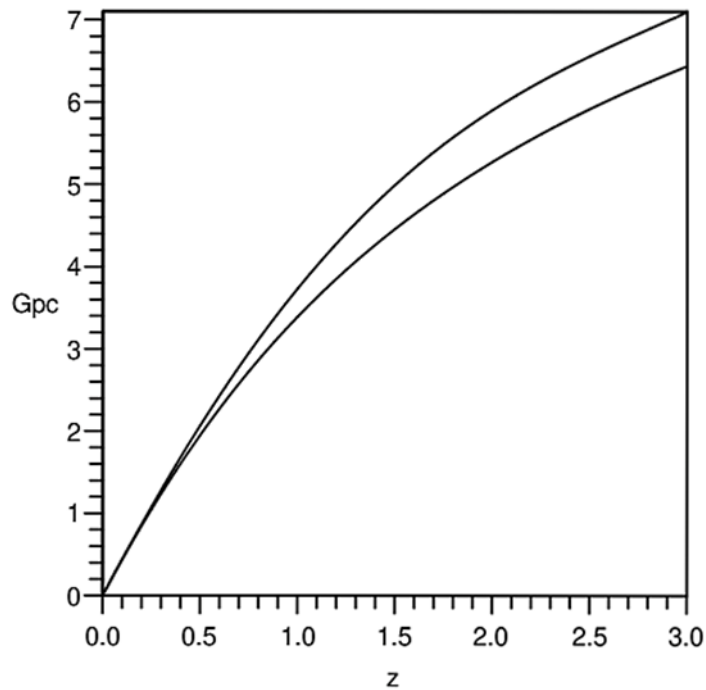


Рисунок 1. Расстояние до объекта в зависимости от его красного смещения, верхняя кривая - расчет по (3.47), нижняя – расчет по Λ CDM – модели.

В работе [18] приведена в графической форме вся имевшаяся на момент публикации совокупность данных по зависимости расстояния от красного смещения (Fig. 26.1). Сравнение с данными [18] показывает, что обе представленные на рис. 1 зависимости лежат в пределах погрешности экспериментальных данных. Более того, как следует из приведенных на рис. 2 данных, даже будущие эксперименты такого рода вряд ли позволят сделать выбор

между этими двумя зависимостями. При продолжении приведенной зависимости в область больших значений z ее ход будет определяться неизвестной в настоящее время максимальной плотностью энергии гравитационного поля. На рис. 2 представлено относительное расстояние D_{rel} , рассчитанное как отношение величин представленных на рис. 1 в более широком диапазоне изменения красного смещения.

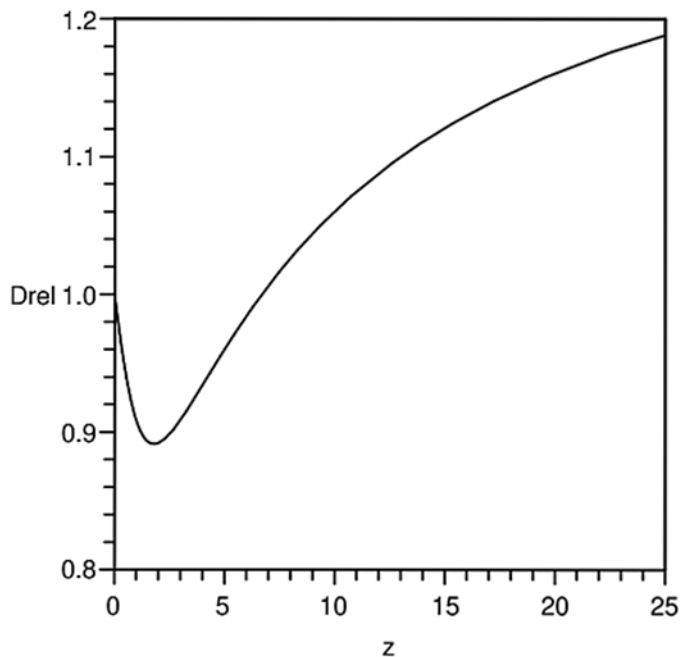


Рисунок 2. Отклонение от единицы отношения расстояний, вычисленных по *ОТО* и данной теории (по вертикали), в зависимости от величины красного смещения.

Сравнительно малая величина отклонения связана с интегральным характером зависимости расстояния от красного смещения. Для локального параметра, такого как параметр Хаббла, ситуация иная.

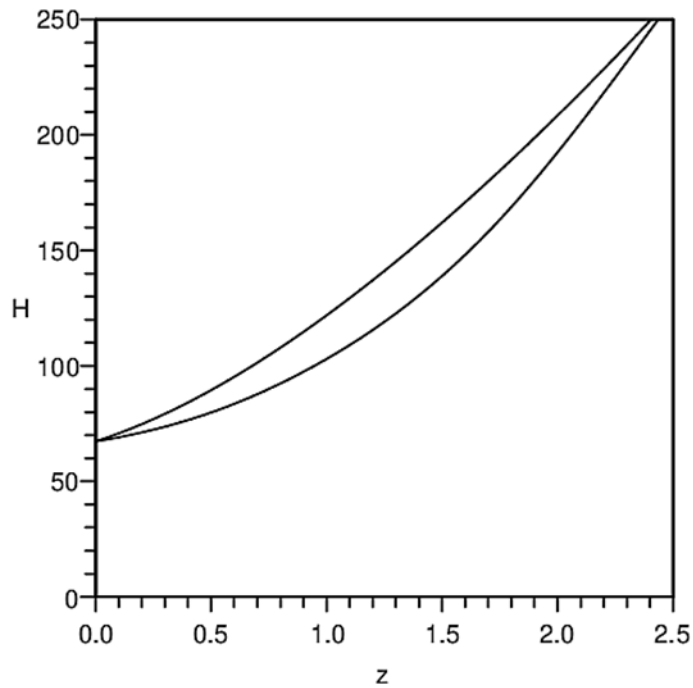


Рисунок 3. Зависимость параметра Хаббла ($\text{км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$) от красного смещения. Верхняя кривая – ΛCDM -модель, нижняя кривая – данная теория.

В этом случае, как показывает сравнение результатов расчета с экспериментальными данными ([20, с. 20] Fig.4) при $z < 2.5$ обе зависимости так же укладываются в пределы погрешности экспериментов.

На рисунке 4 представлена величина $H_{\text{rel}}=H_{\Lambda\text{cdm}}/H$ равная отношению величин, представленных на рис.3 в более широком диапазоне изменения красного смещения. Как видно из рис. 4 при больших красных смещениях расхождение между ними увеличивается многократно. Таким образом, только одна из двух теорий может быть справедлива.

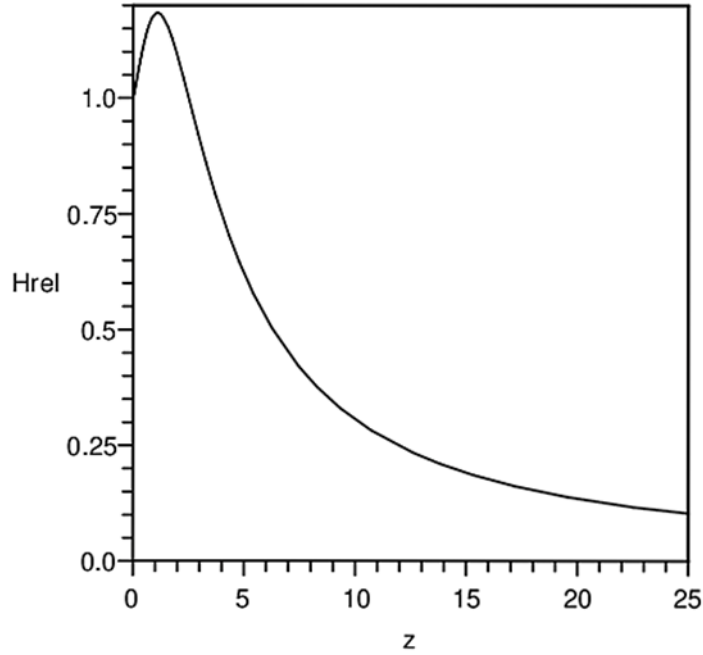


Рисунок 4. Зависимость отношения параметра Хаббла в Λ CDM-модели к его значению в данной теории от красного смещения.

Существенно то, что в этой области красных смещений зависимость не имеет свободных параметров, определяется только начальными значениями при $z = 0$ и, как видно из Таблицы 1, справедлива вплоть до начального момента времени. В ОТО, чтобы обеспечить согласие с экспериментом, в рамках Λ CDM-модели введены гипотезы о существовании темной энергии и темной материи. Для описания же зависимости в области больших значений z вводится гипотеза о существовании инфлатонов.

3.6 Температура однородного гравитационного поля.

В пустом пространстве гравитационное поле обладает характеристиками присущими материальной среде: энергией, давлением и энтропией. В силу общих законов термодинамики еще одной характеристикой состояния среды является температура - θ , изменение которой при равновесном процессе без подвода тепла связано с изменением давления соотношением [21]

$$s_{gr} \frac{d\theta_{gr}}{dt} = \frac{dp_{gr}}{dt}. \quad (3.48)$$

Это уравнение позволяет по найденным зависимостям давления (3.36) и плотности энтропии гравитационного поля (3.46) от u определить его температуру.

Подставляя в (3.48) соответствующие зависимости, получим

$$-\frac{c^2}{48\pi GT^2} \sqrt{\gamma(u)} d\left(\frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma(u)}\right) = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T} d\theta_{gr}. \quad (3.49)$$

Интегрируя это уравнения с учетом зависимости $\gamma(u)$ (3.21), найдем

$$\theta_{gr}(u) = \frac{\hbar}{12\pi \cdot k \cdot T \sqrt{\gamma_{\min}}} \int_0^u \frac{1}{\sigma \cdot f(u)} \cdot \frac{\sigma - 2u(1-\sigma)}{\sigma - 2u + 4u^2} du. \quad (3.50)$$

При $u = u^0$ (настоящий момент времени) величина интеграла для данных Таблиц 1, 2 одинакова и составляет 0.5 (с точностью до восьми знаков). В тоже время температура гравитационного поля $\theta_{gr}(u^0)$ изменяется от $1.879 \cdot 10^{30}$ °К в первом случае, до 1.166 °К во втором. На рисунке 5 представлена в неявном виде зависимость относительной температуры $T_{rel} = \theta_{gr}(u)/\theta_{gr}(u^0)$ от времени.

