Доказательство Гипотезы Биля

Андрея Борисовича Скрыпника

2015 год

Содержание

1 Формулировка Гипотезы Биля

Формулировка: Если

$$A^n + B^m = C^l, \qquad \text{где } A \in \mathbb{N},\ B \in \mathbb{N},\ C \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N},\ n > 2,\ m > 2,\ l > 2, \tag{1}$$

то A, B, C имеют общий делитель.
$\mathbb{N}$ - натуральные числа.

2 Доказательство Гипотезы Биля для варианта чётных A, B, C

Если A, B, C - чётные числа, то их общий простой делитель - 2 и **Гипотеза Биля** для (**2**) верна.

3 Детализация условий

Пусть:

$$y - \text{натуральное нечётное число.} \tag{2}$$

Тогда выражение (1) для остальных вариантов можно представить так:

$$y_1^n + y_2^m = (2^k y_3)^l, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

или

$$y_1^n + (2^k y_2)^m = y_3^l, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

4 Простые доказательства от обратного

4.1 Вариант кратности обоих слагаемых

Пусть:

$$(y_o \geq 3) - \text{простое нечётное число.} \tag{5}$$

Тогда выражения (3) и (4) можно представить в следующем виде:

$$(y_o y_1)^n + (y_o y_2)^m = (2^k y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_3}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{6}$$

или

$$(y_o y_1)^n + (2^k y_o y_2)^m = y_3^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_3}{y_o} \notin \mathbb{N}. \tag{7}$$

Преобразуем выражения (6) и (7):

$$y_o(y_o^{n-1} y_1^n + y_o^{m-1} y_2^m) = (2^k y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_3}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{8}$$

или

$$y_o(y_o^{n-1} y_1^n + y_o^{m-1}(2^k y_2)^m) = y_3^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_3}{y_o} \notin \mathbb{N}. \tag{9}$$

Левая часть выражений (8) и (9) будет кратна y_o, а правая - нет. То есть:

$$(y_o y_1)^n + (y_o y_2)^m \neq (2^k y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_3}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{10}$$

или

$$(y_o y_1)^n + (2^k y_o y_2)^m \neq y_3^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_3}{y_o} \notin \mathbb{N}. \tag{11}$$

Гипотеза Биля для (**4.1**) верна.

4.2 Вариант кратности одного слагаемого и суммы

Выражения (3) и (4) можно представить в следующем виде:

$$y_1^n + (y_o y_2)^m = (2^k y_o y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_1}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{12}$$

или

$$y_1^n + (2^k y_o y_2)^m = (y_o y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_1}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{13}$$

или

$$(y_o y_1)^n + (2^k y_2)^m = (y_o y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_2}{y_o} \notin \mathbb{N}. \tag{14}$$

Преобразуем выражения (12), (13) и (14):

$$y_o(y_o^{l-1}(2^k y_3)^l - y_o^{m-1} y_2^m) = y_1^n, \quad \text{где} \quad \frac{y_1}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{15}$$

или

$$y_o(y_o^{l-1} y_3^l - y_o^{m-1}(2^k y_2)^m) = y_1^n, \quad \text{где} \quad \frac{y_1}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{16}$$

или

$$y_o(y_o^{l-1} y_3^l - y_o^{n-1} y_1^n) = (2^k y_2)^m, \quad \text{где} \quad \frac{y_2}{y_o} \notin \mathbb{N}. \tag{17}$$

Левая часть выражений выражений(15), (16) и (17) будет кратна y_o, а правая - нет. То есть:

$$y_1^n + (y_o y_2)^m \neq (2^k y_o y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_1}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{18}$$

или

$$y_1^n + (2^k y_o y_2)^m \neq (y_o y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_1}{y_o} \notin \mathbb{N}, \tag{19}$$

или

$$(y_o y_1)^n + (2^k y_2)^m \neq (y_o y_3)^l, \quad \text{где} \quad \frac{y_2}{y_o} \notin \mathbb{N}. \tag{20}$$

Гипотеза Биля для (**4**) верна.

5 Доказательство от обратного для варианта без общего делителя

Пусть слагаемые и сумма в выражениях (3) и (4) не имеют общего делителя.

5.1 Особенности сложения и вычитания нечётных чисел

Доказательство для вариантов (3) и для (4) без общего делителя должно учитывать следующее: Пусть $y_{x1} > y_{x2}$. Тогда, если

$$y_{x1} + y_{x2} = 2^z y_{x3}, \quad \text{где} \quad (z \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

то

$$y_{x1} - y_{x2} = 2y_{x4}. \tag{22}$$

И наоборот, если

$$y_{x1} + y_{x2} = 2y_{x3}, \tag{23}$$

то

$$y_{x1} - y_{x2} = 2^z y_{x4}, \quad \text{где} \quad (z \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

5.2 Вариант выражения (3) без общего делителя, когда $(2^k y_3) < y_2 < y_1$

Рассмотрим (3). Пусть:

$$y_1 + y_2 = 2^d y_4, \quad \text{где} \quad d \in \mathbb{N} \tag{25}$$

Пусть в (3) $(2^k y_3) < y_2 < y_1$. Тогда:

$$(2^k y_3 + y_5)^n + (2^k y_3 + y_6)^m = (2^k y_3)^l, \tag{26}$$

где

$$y_5 \text{ и } y_6 \text{ соответствуют условию (2).} \tag{27}$$

Подставим слагаемые в скобках в выражении (26) вместо y_1 и y_2 в (25):

$$2^k y_3 + y_5 + 2^k y_3 + y_6 = 2^d y_4. \tag{28}$$

Выразим из (28) $(2^k y_3)$:

$$2^k y_3 = \frac{2^d y_4 - y_5 - y_6}{2}. \tag{29}$$

Подставим (29) в (26):

$$\left(\frac{2^d y_4 + (y_5 - y_6)}{2}\right)^n + \left(\frac{2^d y_4 - (y_5 - y_6)}{2}\right)^m = \left(\frac{2^d y_4 - (y_5 + y_6)}{2}\right)^l. \tag{30}$$

5.2.1 Вариант, когда в выражении (30) $d = 1$, и Метод сложения

Пусть в (30) $d = 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_5 + y_6 = 2y_7, \tag{31}$$

и

$$y_5 - y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Подставив (31) и (32) в (30) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_4 + 2^{e-1} y_8)^n + (y_4 - 2^{e-1} y_8)^m = (y_4 - y_7)^l, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} 2^{e-1} y_8 &= \frac{y_5 - y_6}{2}, \\ y_7 &= \frac{y_5 + y_6}{2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Решение задачи отныне будет выполняться при помощи **Метода сложения**.

Метод сложения (на примере (**5.2.1**))

Рассмотрим выражение (33). *Тогда:*
$(y_4 + 2^{e-1}y_8)^n$ *- то же самое, что и выражение* $(y_4 + 2^{e-1}y_8)$, *сложенное* $(y_4 + 2^{e-1}y_8)^{n-1}$ *раз;*
$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^m$ *- то же самое, что и выражение* $(y_4 - 2^{e-1}y_8)$, *сложенное* $(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-1}$ *раз;*
$(y_4 - y_7)^l$ *- то же самое, что и выражение* $(y_4 - y_7)$, *сложенное* $(y_4 - y_7)^{l-1}$ *раз.*

5.2.1.1

Пусть в (33)*:*

$$(y_4 + 2^{e-1}y_8)^{n-1} > (y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-1}. \tag{35}$$

Тогда можно

$$\text{все } (y_4 - 2^{e-1}y_8) \text{ в } (33) \text{ сложить попарно с таким же количеством } (y_4 + 2^{e-1}y_8). \tag{36}$$