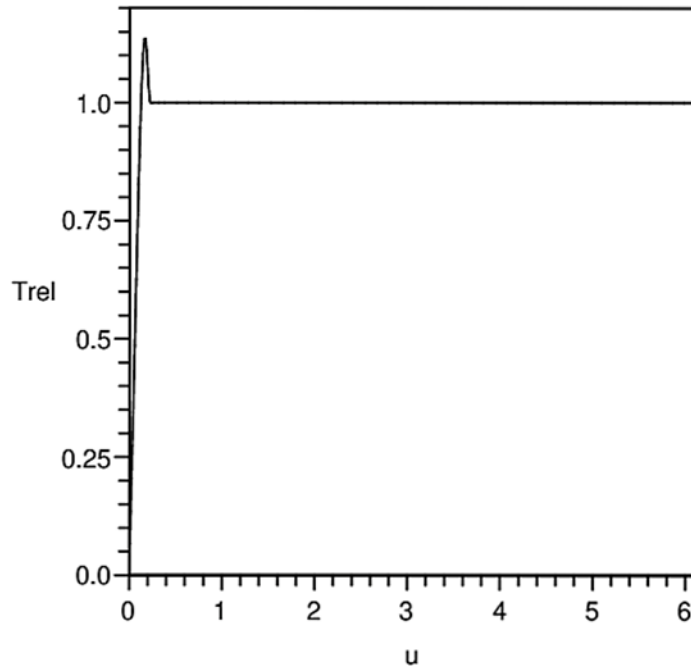


Рисунок 5. По вертикали отложено отношение текущей температуры к ее значению в настоящее время в зависимости от u (3.19).

Связь безразмерной скорости изменения объемного фактора u с собственным временем видна из Таблиц 1 и 2. Следует отметить, что для обоих представленных в таблице вариантов расчетные зависимости практически идентичны. Температура сохраняется на постоянном уровне равном ее современному значению за исключением короткого начального промежутка времени. То есть гравитационное поле уже почти 14 миллиардов лет вплоть до настоящего момента и далее вплоть до достижения полного равновесия имеет, и будет иметь постоянную температуру. Оно выступает в качестве термостата Вселенной. Температуру такого термостата можно оценить, наблюдая изменение температуры находящихся в тепловом контакте с ним тел. При приближении к равновесному состоянию их температура должна асимптотически стремиться к температуре термостата. В частности, если рассматривать температуру реликтового излучения, то со временем при адиабатическом охлаждении она будет стремиться не к нулю, а к температуре термостата. В настоящее время температура реликтового излучения равна $\theta_{rel}^0 = 2.7255$ °К и не зафиксированы, какие либо изменения в ходе её адиабатического охлаждения. Отсюда можно сделать вывод, что температура гравитационного поля $\theta_{gr}(u^0)$ меньше θ_{rel}^0 .

Из (3.50) следует

$$T\sqrt{\gamma_{\min}} = \frac{0.5 \cdot \hbar}{12\pi k \theta_{gr}(u^0)}. \quad (3.51)$$

Используя это соотношение и (3.41) можно связать максимальную величину глобальной плотности энергии $\rho_{gr\max}$ со значением температуры в настоящее время

$$\rho_{gr\max} = \frac{3\pi}{2e^2} \cdot \frac{c^2}{G} \cdot \left(\frac{k\theta_{gr}(u^0)}{\hbar} \right)^2. \quad (3.52)$$

Если для оценки принять температуру $\theta_{gr}(u^0)$ равной температуре реликтового излучения в настоящее время $\theta_{rel}^0 = 2.7255 \text{ }^0\text{K}$, то $\rho_{gr\max} < 1 \cdot 10^{50} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \sim (1.5 \cdot \text{ТэВ})^4$. Это близко к значению в варианте эволюции, представленном в Таблице 2, и *разительно отличается от стандартной космологической модели (СКМ), в которой плотность энергии может достигать величины на 64 порядка большей* $(10^{19} \text{ТэВ})^4$. Возможно, именно это является причиной отсутствия во Вселенной гипотетических форм материи таких, которые не обнаруживаются в экспериментах на БАК.

4. Базовая модель эволюции однородной и изотропной Вселенной

Рост интенсивности гравитационного поля в процессе эволюции неизбежно приведет к появлению новых структур материи.

Рассмотрим феноменологически влияние материи на процесс эволюции Вселенной.

Как показано в разделе 3, существует единственное однородное пространство-время с изотропной метрикой вида

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

Пусть в некоторый момент времени в этом пространстве-времени рождается материя. В силу его однородности и изотропии тензор средней плотности энергии-импульса материи запишем в виде $(\varepsilon_{mat})_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(\rho_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat})$.

Тогда при наличии материи уравнения гравитационного поля (3.7-3.9) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma \sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{6g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 &= \sqrt{\gamma g_{00}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00} \sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{8\pi G}{c^4} (\rho + 3p)_{mat} \\ -\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{g_{00}} \frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p &= \delta_k^p \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho - p)_{mat} \delta_k^p. \end{aligned}$$

Повторяя все выкладки с учетом этих добавочных членов, вместо (3.20) получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.1)$$

где введен функционал

$$M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = \frac{48\pi G T^2}{c^2} \left(-\gamma(\rho + p)_{mat} + \frac{1}{4} \int_0^u (\rho - p)_{mat} \left(\frac{d\gamma}{du} \right) \frac{du}{u} \right),$$

причем предполагается, что *давление и плотность энергии материи равны нулю в начальный момент времени.*

Уравнения для космического ускорения, плотности энергии, давления и скалярной кривизны в этом случае также видоизменяются, вместо (3.29), (3.32), (3.36) и (3.39) получим:

$$q = 1 - \frac{3}{2u} + \frac{3\sigma}{4u^2} + \frac{3}{4u^2} M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.2)$$

$$\rho_{gr} + \rho_{mat} = \frac{c^2}{24\pi GT^2} \frac{u^2}{\gamma(u)} = \frac{3c^2 H^2(u)}{8\pi G} \equiv \rho_{cr}(u), \quad (4.3)$$

$$p_{gr} + p_{mat} = -\frac{c^2}{48\pi GT^2} \frac{1}{\gamma(u)} \left[2u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right], \quad (4.4)$$

$$R = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma(u)} \left[\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right]. \quad (4.5)$$

Согласно наблюдательным данным во Вселенной *в настоящее время* имеется: барионная материя, электромагнитное излучение и нейтрино. Эти компоненты слабо взаимодействуют как между собой, так и с гравитационным полем. В этом случае законы «сохранения» для каждого вида материи выполняются в отдельности, поэтому ковариантная производная тензора $(\varepsilon_{mat})^\nu{}_\mu$ должна быть равна нулю.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} (\varepsilon_{mat})^\nu{}_\mu) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} (\varepsilon_{mat})^\rho{}_\lambda = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для связности (3.2) в случае изотропной метрики получим

$$\frac{d\rho_{mat}}{dx^0} = -(\rho + p)_{mat} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dx^0}.$$

Для барионной материи давление можно считать равным нулю, для электромагнитного излучения $p = \rho/3$, для нейтрино аналогичное соотношение будет справедливо до тех пор, пока можно пренебречь наличием у них массы. При этих условиях для компонент материи получим:

$$\rho_b = \rho_b^0 \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \rho_\gamma = \rho_{\gamma^0}^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \rho_\nu = \rho_\nu^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}. \quad (4.6)$$

Верхним индексом отмечены значения, относящиеся к настоящему моменту времени.

Известно, что плотность энергии двух первых компонентов составляет соответственно $\Omega_b = 0.0499$ и $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$ от критической плотности энергии в настоящее время [18]. Для нейтрино данные менее определенные $\Omega_\nu < 5.52 \cdot 10^{-3}$. Далее, чтобы оценить максимальную степень влияния материи на процесс эволюции, будет использовано именно это значение относительной плотности нейтрино.

На временах не слишком далеких от настоящего времени имеем следующие зависимости средней плотности энергии и давления материи от объемного фактора:

$$\rho_{mat} = \rho_{cr}^0 \left[\Omega_b \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} + \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.7)$$

Функционал в правой стороне (4.2 - 4.6), описывает обратное воздействие материи на метрику. В момент начала эволюции функционал равен нулю, а вся энергия сосредоточена в гравитационном поле, поэтому в первом приближении обратным воздействием можно пренебречь. Положим

$$M^{(1)}(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = 0,$$

где индекс в скобках обозначает номер приближения.

В этом случае изменение объемного фактора и его производной по-прежнему будет описываться соотношениями (3.20), (3.21), а критическая плотность - соотношением (4.3). Таким образом, в этом приближении плотность энергии и давление материи можно считать известными функциями от u при $u_b \leq u$.

$$\rho_{mat}(u) = \rho_{cr}^0 \frac{f(u^0)}{f(u)} \left[\Omega_b + \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{1/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.8)$$

4.1 Плотность энергии материи в очень ранней Вселенной.

При $0 \leq u \leq u_b$ (очень ранняя Вселенная) условия, при которых справедливы соотношения (4.8) нарушаются. Причиной является экстремально высокая плотность энергии гравитационного поля, достигающая, как показано в разделе 3, уровня плотности энергии БАК. В этих условиях помимо перечисленных частиц будут рождаться, и другие компоненты стандартной модели элементарных частиц и полей.