Изменим слагаемые (36) *так, чтобы появилось слагаемое, равное выражению в скобках в правой стороне* (33).
Для этого разложим все слагаемые на части и, используя выражения из (34), *выделим нужное нам слагаемое:*

$$\begin{aligned} &(y_4 + 2^{e-1}y_8) + (y_4 - 2^{e-1}y_8) = y_4 + \frac{y_5}{2} - \frac{y_6}{2} + y_4 + \frac{y_5}{2} + \frac{y_6}{2} = \\ &= \left(y_4 - \frac{y_5}{2} - \frac{y_6}{2}\right) + \left(y_4 + \frac{y_5}{2} + \frac{y_6}{2}\right) = (y_4 - y_7) + (y_4 + y_7). \end{aligned} \tag{37}$$

Подставим (37) *в левую часть выражения* (33) *с учётом* (36)*:*

$$\begin{aligned} &(y_4 - y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-1} + (y_4 + y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-1} + \\ &+ (y_4 + 2^{e-1}y_8)\Big((y_4 + 2^{e-1}y_8)^{n-1} - (y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-1}\Big). \end{aligned} \tag{38}$$

Попробуем из последних двух слагаемых (38) *выделить* $(y_4 - y_7)$, *чтобы добиться в результате лишь выражение* $(y_4 - y_7)$, *сложенное* $(y_4 - y_7)^{l-1}$ *раз.*
Для этого третье слагаемое (38) *представим как выражение* $(y_4 + 2^{e-1}y_8)$, *сложенное* $((y_4 + 2^{e-1}y_8)^{n-1} - (y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-1})$ *раз, второе слагаемое – как выражение* $(y_4 - 2^{e-1}y_8)$, *сложенное* $(y_4 + y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-2}$ *раз.*
Сложим каждое $(y_4 - 2^{e-1}y_8)$ *попарно с таким же количеством* $(y_4 + 2^{e-1}y_8)$.
Далее, согласно (37), *разделим сумму на два слагаемых и сложим выражение* $(y_4 - y_7)(y_4 + y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-2}$ *с первым слагаемым* (38).
Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(y_4 - y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-2}(2y_4 + y_7 - 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-2} + \\ &+ (y_4 + 2^{e-1}y_8)\Big((y_4 + 2^{e-1}y_8)^{n-1} - (y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-2}(2y_4 + y_7 - 2^{e-1}y_8)\Big). \end{aligned} \tag{39}$$

Таким же образом попробуем из последних двух слагаемых (39) *выделить* $(y_4 - y_7)$, *чтобы добиться в результате лишь выражение* $(y_4 - y_7)$, *сложенное* $(y_4 - y_7)^{l-1}$ *раз.*
Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(y_4 - y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-3}\Big((y_4 - 2^{e-1}y_8)(2y_4 + y_7 - 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big) + \\ &+ (y_4 + y_7)^3(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-3} + (y_4 + 2^{e-1}y_8)\Bigg((y_4 + 2^{e-1}y_8)^{n-1} - \\ &- (y_4 - 2^{e-1}y_8)^{m-3}\Big((y_4 - 2^{e-1}y_8)(2y_4 + y_7 - 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big)\Bigg). \end{aligned} \tag{40}$$

Выражение (40) лишь усложнилось.
Можно и далее извлекать выражение $(y_4 - y_7)$ из суммы второго и третьего слагаемых, пока в показателе степени $m - x$ станет $x > m$ и все слагаемые покинут множество натуральных чисел.
Таким образом, кроме слагаемого, кратного $(y_4 - y_7)$, всегда будут присутствовать два других слагаемых, не кратных $(y_4 - y_7)$.
То есть, недостижима ситуация, когда (40) будет равно лишь $(y_4 - y_7)^l$.

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $(2^k y_3) < y_2 < y_1$, в (30) $d = 1$ и в (33) $(y_4 + 2^{e-1} y_8)^{n-1} > (y_4 - 2^{e-1} y_8)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.2.1.1**) верна.

5.2.1.2

Пусть в (33):

$$(y_4 + 2^{e-1} y_8)^{n-1} < (y_4 - 2^{e-1} y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&(y_4 - y_7)(y_4 + 2^{e-1} y_8)^{n-3}\Big((y_4 + 2^{e-1} y_8)(2y_4 + y_7 + 2^{e-1} y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big) + \\
&+ (y_4 + y_7)^3 (y_4 + 2^{e-1} y_8)^{n-3} + (y_4 - 2^{e-1} y_8)\Bigg((y_4 - 2^{e-1} y_8)^{m-1} - \\
&- (y_4 + 2^{e-1} y_8)^{n-3}\Big((y_4 + 2^{e-1} y_8)(2 * y_4 + y_7 + 2^{e-1} y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big)\Bigg) \neq (y_4 - y_7)^l.
\end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $(2^k y_3) < y_2 < y_1$ и в (30) $d = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.2.1.2**) верна.

5.2.1.3

Пусть в (33):

$$(y_4 + 2^{e-1} y_8)^{n-1} = (y_4 - 2^{e-1} y_8)^{m-1}.$$

Тогда выражение (33) становится частным случаем варианта кратности обоих слагаемых, для которого **Гипотеза Биля** была доказана в (**4.1**).
Поэтому в дальнейшем выражения, где $A^{n-1} = B^{m-1}$, рассматриваться не будут.

5.2.2 Вариант, когда в выражении (30) $d > 1$

Пусть в (30) $d > 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_5 - y_6 = 2y_8, \tag{42}$$

и

$$y_5 + y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Подставив (42) и (43) в (30) и, разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{d-1}y_4+y_8)^n+(2^{d-1}y_4-y_8)^m=(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)^l, \tag{44}$$

где

$$y_8=\frac{y_5-y_6}{2},$$
$$2^{e-1}y_7=\frac{y_5+y_6}{2}.$$

5.2.2.1

Пусть в (44):

$$(2^{d-1}y_4+y_8)^{n-1}>(2^{d-1}y_4-y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{gathered}(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)(2^{d-1}y_4-y_8)^{m-3}\Big((2^{d-1}y_4-y_8)(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7-y_8)+\\+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^2\Big)+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^3(2^{d-1}y_4-y_8)^{m-3}+(2^{d-1}y_4+y_8)\cdot\\\cdot\Bigg((2^{d-1}y_4+y_8)^{n-1}-(2^{d-1}y_4-y_8)^{m-3}\Big((2^{d-1}y_4-y_8)(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7-y_8)+\\+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^2\Big)\Bigg)\neq(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)^l.\end{gathered} \tag{45}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n+y_2^m\neq(2^ky_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $(2^ky_3)<y_2<y_1$, в (30) $d>1$ и в выражении (44) $(2^{d-1}y_4+y_8)^{n-1}>(2^{d-1}y_4-y_8)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.2.2.1**) верна.

5.2.2.2

Пусть в (44):

$$(2^{d-1}y_4+y_8)^{n-1}<(2^{d-1}y_4-y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{gathered}(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)(2^{d-1}y_4+y_8)^{n-3}\Big((2^{d-1}y_4+y_8)(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7+y_8)+\\+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^2\Big)+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^3(2^{d-1}y_4+y_8)^{n-3}+(2^{d-1}y_4-y_8)\cdot\\\cdot\Bigg((2^{d-1}y_4-y_8)^{m-1}-(2^{d-1}y_4+y_8)^{n-3}\Big((2^{d-1}y_4+y_8)(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7+y_8)+\\+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^2\Big)\Bigg)\neq(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)^l.\end{gathered} \tag{46}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n+y_2^m\neq(2^ky_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $(2^ky_3)<y_2<y_1$.
Гипотеза Биля для (**5.2**) верна.