Имея это в виду, доопределим зависимости $\rho_{mat}(u)$ в начале процесса эволюции следующим образом. Поскольку в этот период других источников энергии кроме гравитации нет, примем, что она пропорциональна $\rho_{gr}(u)$ с безразмерным коэффициентом, зависящим от плотности энергии гравитационного поля

$$\rho_{mat}(u) = \lambda \cdot \left(\frac{u}{f(u)} \right)^n \cdot \rho_{gr}(u), \quad \lambda < 1, \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.9)$$

Исключая плотность энергии гравитации из соотношений (4.3), (4.9) получим

$$\rho_{mat}(u) = \frac{\lambda \cdot u^n}{f^n(u) + \lambda \cdot u^n} \cdot \rho_{cr}(u), \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.10)$$

Постоянную λ и величину u_b определим из условий гладкого сопряжения зависимостей (4.8), (4.10) при $u = u_b$. Приравнявая отдельно плотности энергии и их производные при $u = u_b$, получим систему двух уравнений для определения u_b и λ :

$$\frac{\lambda \cdot u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n} = \left(\frac{u^0}{u_b} \right)^2 \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right], \quad (4.11)$$

$$4u_0^2 \cdot \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] = \left(n + 2 - n \frac{\lambda \cdot u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n} \right) \frac{\lambda \cdot u_b^n (2u_b - \sigma)}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n}. \quad (4.12)$$

Эта система уравнений имеет два различных решения, физически осмысленным является решение с меньшим значением u_b . Для него $u_b \ll f(u_b) \ll f(u^0)$, поэтому уравнение (4.12) упрощается и решение принимает вид

$$u_b \approx \frac{3(2+n) - \sqrt{9(2+n)^2 - 48(2+n) \cdot \sigma}}{16}.$$

Величина u_b определяет тот момент мирового времени, когда материя отделяется от гравитационного поля. Это происходит из-за уменьшения абсолютной величины скалярной кривизны с течением времени. Конкретно это происходит в момент ее первого обращения в ноль. Из (3.39) следует, что $R(u) = 0$ при

$$u = \frac{6 - \sqrt{36 - 96 \cdot \sigma}}{16}.$$

Это выражение совпадает с u_b при $n = 0$. Для этого значения из (4.11) найдем отношение плотности энергии материи к плотности энергии гравитационного поля на момент отделения от него материи

$$\lambda \approx \Omega \cdot \left(\frac{u^0}{u_b} \right)^2 \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3}, u_b \approx \frac{6 - \sqrt{36 - 96 \cdot \sigma}}{16}. \quad (4.13)$$

При подстановке в это соотношение значений, соответствующих данным Таблицы 2, найдем, что эта доля составляла $2.754 \cdot 10^{-20}$. Плотность энергии Вселенной при $u = u_b - 1.390 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³ на момент времени $t - t_{st} = 8.183 \cdot 10^{-13}$ секунды. При приближении к начальному моменту времени средняя плотность энергии материи уменьшается в соответствии с (4.10), стремясь к нулю вместе с критической плотностью.

4.2 Температурная история ранней и очень ранней Вселенной.

Обратимся теперь к температурной истории ранней Вселенной. При этом мы будем исходить из основных положений, изложенных в [7]. К раннему периоду относят промежуток времени, когда температура электромагнитного излучения находилась в диапазоне от 10^{11} до 4000 °К. Утверждается [7], что справедливы следующие соотношения между плотностью энтропии s , температурой θ и масштабным фактором a для электромагнитного излучения и нейтринной материи (соответствующие величины помечены нижним индексом γ или ν):

$$s_\gamma(\theta)a^3 = const, s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3} a_B \theta_\gamma^3, s_\nu(\theta)a^3 = const, s_\nu(\theta) = \frac{7}{2} a_B \theta_\nu^3, a_B = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3}.$$

Используя полученные в предыдущем разделе выражения для объемного фактора, перепишем эти соотношения в виде:

$$s_\gamma(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\gamma(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3} a_B \theta_\gamma^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{4}{3} a_B \theta_\gamma^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \theta_\gamma = \theta_\gamma(u_b). \quad (4.14)$$

$$s_\nu(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\nu(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); s_\nu(\theta) = \frac{7}{2} a_B \theta_\nu^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{7}{2} a_B \theta_\nu^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \theta_\nu = \theta_\nu(u_b). \quad (4.15)$$

В [7] показано, что уравнение (3.48) применимо и для описания изменения температуры материи во Вселенной. В этом случае в силу аддитивности вкладов компонент в давление и плотность энтропии уравнение (3.48) принимает вид

$$dp_{mat} = (s_\gamma(\theta) + s_\nu(\theta))d\theta. \quad (4.16)$$

Применим это уравнение к описанию начального этапа эволюции при $0 \leq u \leq u_b \ll u^0$. В этом случае, как следует из (4.8), вклад барионов в общую плотность энергии материи ничтожно мал, материю можно считать ультррелятивистской средой и с учетом (4.3), (4.10) записать давление материи в виде

$$p_{mat}(u) = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{c^2}{24\pi G T^2 \gamma_{min}} \cdot \left(\frac{u}{f(u)} \right)^2, 0 \leq u \leq u_b.$$

Пренебрегая пока возможным различием температур компонент материи запишем уравнение (4.16), определяющее изменение температуры.

$$\frac{\lambda}{3} \cdot \frac{c^2}{24\pi G T^2} \cdot \frac{f(u)}{f(u_b)} d \left(\frac{u}{f(u)} \right)^2 = \frac{29}{6} a_B \theta_b^3 d\theta. \quad (4.17)$$

Интегрируя это уравнение с учетом определения (3.21) функции $f(u)$ и её производной, получим при $0 \leq u \leq u_b$

$$\theta^3(u_b) \cdot \theta(u) = \frac{\lambda}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{\min}} \cdot \frac{1}{f(u_b)} \int_0^u \frac{(\sigma - 2u)udu}{(4u^2 - 2u + \sigma)f(u)}. \quad (4.18)$$

Подставляя в это уравнение выражение (4.13) для параметра λ , найдем величину температуры $\theta(u_b)$ в момент отделения материи от гравитационного поля.

$$\theta(u_b) = \left[\frac{1}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{\min}} \cdot \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u^{03} \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} I(u_b) \right]^{1/4}, \quad (4.19)$$

где

$$I(u_b) = \int_0^{u_b} \frac{(\sigma - 2u)udu}{(4u^2 - 2u + \sigma)f(u)}.$$

Расчет при значениях параметров, соответствующих данным Таблиц 1 и 2 дает $I(u_b) = 2.302 (\pm 0.0005) \cdot 10^{-4}$. При этом в первом случае $\theta(u_b) = 1.345 \cdot 10^{21} \text{ } ^\circ\text{K}$, во втором - $\theta(u_b) = 1.145 \cdot 10^{11} \text{ } ^\circ\text{K}$.

Согласно расчетам, приведенным в [7], температуры излучения и нейтрино совпадают при $\theta = 10^{11} \text{ } ^\circ\text{K}$, ниже неё нейтрино выходят из равновесия с другими частицами и их температура понижается, асимптотически стремясь к величине

$$\theta_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \theta_\gamma.$$

В то же время температура излучения при $u > u_b$ будет убывать по мере роста масштабного фактора по закону [7]:

$$\frac{\theta_\gamma(u)}{\theta_\gamma(u_b)} = \frac{\gamma^{1/6}(u_b)}{\gamma^{1/6}(u)} = \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)}. \quad (4.20)$$

Подставляя сюда выражение (4.19), найдем зависимость текущего значения температуры излучения от $u(t)$ при $u > u_b$

$$\theta_\gamma(u) = \left[\frac{1}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{\min}} \cdot \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u^{03} \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} I(u_b) \right]^{1/4} \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)}. \quad (4.21)$$

4.3 К вопросу об относительной плотности нейтрино во Вселенной.

При $u = u^0$, то есть в настоящий момент в нашей Вселенной значение температуры $\theta_\nu(u^0)$ должно быть равно экспериментально наблюдаемой температуре реликтового излучения $2.7255 \text{ } ^\circ\text{K}$. Расчет по (4.21) при значениях параметров, соответствующих данным Таблицы 1 дает $\theta_\nu(u^0) = 6.6215 \text{ } ^\circ\text{K}$, для данных Таблицы 2 - $\theta_\nu(u^0) = 6.6147 \text{ } ^\circ\text{K}$.

В построенном континууме моделей Вселенной для двух крайних случаев, отличающихся между собой по максимальной плотности энергии на 64 порядка, в один и тот же момент времени (нашего настоящего) температуры реликтового излучения практически совпадают между собой, но отличаются от наблюдаемого в нашей Вселенной значения более чем в два раза. В изложенной феноменологической модели нет свободных параметров, поэтому такое расхождение могло бы означать её крах, если бы не одно обстоятельство. Как отмечалось в начале раздела относительная плотность нейтрино согласно данным [18] $\Omega_\nu < 5.52 \cdot 10^{-3}$ и она в отличие от плотности излучения $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$ точно не определена также как и их сумма $\Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$. Эта величина входит в выражение для температуры реликтового

излучения (4.21) в виде постоянного множителя $\Omega^{1/4}$. Поэтому расхождение с экспериментом можно устранить, если вместо старого значения относительной плотности $\Omega = 5.575 \cdot 10^{-3}$ ввести новое значение Ω^* :

$$\Omega^* = (\Omega_v^* + \Omega_\gamma) = 1.6068 \cdot 10^{-4}, \Omega_v^* = 1.6068 \cdot 10^{-4} - 5.46 \cdot 10^{-5} = 1.0608 \cdot 10^{-4} \quad . \quad (4.22)$$

Таким образом, если верна изложенная теория, то *неизвестная в настоящее время относительная плотность нейтрино во Вселенной равна $\Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$* . В этом случае при $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$, $\theta_\gamma(u_b) = 4.719 \cdot 10^{10} \text{ } ^\circ\text{K}$, а максимальная температура излучения во Вселенной - $\theta_{\gamma\max} = 9.404 \cdot 10^{10} \text{ } ^\circ\text{K}$ достигается при $t - t_{st} = 3.9 \cdot 10^{13} \text{ с}$. Как показано в разделе 3 $\rho_{gr\max} < 10^{50} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$. При таком значении максимально возможной плотности энергии температура материи во Вселенной никогда не превышала $\theta_{\gamma\max} = 1.230 \cdot 10^{11} \text{ } ^\circ\text{K}$.

4.4 Величина относительной плотности наблюдаемой во Вселенной материи.

Независимо от наличия или отсутствия материи суммарная средняя плотность энергии во Вселенной (4.3) всегда равна критической. Поэтому с учетом (4.8) доля средней плотности энергии материи в ее общем количестве при найденном значении относительной плотности нейтрино Ω_v^* составляет

$$quota(u) = \frac{\rho_{mat}(u)}{\rho_{cr}(u)} = \frac{u^{02} f^2(u)}{u^2 f^2(u^0)} \left[\Omega_b \frac{f(u^0)}{f(u)} + \Omega \cdot \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3} \right].$$

С учетом (3.21), (3.42) эта величина следующим образом зависит от времени.