5.3 Вариант выражения (3) без общего делителя, когда $(2^k y_3) < y_1 < y_2$

Пусть в (3) $(2^k y_3) < y_1 < y_2$. Тогда:

$$(2^k y_3 + y_5)^n + (2^k y_3 + y_6)^m = (2^k y_3)^l, \quad \text{где верно (27)} \tag{47}$$

Выражение (47) совпадает с выражением (26).
Подставив слагаемые в скобках в (47) вместо y_1 и y_2 в (25), выразив из полученного выражения $(2^k y_3)$ и подставив его в (47), получим следующее выражение:

$$\left(\frac{2^d y_4 - (y_5 - y_6)}{2}\right)^n + \left(\frac{2^d y_4 + (y_5 - y_6)}{2}\right)^m = \left(\frac{2^d y_4 - (y_5 + y_6)}{2}\right)^l \tag{48}$$

Решается (**5.3**) точно так, как и (**5.2**), только меняются местами n и m, y_5 и y_6.
Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $(2^k y_3) < y_1 < y_2$.
Гипотеза Биля для (**5.3**) верна.

5.4 Вариант выражения (3) без общего делителя, когда $y_1 < y_2 < (2^k y_3)$

Пусть в (3) $y_1 < y_2 < (2^k y_3)$. Тогда:

$$(2^k y_3 - y_5)^n + (2^k y_3 - y_6)^m = (2^k y_3)^l, \quad \text{где верно (27)} \tag{49}$$

Подставив слагаемые в скобках в (49) вместо y_1 и y_2 в (25), выразив из полученного выражения $(2^k y_3)$ и подставив его в (49), получим следующее выражение:

$$\left(\frac{2^d y_4 + (y_6 - y_5)}{2}\right)^n + \left(\frac{2^d y_4 - (y_6 - y_5)}{2}\right)^m = \left(\frac{2^d y_4 - (y_6 + y_5)}{2}\right)^l \tag{50}$$

5.4.1 Вариант, когда в выражении (50) $d = 1$

Пусть в (50) $d = 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_5 - y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{51}$$

и

$$y_5 + y_6 = 2y_7. \tag{52}$$

Подставив (51) и (52) в (50) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_4 - 2^{e-1} y_8)^n + (y_4 + 2^{e-1} y_8)^m = (y_4 + y_7)^l, \tag{53}$$

где

$$2^{e-1} y_8 = \frac{y_5 - y_6}{2},$$
$$y_7 = \frac{y_5 + y_6}{2}.$$

5.4.1.1

Пусть в (53):

$$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} < (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(y_4+y_7)(y_4-2^{e-1}y_8)^{n-3}\Big((y_4-2^{e-1}y_8)(2*y_4-y_7-2^{e-1}y_8)+(y_4-y_7)^2\Big)+\\&+(y_4-y_7)^3(y_4-2^{e-1}*y_8)^{n-3}+(y_4+2^{e-1}y_8)\Bigg((y_4+2^{e-1}y_8)^{m-1}-\\&-(y_4-2^{e-1}y_8)^{n-3}\Big((y_4-2^{e-1}y_8)(2y_4-y_7-2^{e-1}y_8)+(y_4-y_7)^2\Big)\Bigg)\neq(y_4+y_7)^l.\end{aligned} \tag{54}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < y_2 < (2^k y_3)$, в (50) $d = 1$ и в выражении (53) $(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} < (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.4.1.1**) верна.

5.4.1.2

Пусть в (53):

$$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} > (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(y_4+y_7)(y_4+2^{e-1}y_8)^{m-3}\Big((y_4+2^{e-1}y_8)(2y_4-y_7+2^{e-1}y_8)+(y_4-y_7)^2\Big)+\\&+(y_4-y_7)^3(y_4+2^{e-1}y_8)^{m-3}+(y_4+2^{e-1}y_8)\Bigg((y_4-2^{e-1}y_8)^{n-1}-\\&-(y_4+2^{e-1}y_8)^{m-3}\Big((y_4+2^{e-1}y_8)(2y_4-y_7+2^{e-1}y_8)+(y_4-y_7)^2\Big)\Bigg)\neq(y_4+y_7)^l.\end{aligned} \tag{55}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < y_2 < (2^k y_3)$ и в (50) $d = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.4.1**) верна.

5.4.2 Вариант, когда в выражении (50) $d > 1$

Пусть в (50) $d > 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_5 - y_6 = 2y_8, \tag{56}$$

и

$$y_5 + y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

Подставив (56) и (57) в (50) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{d-1}y_4 - y_8)^n + ((2^{d-1}y_4 + y_8)^m = (2^{d-1}y_4 + (2^{e-1}y_7))^l, \tag{58}$$

где

$$y_8 = \frac{y_5 - y_6}{2},$$
$$2^{e-1}y_7 = \frac{y_5 + y_6}{2}.$$

5.4.2.1

Пусть в (58):

$$(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} < (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-3}\Big((2^{d-1}y_4 - y_8)(2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7 - y_8) + \\ &+ (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^2\Big) + (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^3(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-3} + (2^{d-1}y_4 + y_8)\cdot \\ &\cdot\Bigg((2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1} - (2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-3}\Big((2^{d-1}y_4 - y_8)(2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7 - y_8) + \\ &+ (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)^l.\end{aligned} \tag{59}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < y_2 < (2^k y_3)$, в (50) $d > 1$ и в выражении (58) $(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} < (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.4.2.1**) верна.

5.4.2.2

Пусть в (58):

$$(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} > (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)(2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-3}\Big((2^{d-1}y_4 + y_8)(2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7 + y_8) + \\ &+ (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^2\Big) + (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^3(2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-3} + (2^{d-1}y_4 - y_8)\cdot \\ &\cdot\Bigg((2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} - (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-3}\Big((2^{d-1}y_4 + y_8)(2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7 + y_8) + \\ &+ (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)^l.\end{aligned} \tag{60}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < y_2 < (2^k y_3)$.
Гипотеза Биля для (**5.4**) верна.

5.5 Вариант выражения (3) без общего делителя, когда $y_2 < y_1 < (2^k y_3)$

Пусть в (3) $y_2 < y_1 < (2^k y_3)$. Тогда:

$$(2^k y_3 - y_5)^n + (2^k y_3 - y_6)^m = (2^k y_3)^l, \quad \text{где верно (27)} \tag{61}$$

Выражение (61) совпадает с выражением (49).
Подставив слагаемые в скобках в (61) вместо y_1 и y_2 в (25), выразив из полученного выражения $(2^k y_3)$ и подставив его в (61), получим следующее выражение:

$$\left(\frac{2^d * y_4 - (y_5 - y_6)}{2}\right)^n + \left(\frac{2^d * y_4 + (y_5 - y_6)}{2}\right)^m = \left(\frac{2^d * y_4 + (y_5 + y_6)}{2}\right)^l \tag{62}$$

Решается (**5.5**) точно так, как и (**5.4**), только меняются местами n и m, y_5 и y_6.
Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда $y_2 < y_1 < (2^k y_3)$.
Гипотеза Биля для (**5.5**) верна.

5.6 Вариант выражения (3) без общего делителя, когда $y_1 < (2^k y_3) < y_2$

Пусть в (3) $y_1 < (2^k y_3) < y_2$. Тогда:

$$(2^k y_3 - y_5)^n + (2^k y_3 + y_6)^m = (2^k y_3)^l, \quad \text{где верно (27)} \tag{63}$$

Подставив слагаемые в скобках в (63) вместо y_1 и y_2 в (25), выразив из полученного выражения $(2^k y_3)$ и подставив его в (63), получим следующее выражение:

$$\left(\frac{2^d y_4 - (y_5 + y_6)}{2}\right)^n + \left(\frac{2^d y_4 + (y_5 + y_6)}{2}\right)^m = \left(\frac{2^d y_4 + (y_5 - y_6)}{2}\right)^l. \tag{64}$$

5.6.1 Вариант, когда в выражении (63) $y_5 > y_6$

Пусть в (63) $y_5 > y_6$.