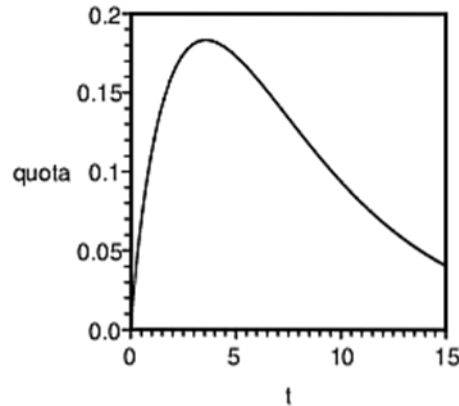


Рисунок 6. Зависимость отношения средней плотности энергии материи к плотности энергии во Вселенной от времени (в миллиардах лет), $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$.

Максимальная доля энергии материи не превышает 0.1832, в настоящее время эта величина составляет менее 0.055 и продолжает уменьшаться со временем. В отличие от *ОТО*, где плотность энергии материи неограниченно возрастает при уменьшении времени, здесь она достигает максимума, а затем начинает уменьшаться.

Остальная и основная часть энергии Вселенной это энергия гравитационного поля

$$\rho_{gr}(u) = \rho_{cr}(u)(1 - quota(u)).$$

С учетом (3.44) эта величина может быть связана с красным смещением наблюдаемых объектов.

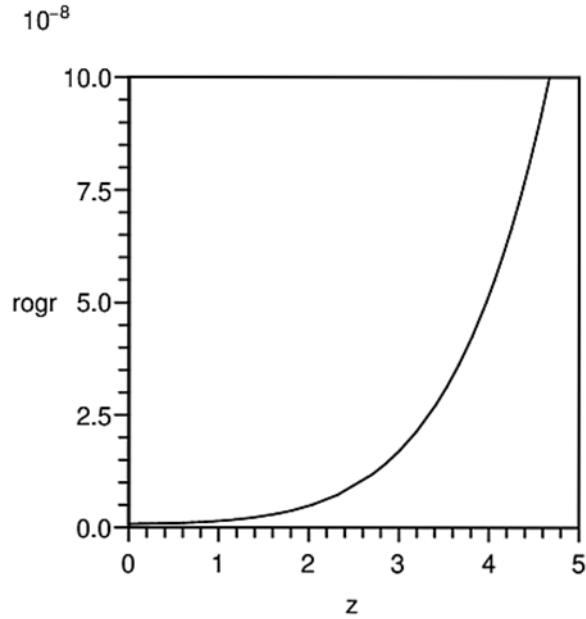


Рисунок 7. Зависимость плотности энергии гравитационного поля ρ_{gr} (10^{-8} Дж·м⁻³) от красного смещения в месте нахождения наблюдаемых гравитационно-связанных объектов, $\rho_{grmax} = 2 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³.

Рассмотрим два таких объекта, находящихся в однородном изотропном гравитационном поле, плотность энергии которого зависит от их расстояния до наблюдателя (рисунок 7). Выделим мысленно объем шара, с радиусом равным расстоянию между объектами. На динамику этих объектов такое окружающее гравитационное поле не влияет. Однако объект на поверхности будет находиться под действием тяготения массы шара, состоящей из массы основного объекта и распределенной массы гравитационного поля. Именно эта дополнительная масса (энергия), а не «темная материя», проявляется в характере зависимостей кривых вращения гравитационно-связанных объектов.

Согласно данным [18] плотность энергии холодной темной материи в Λ CDM -модели ОТО равна

$$\rho_{cdm}(z) = \Omega_{cdm} \rho_{cr}^0 (1+z)^3, \quad \Omega_{cdm} = 0.265_{-0.17}^{+0.16}.$$

На рисунке 8 представлена зависимость ее отношения к плотности энергии гравитационного поля

$$beta(z) = \frac{\rho_{cdm}(z)}{\rho_{gr}(z)}$$

в широком диапазоне изменения красного смещения.

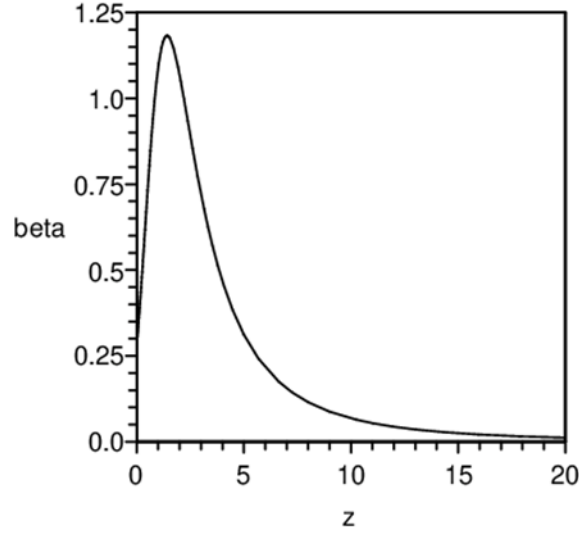


Рисунок 8. Отношение плотности энергии холодной темной материи к плотности энергии гравитационного поля в зависимости от красного смещения.

Как видно из рисунка 8, при расчете кривых вращения гравитационно-связанных объектов с использованием гипотетической плотности темной материи можно получить в определенной области красных смещений разумное согласие с экспериментом, однако имеется обширная область этих значений, где такой расчет приведет к ошибочным результатам. Не видно разумных доводов для замены гравитационного поля - реального источника дополнительной массы на гипотетическую холодную материю с возможной непредсказуемой величиной погрешности.

Таким образом, в отличие от ОТО для описания особенностей эволюции Вселенной не требуется вводить какие либо новые формы материи помимо уже известных форм.

4.5 Влияние наличия материи на процесс эволюции Вселенной.

Оценим теперь влияние материи на процесс эволюции пространственно-временного многообразия. Во втором приближении при заданной функции $\gamma(u)$ найдем

$$M^{(2)}\left(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}\right) \cong w(u),$$

$$w(u) = -2u^{02} \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \cdot \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] + \int_0^u \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{2}{3} \Omega \cdot \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] \frac{4u^{02} du}{4u^2 - 2u + \sigma} \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23) в (4.1), получим уравнение, описывающее, как материя в свою очередь влияет на изменение метрики. Решение этого уравнения может быть записано в квадратурах.

$$\sqrt{\frac{\gamma(u)}{\gamma_{\min}}} = \psi(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)} \right). \quad (4.24)$$

$$t - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4\psi(u)du}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)}. \quad (4.25)$$

Фигурирующая в этих соотношениях постоянная σ подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе, должна определяться вместе со значением u^0 из условия равенства вычисленного времени существования Вселенной и параметра Хаббла их наблюдаемым в настоящий момент значениям.

$$t^0 - t_{st} = T\sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4\psi(u)}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)} du, H^0 = \frac{1}{3T\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{\psi(u^0)}. \quad (4.26)$$

Решение этой системы уравнений при $t^0 - t_{st} = 4.355 \cdot 10^{17} \text{с}$, $H^0 = 2.181 \cdot 10^{-18} \text{с}^{-1}$, максимальной плотности энергии $\rho_{\text{grmax}} = 2 \cdot 10^{49} \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3}$ и относительной плотности компонент материи: $\Omega_b = 0.0499$; $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$; $\Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$ имеет вид

$$T\sqrt{\gamma_{\min}} = 8.6912868 \cdot 10^{-14} \text{с}, u^0 = 6.79 \dots, \sigma = 0.25050968.$$

Далее в графической форме представлены результаты расчетов, проведенных как с учетом, так и без учета наличия материи во Вселенной. Расчеты проводились при значении $\Omega_v = 5.52 \cdot 10^{-3}$, поэтому при расчете с реальным значением $\Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$ различие каждой пары зависимостей будет еще меньше.

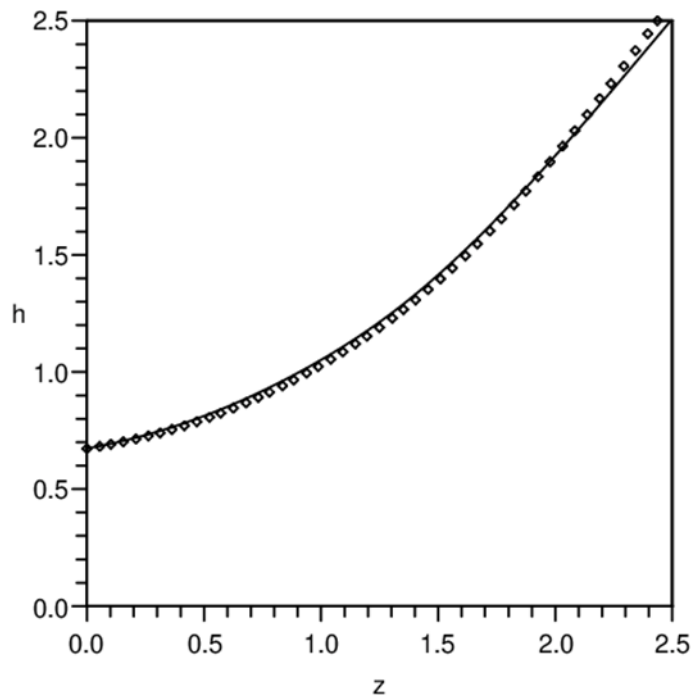


Рисунок 9. Результаты расчета зависимости параметра Хаббла ($H=100h \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$) от красного смещения с учетом (сплошная линия) и без учета (точки) наличия материи.

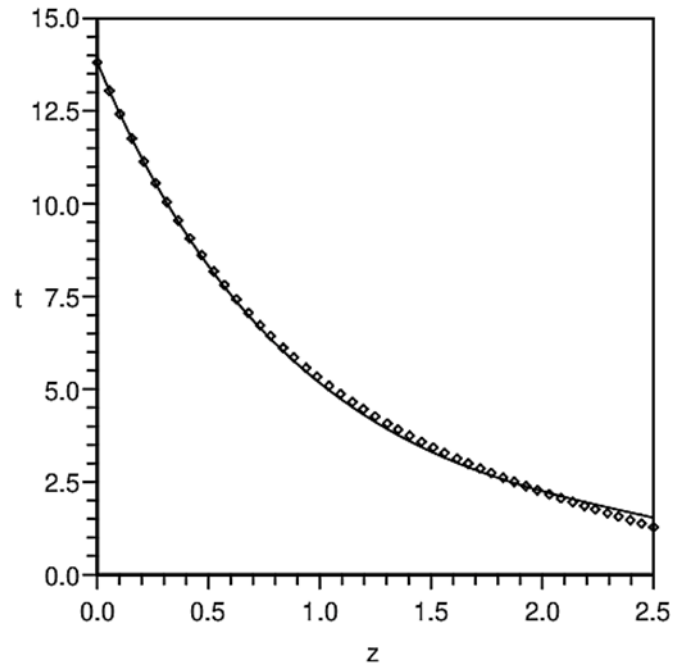


Рисунок 10. Рассчитанный возраст объекта (в миллиардах лет) в зависимости от его наблюдаемого красного смещения с учетом (сплошная линия) и без учета (точки) наличия материи.

Принимая во внимание приведенные в предыдущем разделе данные, можно сделать вывод о том, что в диапазоне красных смещений менее 2.3 влияние предыстории на дальнейший ход приведенных зависимостей незначительно.

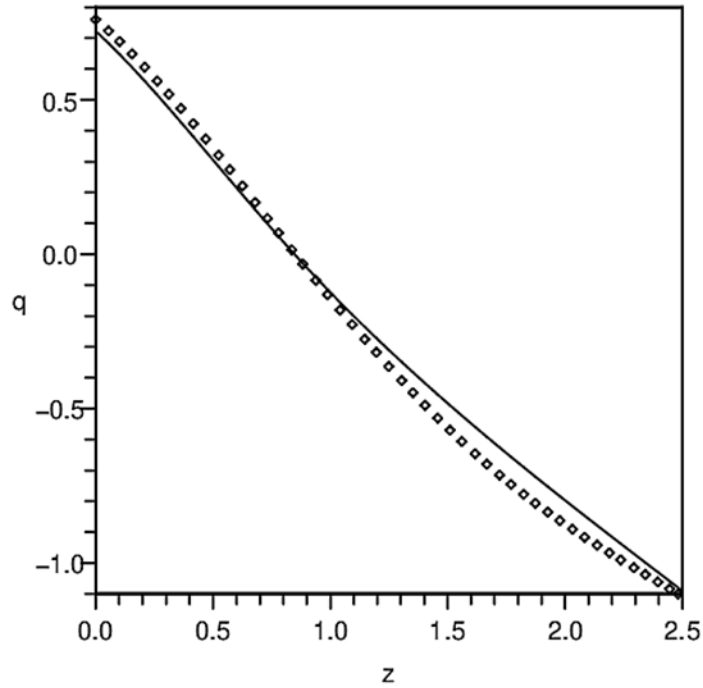


Рисунок 11. Результаты расчета зависимости космического ускорения от красного смещения с учетом (сплошная линия) и без учета (точки) наличия материи.

Рождение материи также не приводит к заметному изменению времени смены эпох замедления – ускорения.

5. Статическая изотропная метрика

Следуя подходу, изложенному в разделе «Классические опыты по проверке теории Эйнштейна» [8, с. 191-228], рассмотрим статическую сферически-симметричную метрику. Наиболее общее выражение для пространственно-временного интервала преобразованием координат с равным единице якобианом [8]

$$x'^0 = x^0 + \varphi(x^m), \quad x'^m = x^m$$

может быть приведено к виду

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - \frac{G(r)}{r^2}(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2 - C(r)(d\bar{x} \cdot d\bar{x}).$$

Связь (1.1) инвариантна относительно таких преобразований, но теперь, в отличие от *ОТО*, ее наличие не позволяет уменьшить количество искомым компонент метрики до двух.

Используя символы Кронекера δ_{mn} , запишем метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в виде:

$$g_{00} = F(r), \quad g_{0m} = 0, \quad g_{mn} = -C(r) \cdot \delta_{mn} - G(r) \frac{x_m x_n}{r^2}, \quad x_m \equiv x^m, \quad (5.1)$$

$$g(r) = \det g_{\mu\nu} = -FC^2(C + G).$$

Тензор $g^{\mu\nu}$ обратный метрическому тензору ($g_{mn} g^{nk} = \delta_m^k$) имеет вид

$$g^{00} = \frac{1}{F(r)}, \quad g^{0m} = 0, \quad g^{mn} = -\frac{1}{C(r)}\delta^{mn} + \frac{G(r)}{C(C+G)}\frac{x^m x^n}{r^2}. \quad (5.2)$$

При наличии связи (1.1) удобнее исходить не из уравнений, получаемых при варьировании действия по компонентам метрики, а выбрать в качестве одной из варьируемых функций $\Delta(r) = \sqrt{-g(r)}$.

Связь дает следующий вклад в действие (2.1):

$$\Lambda = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{1}{2g(r)} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = -\frac{\Phi'(r)g'(r)}{2[C(r)+G(r)]g(r)} = -\frac{\Phi'(r)\Delta'(r)}{\Delta(r)^3} F(r)C(r)^2. \quad (5.3)$$

(Штрих здесь и далее обозначает дифференцирование по r).

Остальные члены можно найти, используя известные результаты расчетов [8,15]. Скалярная кривизна и элемент объема общековариантны, поэтому их можно вычислить, используя «сферические» координаты.

В «сферических» координатах пространственно-временной интервал имеет вид

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

По аналогии со «стандартной» формой [8] запишем его следующим образом:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^{*2}(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.4)$$

где $A(r) = G(r)+C(r)$, $r^*(r) = rC^{1/2}(r)$.

Для данной метрики неисчезающие компоненты связности несколько отличаются от соответствующих компонент «стандартной» формы [8]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ir}^i = \Gamma_{rt}^t = \frac{F'}{2F}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r^* r^{*'}}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r^* r^{*'} \sin^2 \theta}{A}, \quad \Gamma_{tt}^t = \frac{F'}{2A}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{r^{*'}}{r^*}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{r^{*'}}{r^*}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \text{ctg} \theta. \end{aligned}$$

Соответственно этому изменяется выражение для тензора кривизны.

Используя выражения для компонент связности, найдем скалярную кривизну

$$R = \frac{1}{2F} \left(\frac{F'}{A} \right)' + \frac{1}{2A} \left(\frac{F'}{F} \right)' + \frac{2}{r^{*2}} \left(\frac{r^* r^{*'}}{A} \right)' + \frac{2}{A} \left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)' - \frac{2}{r^{*2}} + \frac{2}{A} \left[\left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)^2 + \frac{r^{*'} F'}{r^* F} \right].$$

Выделяя дивергентный член, можно записать ее в виде

$$R = \frac{1}{r^{*2} \sqrt{AF}} \frac{d}{dr} \left[r^{*2} \sqrt{AF} \left(\frac{F'}{AF} + \frac{4r^{*'}}{r^* A} \right) \right] - 2 \left[\frac{r^{*'} F'}{r^* AF} + \frac{1}{A} \left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)^2 + \frac{1}{r^{*2}} \right]. \quad (5.5)$$

Действие для гравитационного поля

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + \Lambda) \sqrt{AF} r^{*2} \sin \theta dr d\theta d\varphi dx^0.$$

Подставляя сюда выражение (5.5) для R и (5.3) для Λ , опуская дивергентный член и учитывая, что $A = \Delta^2/FC^2$, получим

$$S_{gr} = \frac{c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{r^{*2}} + \frac{r^{*2} F}{\Delta r^4} (r^{*'})^2 + \frac{1}{\Delta r^4} r^{*3} r^{*'} F' + \frac{\Phi' \Delta' r^{*4} F}{2\Delta^2 r^4} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dx^0.$$

Вместо r введем переменную $\xi = r^3$, тогда действие примет вид

$$S_{gr} = \frac{3c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{9r^{*2}} + \frac{Fr^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{\Delta} r^{*3} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} + \frac{Fr^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) d\xi \sin \theta d\theta d\varphi dx^0.$$

Из принципа наименьшего действия найдем уравнения гравитационного поля в свободном от материи пространстве:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*4} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{9r^{*2}} - \frac{r^{*2}}{\Delta^2} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 F - \frac{r^{*3}}{\Delta^2} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} - \frac{1}{2\Delta^2} \frac{d}{d\xi} \left(r^{*4} F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{r^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*3}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) + \frac{r^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0, \quad (5.8)$$

$$-\frac{2\Delta}{9r^{*3}} - 2r^* \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^* F}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - r^{*3} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2 \frac{r^{*3} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0. \quad (5.9)$$

Из уравнения (5.6) следует

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} = \alpha, \quad (5.6')$$

где α – постоянная с размерностью длины.

Умножим уравнение (5.7) на 2Δ , вычтем из результата - (5.8), умноженное на $2F$, и сложим результат с уравнением (5.9), умноженным на r^* , после несложных преобразований приведем уравнение к виду

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*4}}{\Delta} \left(\frac{dF}{d\xi} + F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \right] = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = \beta,$$

где β – еще одна постоянная с размерностью длины. Полагая $\beta = \sigma \cdot \alpha$, где σ численный множитель, и используя (5.6') это уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} = \sigma \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Учитывая, что функция $\Phi(r)$ определена с точностью до постоянной, найдем

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}). \quad (5.7')$$

Уравнение (5.8) перепишем следующим образом

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*2}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) = \frac{r^{*3}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi}. \quad (5.8')$$

После подстановки этого выражения в уравнение (5.9) оно примет вид

$$r^{*4} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{Fr^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - 4 \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{r^* dr^*}{d\xi} \right)^2 + r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) \right] F + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0$$

Это уравнение эквивалентно следующему

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right] + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , получим

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) - \beta_1 \frac{\Delta}{r^{*6}} + \frac{2}{9} \frac{\Delta}{r^{*6}} \int_0^\xi \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi = 0, \quad (5.9')$$

где $\beta_1 = \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right]_{\xi=0}$ – еще одна постоянная с размерностью длины.

Таким образом, решение исходной системы уравнений зависит от выбора значений трех постоянных α, β_1, σ .

Прежде всего, рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$. В этом случае из (5.6') следует

$$\Delta(r) = \text{const} = \Delta(\infty) = 1.$$

Далее последовательно из (5.7'), (5.8'), (5.9') найдем

$$\Phi(r) = -\ln F(r).$$

$$\frac{r^*(r)}{r} = \text{const} = \frac{r^*(r)}{r} \Big|_{r=\infty} = 1.$$

$$F(r) = 1 - \frac{\beta_1}{r}.$$

Это решение по форме совпадает с решением Шварцшильда, однако имеется принципиальное отличие, связанное с наличием скаляра $\Phi(r)$. Его значение на гравитационном радиусе стремится к бесконечности. С одной стороны это означает, что решение нельзя продолжить за гравитационный радиус, а с другой стороны энергия гравитационного поля также стремится к бесконечности (Приложение П.8). Следовательно, это решение оказывается нефизическим, и следует принять $\beta_1 = 0$, решение является метрикой Минковского.

Положим далее $\beta_1=0$ для того, чтобы метрика Минковского могла быть решением данной системы уравнений (в случае, когда константа α равна нулю).

Интегрируя уравнение (5.9') еще раз, представим функцию $F(r)$ в виде

$$F = \frac{2}{9} r^{*2} \int_{\xi}^{\infty} \left(\int_0^{\xi} \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi \right) \frac{\Delta}{r^{*6}} d\xi. \quad (5.9'')$$

Подставляя выражение для производной Δ из уравнения (5.6'), перепишем уравнение (5.8') в виде

$$\frac{d}{dr^*} \frac{1}{V} = \frac{3\alpha}{2r^* F} \frac{d\Phi}{dr^*}, \quad V = \frac{\Delta(r^*)}{3r^{*2}} \frac{d\xi}{dr^*}.$$

Переходя во всех соотношениях от производных по $\xi=r^3$ к производным по r^* и вводя безразмерные координаты r/α и r^*/α (сохраняя для них прежние обозначения r и r^*) исходную систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr^*} = \frac{3V(r^*)}{Fr^{*2}}, \quad (5.10)$$

$$V(r^*) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \frac{1}{r^* F} \frac{d\Phi}{dr^*} dr^*}, \quad \Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad (5.11)$$

$$F(r^*) = 2r^{*2} \int_{r^*}^{\infty} \left(\int_{r^*_{\min}}^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{1}{r^{*4}} V(r^*) dr^*, \quad (5.12)$$

$$\frac{\Delta(r^*) r^2}{r^{*2}} \frac{dr}{dr^*} = V(r^*). \quad (5.13)$$

Отличное от нуля значение $r^*_{\min} = r^*(0)$ означает, вообще говоря, наличие *края* у пространственно-временного многообразия.

Рассмотрим поведение метрики при $r^*_{\min} = 0$ и малых значениях r^* . Из (5.12) следует, что если существует интеграл

$$2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{V(r^*)}{r^{*4}} dr^* = b > 0, \quad (5.14)$$

то при малых r^* функция $F(r^*) \approx b \cdot r^{*2}$. Тогда полагая $V(r^*) \approx b_1 \cdot r^{*v} \geq 0$, $\Delta(r^*) \approx b_2 \cdot r^{*\delta} \geq 0$ и подставляя эти выражения в (5.10, 5.13), получим:

$$\nu = 3, \quad b_1 = \frac{2b}{2 - \sigma \cdot \delta}, \quad \delta = \frac{6}{2 - \sigma \cdot \delta} > 0. \quad (5.15)$$

Из последнего соотношения следует

$$\delta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 6\sigma}}{\sigma},$$

поэтому $\sigma \leq 1/6$.

Интегрируя уравнение (5.13) найдем при малых значениях r, r^*

$$r^3(r^*) = 3 \int_0^{r^*} \frac{V(r^*)}{\Delta(r^*)} r^{*2} dr^* \approx 3 \frac{b_1}{b_2} \int_0^{r^*} r^{*(5-\delta)} dr^*. \quad (5.16)$$

Последний интеграл существует только при $\delta < 6$. В этом случае

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 6\sigma}}{\sigma}, \quad \sigma < \frac{1}{6}. \quad (5.17)$$

Рассмотрим теперь выражение для энергии статического изотропного гравитационного поля (см. Приложение I). В этом случае

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d \ln(F \Delta^{-\sigma})}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma}(r^*_{\min}) \right]. \quad (П.8)$$

Последний член в этом соотношении имеет логарифмическую особенность при $r^*_{\min} = 0$. Энергия будет иметь конечное значение лишь при $r^*_{\min} \neq 0$, то есть при *наличии края*. Это возможно, только при значении $\sigma = 1/6$.

Величина r^*_{\min} является независимым параметром и для её определения необходимы добавочные соображения. Положим, во-первых, в соответствии с *принципом Маха*, что инертная масса M_{in} связана с полной энергией гравитационного поля E вне края формулой Эйнштейна $E = M_{in} c^2$. Во-вторых, в соответствии с *экспериментальными данными* примем, что эта инертная масса должна совпадать по величине с массой гравитационной $M_{in} = M_{gr}$. И, наконец, на основании *принципа соответствия с ОТО* положим при больших значениях r^* коэффициент при первом члене разложения функции $F(r^*)$ по степеням $1/r^*$ равным отношению гравитационного радиуса к α

$$F(r^*) = 1 - \frac{r_{gr}}{\alpha} \frac{1}{r^*} + \dots = 1 - \frac{2M_{gr} G}{c^2 \alpha} \frac{1}{r^*} + \dots \quad (5.18)$$

В этом случае соотношение (П.8) переходит в уравнение, определяющее величину r^*_{\min} .

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2r^*_{\min} F(r^*_{\min})}{3V(r^*_{\min})} - \ln \frac{F(r^*_{\min})}{\Delta^{1/6}(r^*_{\min})}. \quad (5.19)$$

Решение системы уравнений (5.10) - (5.13), (5.19) можно найти методом последовательных приближений. Начиная с пробной функции $V^{(0)}(r^*)$ и выбранном начальном значении r^*_{\min} можно найти в первом приближении из (5.12) функцию $F^{(0)}(r^*)$, а

затем из (5.10) - $\Delta^{(0)}(r^*)$ и новое значение $V^{(1)}(r^*)$ из (5.11). Продолжаем этот процесс до получения на N-ном шаге значений искомым функций с требуемой точностью. Значение размера r^*_{\min} найдем из уравнения (5.19). А затем из уравнения (5.13) найдем функцию $r(r^*)$.

Построим пробную функцию. Если при больших значениях r^* справедливо (5.18), то тогда из (5.10, 5.11) следует $V(r^*) \approx 1 - v/r^{*2} + \dots$. Поскольку при наличии края поведение искомым функций при малых значениях r^* не определено, естественно предположить, что относительный размер r^*_{\min} больше единицы. При $r^*_{\min} \geq 1$, зададим пробную функцию следующим образом

$$V^{(0)}(r^*) = 1 - v/r^{*2}. \quad (5.20)$$

Подставляя это выражение в (5.12), найдем

$$F^{(0)}(r^*) = 1 - \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{1}{r^*} + \frac{2}{5} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{v}{r^{*3}} - \frac{v^2}{3} \frac{1}{r^{*4}}. \quad (5.21)$$

В этом приближении, исходя из принципа соответствия, получим

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right). \quad (5.22)$$

Постоянную величину v можно выбрать так, чтобы в точке $r^* = r^*_{\min}$ значения пробной функции и первого приближения совпадали $V^{(0)}(r^*_{\min}) = V^{(1)}(r^*_{\min})$. Подставляя (5.20), (5.21) в (5.10), найдем

$$\ln \Delta^{(0)}(r^*) = -3 \int_{r^*}^{\infty} \frac{V^{(0)}(r^*)}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} dr^*, \quad (5.23)$$

а затем из (5.11)

$$V^{(1)}(r^*) = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{r^* F^{(0)}(r^*)} - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \left(1 + \frac{V^{(0)}(r^*)}{2r^* F^{(0)}(r^*)} \right) \frac{dr^*}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} \right)^{-1}. \quad (5.24)$$

В этом случае

$$v = (1 - V^{(1)}(r^*_{\min})) r^{*2}_{\min}. \quad (5.25)$$

Это уравнение определяет v в зависимости от r^*_{\min} .

В более высоких приближениях при вычислениях использовались сплайн аппроксимации. После пяти последовательных приближений, решая уравнение (5.19), найдем (при использовании в расчетах шести интервалов) с погрешностью в доли процента

$$r^*_{\min} \approx 1.74.$$

Это значение, как и предполагалось, больше единицы. В размерном виде

$$r^*_{\min} \approx 0.935 r_{gr}. \quad (5.26)$$

Следует отметить, что согласно (5.26) не исключается существование траекторий расположенных ниже гравитационного радиуса.

Результаты расчетов представлены в Таблице 3.

$\sigma=1/6 ; x_{\max}=0.575 ; r_{gr}/\alpha=1.859$				
$x=\alpha/r^*$	$V(x)$	$F(x)$	$\Delta(x)$	$C^{-1/2}(x)=r(x)/r^*$
0	1	1	1	1
0.1	0.9875	0.8160	0.7184	1.1792
0.2	0.9346	0.6381	0.4814	1.3523
0.3	0.8202	0.4746	0.2980	1.4556
0.4	0.6471	0.3386	0.1721	1.4378
0.5	0.4596	0.2366	0.0962	1.2288
0.575	0.3413	0.1813	0.0543	0

Таблица 3. Решение системы уравнений (5.10..5.13) при значении $\sigma=1/6$.

Значение одной из инвариантных метрических функций - $C(r)$ неограниченно возрастает при приближении к краю, то есть на краю имеется неустранимая сингулярность.

Таким образом, при наличии связи (1.1) имеется стационарное распределение центрально-симметричного гравитационного поля, для которого выполняется равенство инертной (определенной в соответствии с принципом Маха) и гравитационной массы. При $r \gg r_{gr}$ найденное решение асимптотически стремится к решению Шварцшильда. Этого достаточно для того, чтобы не нарушалось согласие с результатами классических опытов по проверке теории Эйнштейна [8].

6. Основы квантовой теории тяготения

Формулировка основных положений квантовой теории, принципиально невозможна без привлечения теории классической [22]. Для построения квантовой теории следует, прежде всего, определить динамические степени свободы. Как показано в разделе 3, в квазиклассической теории тяготения существует единственное однородное пространство-время с изотропной метрикой вида

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

Для этой метрики выражения для символов Кристоффеля и отличных от нуля компонент тензора Риччи имеют вид:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \Gamma_{0l}^0 = 0, \Gamma_{nl}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{d\gamma^{1/3}}{dx^0} \delta_{nl}, \Gamma_{00}^m = 0, \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{6\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_l^m, \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (6.1)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{12g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2, \quad (6.2)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{6\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (6.3)$$

В общем случае действие гравитационного поля в квазиклассической теории тяготения имеет вид (2.1)

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}.$$

Подставляя выражения для скалярной кривизны и опуская полные производные, не дающие вклада в уравнение движения, найдем выражение для действия однородного изотропного пространства объема V

$$S_{gr} = \int Ldt = \frac{c^2}{16\pi G} \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} dt V, \quad (6.4)$$

где L - лагранжиан гравитационного поля и введено обозначение $cdt = \sqrt{g_{00}} dx^0$.

Следует отметить, что в выражении (6.4) мы изменили по сравнению с (2.1) знак действия с минуса на плюс. В ОТО доказано [15], что скалярная кривизна должна входить в действие со знаком минус, однако для однородного пространства (3.1) это доказательство не проходит. При наличии знака минус перед интегралом (6.4) стандартные рассуждения приводят к выводу, что это действие не может иметь минимум. Правильное значение знака – плюс.

В планковских единицах объем однородного изотропного пространства представим в виде

$$V = l_{pl}^3 \lambda = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{3/2} \lambda, \quad \lambda = const.$$

Тогда исходное действие для квантования примет вид

$$S_{qgr} = \int Ldt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} \lambda dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}, \quad t_{pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2}. \quad (6.5)$$

В отличие от классической теории, в которой уравнения движения не зависят от величины действия, для перехода к действию квантовой теории необходимо ввести конкретное значение λ . В квазиклассической теории в решении уравнений гравитации фигурирует параметр $(\gamma_{\min})^{1/2}$ – минимальное значение объемного фактора (3.21). Если принять

$$\lambda = \left(\sqrt{\gamma_{\min}} \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

то действие (6.5) примет вид

$$S_{qgr} = \int Ldt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}. \quad (6.7)$$

В этом случае действие оказывается масштабно инвариантным относительно изменения величины объемного фактора.

Исходя из действия (6.7), проведем каноническое квантование гравитационного поля.

Введем масштабно инвариантные обобщенные зависящие от времени координаты:

$$q^1 = \sqrt{\gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^2 = \ln \sqrt{g_{00} \gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^3 = \Phi, \quad 1 \leq q^1 < \infty, \quad -\infty < q^2, q^3 < \infty; \quad (6.8)$$

их скорости $v^i = \dot{q}^i$ (производные по времени) и сопряженные им импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}: \quad p_1 = A \frac{4v^1}{3q^1}, \quad p_2 = Aq^1 v^3, \quad p_3 = Aq^1 v^2. \quad (6.9)$$

Отсюда найдем скорости как функции координат и импульсов:

$$v^1 = \frac{3q^1 p_1}{4A}, \quad v^2 = \frac{p_3}{Aq^1}, \quad v^3 = \frac{p_2}{Aq^1}. \quad (6.10)$$

Найдем энергию гравитационного поля в лагранжевом формализме

$$E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L = A \left(\frac{2}{3q^1} (v^1)^2 + q^1 v^2 v^3 \right). \quad (6.11)$$

Исключая скорости из этого соотношения с помощью (6.10) найдем гамильтониан гравитационного поля

$$H_{gr} = \frac{1}{A} \left(\frac{3}{8} q^1 (p_1)^2 + \frac{1}{q^1} p_2 p_3 \right). \quad (6.12)$$

Переходя в соответствии с правилами канонического квантования от координат и импульсов к их операторам [22] и заменяя произведение некоммутирующих операторов симметризованным произведением, найдем волновое уравнение гравитационного поля

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H}_{gr} \Psi, \quad \hat{H}_{gr} = \frac{1}{A} \left(\frac{3}{16} \hat{q}^1 (\hat{p}_1)^2 + \frac{3}{16} (\hat{p}_1)^2 \hat{q}^1 + \frac{1}{\hat{q}^1} \hat{p}_2 \hat{p}_3 \right). \\ i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{3\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 q^1 + \frac{16}{3q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Гамильтониан зависит только от одной координаты q^1 , поэтому волновую функцию можно представить в виде суперпозиции произведений волновых собственных функций энергии E и импульсов p_2, p_3 .

$$\Psi(t, q^i) = \int a(E) b(p_2) c(p_3) \exp \frac{i}{\hbar} \left(-Et + p_2 q^2 + p_3 q^3 \right) \varphi_E dE dp_2 dp_3, \quad (6.14)$$

где

$$E \varphi_E = -\frac{6\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{8}{3q^1} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \right) \varphi_E. \quad (6.15)$$

Обозначим штрихом производную по переменной $x = q^1$, тогда уравнение (6.15) примет вид

$$x \varphi_E'' + \varphi_E' - \frac{8}{3x} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \varphi_E + \frac{Et_{pl}}{6\pi\hbar} \varphi_E = 0. \quad (6.16)$$

Это уравнение относится к типу уравнений, разрешимых в функциях Бесселя [23, с. 245]. Если

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{x} w' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{x^2} \right] w = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma - const,$$

то $w = x^\alpha Z_\nu(\beta x^\gamma)$, где $Z_\nu(\beta x^\gamma)$ бесселева функция 1-го, 2-го или 3-го рода. Сравнивая последние два уравнения, найдем

$$\alpha = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \pm \left(\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar} \right)^{1/2}, \quad \nu = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}, \quad \varphi_E = Z_\nu(\beta \sqrt{x}), \quad x = q^1. \quad (6.17)$$

Наличие края в квазиклассической теории означает, что процесс эволюции метрики имеет начало. С точки зрения квантовой теории это следует интерпретировать как равенство нулю волновой функции до начального момента времени. В силу требования однозначности и непрерывности волновой функции во всем пространстве [22] необходимо принять $\varphi_E(q^1) = 0$ при $q^1 \leq 1$.

Решения уравнения (6.16) будут убывать при больших значениях аргумента только в том случае, когда порядок функций Бесселя будет действительным. Это справедливо при условии $p_2 p_3 \geq 0$. Для этого необходимо, чтобы оба импульса p_2 и p_3 имели либо неположительное, либо неотрицательное значение. Кроме того, решения будут действительными при $\beta \geq 0$.

Таким образом, решением уравнения (6.16), удовлетворяющим всем этим условиям, являются при $E \geq 0$ функции

$$\varphi_E(q^1, E) = J_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) N_\nu \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) - N_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) J_\nu \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right), \nu = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}. \quad (6.18)$$

При $E < 0$ невозможно построить решение, которое обращалось бы в ноль при $q^1 = 1$ и одновременно, было бы ограниченным на бесконечности. Поэтому гравитационное поле имеет только непрерывный спектр энергии, спектр дискретных уровней энергии отсутствует.

Используя выражение функций Неймана через функции Бесселя [23]

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \quad (\nu \neq n),$$

запишем $\varphi_E(q^1, E)$ (если ν не есть целое число) следующим образом

$$\varphi_E(q^1, E) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left[J_{-\nu} \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) J_\nu \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) - J_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) J_{-\nu} \left(\sqrt{q^1 \frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} \right) \right], \nu = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}$$

Отсюда следует, что это решение является четной функцией ν и уровни энергии не вырождены.

Общий вид волновой функции очень ранней Вселенной (при наличии в ней только гравитационного поля, то есть до образования и отделения материи) имеет вид (6.14), а $\varphi_E(q^1, E)$ дается соотношениями (6.18). Для определения конкретной волновой функции необходимо задать ее в начальный момент времени $t = 0$. Не имея такой информации, можно продвинуться несколько далее исходя из результатов квазиклассической теории. Согласно (3.7), (3.13) «скорости» связаны между собой соотношениями:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} = \frac{1}{2T\sqrt{\gamma}}, T = const, \frac{dq^2}{dt} = \frac{1}{2T\sqrt{\gamma_{\min}} q^1}. \quad (6.19)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\sigma}{3T\sqrt{\gamma}}, \sigma = const, \frac{dq^3}{dt} = -\frac{2}{3q^1} \frac{dq^1}{dt} + \frac{\sigma}{3q^1 T \sqrt{\gamma_{\min}}}. \quad (6.20)$$

Из (6.19) с учетом (6.9) следует, что при $t = 0$ импульс p_3 имел определенное положительное значение

$$p_3^0 = \frac{\hbar t_{pl}}{32\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} > 0. \quad (6.21)$$

Аналогично из (6.20) с учетом (6.9) и $v^1(0) = 0$ следует

$$p_2^0 = -\frac{\hbar t_{pl}}{24\pi} v^1(0) + \frac{\hbar t_{pl} \sigma}{48\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}}, p_2^0 = \frac{\hbar t_{pl} \sigma}{48\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} > 0. \quad (6.22)$$

Импульс p_2 также имел определенное положительное значение, а произведение значений импульсов удовлетворяет условию $p_2^0 \cdot p_3^0 > 0$. Таким образом, в начальный момент времени волновую функцию можно представить в виде

$$\Psi(0, q^i) = \psi(q^1) \exp i \frac{t_{pl}(2\sigma q^2 + 3q^3)}{96\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}}, \nu^0 = 4 \sqrt{\frac{2p_2^0 p_3^0}{3\hbar^2}} = \frac{t_{pl} \sqrt{\sigma}}{12\pi T \sqrt{\gamma_{\min}}} \ll 1. \quad (6.23)$$

Квадрат функции $\psi(q^1)$ дает плотность вероятности различных значений координаты q^1 при $t = 0$. Функция $\psi^2(q^1)$ должна быть непрерывной, равной нулю при $q^1 = 1$ и экспоненциально убывать на бесконечности. Этим условиям удовлетворяет гамма-распределение плотности вероятности [24] (с двумя параметрами и со сдвигом по координате).

$$\psi^2(q^1) = \frac{(q^1 - 1)^k}{\Gamma(k)\mu^{k+1}} \exp\left[-\frac{(q^1 - 1)}{\mu}\right], \quad k > 0, \quad q^1 \geq 1. \quad (6.24)$$

Положим $k = 1$, чтобы исключить как нефизические случайные распределения с крайними значениями производной 0 и ∞ при $q^1 = 1$. В этом случае среднее значение отклонения q^1 от единицы равно 2μ , а дисперсия распределения равна $2\mu^2$.

Положим, что средняя квадратичная флюктуация значений координат пропорциональна отношению планковского времени к характерному времени квазиклассической теории. В волновую функцию такое отношение входит в виде индекса $\nu = \nu^0$ (6.23) функции Бесселя, поэтому

$$\sqrt{2}\mu = \nu^0, \quad \nu^0 = \frac{t_{pl}\sqrt{\sigma}}{12\pi T\sqrt{\gamma_{\min}}} \ll 1. \quad (6.25)$$

Таким образом, начальная волновая функция (6.23) полностью определена, а вместе с ней в принципе определена и волновая функция очень ранней Вселенной. Действительно, теперь из (6.14), (6.18), (6.23), (6.24), (6.25) следует

$$\frac{\sqrt{2(q^1 - 1)}}{\nu} \exp\left[-\frac{(q^1 - 1)}{\sqrt{2}\nu}\right] = \int_0^\infty a(E)\varphi_E(q^1, E)dE, \quad \nu = \nu^0. \quad (6.26)$$

С физической точки зрения это интегральное уравнение задает разложение $\psi(q^1)$ по собственным функциям оператора Гамильтона. Рассмотрим решение этого уравнения. Умножим обе стороны уравнения на $\varphi_E(q^1, E)$ и проинтегрируем по q^1 от 1 до ∞ .

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{2(q^1 - 1)}}{\nu} \exp\left[-\frac{(q^1 - 1)}{\sqrt{2}\nu}\right] \varphi_E(q^1, E)dq^1 = \int_1^\infty \left(\int_0^\infty a(E')\varphi_{E'}(q^1, E')dE' \right) \varphi_E(q^1, E)dq^1. \quad (6.27)$$

В силу интегральной теоремы Вебера [25, XIV, 14.52, (6)] кратный интеграл в (6.27) после соответствующих пере обозначений может быть представлен в виде

$$\int_1^\infty \left(\int_0^\infty a(E')\varphi_{E'}(q^1, E')dE' \right) \varphi_E(q^1, E)dq^1 = \frac{6\pi\hbar}{t_{pl}} \left[J_\nu^2\left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}}\right) + N_\nu^2\left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}}\right) \right] a(E). \quad (6.28)$$

Из (6.27), (6.28) следует

$$a(E) = \frac{t_{pl}}{6\pi\hbar} \left[J_\nu^2\left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}}\right) + N_\nu^2\left(\sqrt{\frac{2t_{pl}E}{3\pi\hbar}}\right) \right]^{-1} \int_1^\infty \frac{\sqrt{2(q^1 - 1)}}{\nu} \exp\left[-\frac{(q^1 - 1)}{\sqrt{2}\nu}\right] \varphi_E(q^1, E)dq^1. \quad (6.29)$$

Теперь волновая функция очень ранней Вселенной полностью определена

$$\Psi(t, q^i) = \int_0^\infty a(E) \exp i \left[\frac{t_{pl}(2\sigma q^2 + 3q^3)}{96\pi T\sqrt{\gamma_{\min}}} - \frac{Et}{\hbar} \right] \varphi_E(q^1, E)dE, \quad \nu = \nu^0. \quad (6.30)$$

7. Заключение

Отличительной особенностью изложенной теории, во-первых, является то, что пространственно – временное многообразие с краем помимо метрики и связности наделяется всеми свойствами материальной среды. Причем гравитационное поле является основным источником энергии Вселенной. Следствием этого является наблюдаемая высокая степень однородности и изотропии Вселенной. Другая особенность теории состоит в возможности построения многообразий свободных от сингулярностей.

Сингулярным при этом является край многообразия (момент начала эволюции Вселенной или поверхность вблизи гравитационного радиуса), на котором те или иные наблюдаемые инвариантные величины принимают бесконечные значения. Этот факт следует рассматривать как указание на необходимость учета вблизи края квантовых эффектов.

Точности имеющихся астрономических наблюдений пока недостаточно, чтобы на их основании сделать выбор между предсказаниями ОТО и предложенной теории тяготения. Однако тот факт, что за истекшие двадцать лет так и не была установлена физическая природа «темной энергии», «темной материи» и «инфлатонов», а на БАК не обнаружено новых частиц с подходящими свойствами, заставляет усомниться в самом их существовании.

С точки зрения изложенной в статье теории все наблюдаемые эффекты, связываемые с «темной энергией» и «темной материей», являются лишь проявлениями материальной сущности гравитационного поля. С одной стороны в настоящую эпоху второго ускорения гравитационное поле имеет отрицательное давление, то есть ведет себя подобно гипотетической «темной энергии». С другой стороны в галактических масштабах плотность энергии гравитационного поля превышает среднюю плотность энергии материи и приводит к увеличению скорости наблюдаемых гравитационно-связанных объектов подобно «темной материи».

Начальное расширение (инфляция) является имманентным свойством процесса эволюции структуры пространства-времени, связанным с наличием гравитационного поля. В этот период времени давление гравитационного поля само по себе отрицательно и поэтому надобность в наличие, каких либо инфлатонов, отпадает.

Глобальная плотность энергии Вселенной в настоящее время на 94.5% состоит из плотности энергии гравитационного поля и лишь 5.5% это вклад в неё всех известных видов материи. Причем со временем первый будет расти, а второй убывать.

При отсутствии в природе гипотетических форм материи, космология ОТО (модель Фридмана) противоречит результатам экспериментов, в то время как предсказания предложенной теории с ними согласуются.

Установлено, что максимальная глобальная плотность энергии во Вселенной была меньше планковской на 64 порядка и значительно ниже той, которая в настоящее время достигнута на БАК!

Приложение I. Энергия статического изотропного гравитационного поля.

В силу тождества Бианки плотность энергии гравитационного поля $(\varepsilon_{gr})_{\mu}^{\nu}$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\sqrt{-g} (\varepsilon_{gr})_{\mu}^{\nu} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\mu}} (\varepsilon_{gr})^{\lambda\rho} = 0.$$

В случае статического поля сохраняется энергия гравитационного поля [15]

$$E = \int (\varepsilon_{gr})_0^{\nu} \sqrt{-g} dS_{\nu}, \quad (\text{П.1})$$

где в соответствии с (2.3)

$$(\varepsilon_{gr})_0^{\lambda} = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\delta_0^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \right) - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^0} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\eta}} - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} \right]. \quad (\text{П.2})$$

В статическом поле последние два члена в этом соотношении равны нулю и (П.1) с учетом (П.2) принимает вид:

$$E = -\frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \right) dV. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя сюда выражения для компонент метрического тензора из (5.2) получим:

$$E = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{C+G} \frac{d\Phi}{dr} \right) dV = \frac{c^4}{4G} \left[\int_0^{\infty} \sqrt{-g} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{(C+G)} \frac{d\Phi}{dr} \right) dr \right]. \quad (\text{П.4})$$

Учтем теперь, что по определению, а также в силу соотношения (5.13)

$$C(r^*) + G(r^*) = \frac{r^4 (\sqrt{-g})^2}{r^{*4} F(r^*)}, \quad r^2 dr = \frac{V(r^*)}{\sqrt{-g}} r^{*2} dr^*. \quad (\text{П.5})$$

Подставляя эти выражения в (П.4) и переходя к безразмерной координате r^*/α , получим:

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d\Phi}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - \int_{r^*_{\min}}^{\infty} \frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*) \sqrt{-g}} \frac{d\Phi}{dr^*} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} dr^* \right]. \quad (\text{П.6})$$

В силу соотношений (5.7'), (5.10)

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} = \frac{3V}{r^{*2} F}, \quad \Delta = \sqrt{-g}. \quad (\text{П.7})$$

С учетом этих соотношений

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma} (r^*_{\min}) \right]. \quad (\text{П.8})$$

В соотношении фигурируют граничные значения производной функции $F(r^*)$.

Учитывая поведение полей на бесконечности и тот факт, что в силу соотношения (5.12) при $r^* = r^*_{\min}$ $dF/dr^* = 2F/r^*_{\min}$, найдем:

$$-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} = -\frac{r_{gr}}{\alpha} + \frac{2F(r^*_{\min}) r^*_{\min}}{V(r^*_{\min})}. \quad (\text{П.9})$$

Список литературы

1. D. Hilbert. Die Grundlagen der Physik, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Gottingen, Math.-phys. Klasse, 1915, Heft 3, S. 395.
2. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, Т. 1, Наука, Москва (1965).
3. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Наука, Москва (1967).
4. A. G. Riess et al., Astron. J. 116, 1009 (1998).
5. P. Schmidt et al., Astrophys. J. 507, 46 (1998).
6. S. Perlmutter et al., Astrophys. J. 517, 565 (1999).
7. С. Вайнберг, Космология, УРСС Либроком, Москва (2013); S. Weinberg, Cosmology, Oxford, New York (2008).
8. С. Вайнберг, Гравитация и космология, Мир, Москва (1975); S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons Inc., New York (1972).
9. Ю. Л. Кокурин, Квантовая электроника 33, №1 (2003), с. 45-47.
10. L. Smolin, arXiv: hep-th/0904.4841v1 (2009).
11. L. Smolin, arXiv: hep-th/0303.185v2 (2003)
12. Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли, Калибровочные теории в физике элементарных частиц, Мир, Москва (1987). Та-Pei Cheng, Ling-Fong Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Clarendon Press, Oxford (1984).
13. Д. Д. Иваненко, Г. А. Сарданашвили, Гравитация, УРСС, Москва (2004).
14. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика, Наука, Москва (1986).
15. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, Наука, Москва (1973); L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The classical theory of fields, Vol.2, Oxford Pergamon Press (1971).
16. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, ФМЛ, Москва (1961).
17. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, Т. 1-3, Мир, Москва (1977); Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. San Francisco (1973).
18. К. А. Olive et al. (Particle data group), Chinese Physics C38, 090001 (2014).
19. Ch. A. Egan, Ch. H. Lineweaver; arXiv: astro-ph. CO/0909.3983v.1 (2009).
20. D. N. Spergel et al., Astrophys. J. 5 (2007); arXiv: astro-ph/0603449v.2 (2007).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Наука, Москва (1964).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ (1963).
23. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, Наука, Москва (1968). E. Janke, F. Emde, F. Lössch, Tafeln höherer funktionen, Stuttgart (1960).
24. Д. Худсон, Статистика для физиков, Мир, Москва (1970). D. J. Hudson, Statistics, Geneva (1964).
25. Г. Н. Ватсон, Теория Бесселевых функций, ч. 1, ИИЛ, Москва (1949). G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, v. 1 (1945)