5.6.1.1 Вариант, когда в выражении (64) $d = 1$

Пусть в (64) $d = 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_5 + y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{65}$$

и

$$y_5 - y_6 = 2y_7. \tag{66}$$

Подставив (65) и (66) в (64) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_4 - 2^{e-1} y_8)^n + (y_4 + 2^{e-1} y_8)^m = (y_4 + y_7)^l, \tag{67}$$

где

$$2^{e-1} y_8 = \frac{y_5 + y_6}{2},$$
$$y_7 = \frac{y_5 - y_6}{2}.$$

Выражение (67) совпадает с выражением (53), поэтому решение (**5.6.1.1**) такое же, как и в (**5.4.1**). Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < (2^k y_3) < y_2$, в (63) $y_5 > y_6$ и в (64) $d = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.6.1.1**) верна.

5.6.1.2 Вариант, когда в выражении (64) $d > 1$

Пусть в (64) $d > 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_5 + y_6 = 2y_8, \tag{68}$$

и

$$y_5 - y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Подставив (68) и (69) в (64) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{d-1}y_4 - y_8)^n + (2^{d-1}y_4 + y_8)^m = (2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)^l, \tag{70}$$

где

$$y_8 = \frac{y_5 + y_6}{2},$$
$$2^{e-1}y_7 = \frac{y_5 - y_6}{2}.$$

Выражение (70) совпадает с выражением (58), поэтому решение (**5.6.1.2**) такое же, как и в (**5.4.2**). Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < (2^k y_3) < y_2$ и в (63) $y_5 > y_6$.
Гипотеза Биля для (**5.6.1**) верна.

5.6.2 Вариант, когда в выражении (63) $y_5 < y_6$

Пусть в (63) $y_5 < y_6$.
Тогда (64) можно представить так:

$$\left(\frac{2^d y_4 - (y_6 + y_5)}{2}\right)^n + \left(\frac{2^d y_4 + (y_6 + y_5)}{2}\right)^m = \left(\frac{2^d y_4 - (y_6 - y_5)}{2}\right)^l. \tag{71}$$

5.6.2.1 Вариант, когда в выражении (71) $d = 1$

Пусть в (71) $d = 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_6 + y_5 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{72}$$

и

$$y_6 - y_5 = 2y_7. \tag{73}$$

Подставив (72) и (73) в (71) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^n + (y_4 + 2^{e-1}y_8)^m = (y_4 - y_7)^l, \tag{74}$$

где

$$2^{e-1}y_8 = \frac{y_6 + y_5}{2},$$
$$y_7 = \frac{y_6 - y_5}{2}.$$

5.6.2.1.1

Пусть в (74):

$$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} < (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(y_4 - y_7)(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-3}\Big((y_4 - 2^{e-1}y_8)(2y_4 + y_7 - 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big) + \\ &+ (y_4 + y_7)^3(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-3} + (y_4 + 2^{e-1}y_8)\Bigg((y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1} - \\ &- (y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-3}\Big((y_4 - 2^{e-1}y_8)(2y_4 + y_7 - 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big)\Bigg) \neq (y_4 - y_7)^l.\end{aligned} \tag{75}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < (2^k y_3) < y_2$, в (63) $y_5 < y_6$, в (71) $d = 1$ и в выражении (74) $(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} < (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.6.2.1.1**) верна.

5.6.2.1.2

Пусть в (74):

$$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} > (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(y_4 - y_7)(y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-3}\Big((y_4 + 2^{e-1}y_8)(2y_4 + y_7 + 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big) + \\ &+ (y_4 + y_7)^3(y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-3} + (y_4 - 2^{e-1}y_8)\Bigg((y_4 - 2^{e-1}y_8)^{n-1} - \\ &- (y_4 + 2^{e-1}y_8)^{m-3}\Big((y_4 + 2^{e-1}y_8)(2y_4 + y_7 + 2^{e-1}y_8) + (y_4 + y_7)^2\Big)\Bigg) \neq (y_4 - y_7)^l.\end{aligned} \tag{76}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < (2^k y_3) < y_2$, в (63) $y_5 < y_6$ и в (71) $d = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.6.2.1**) верна.

5.6.2.2 Вариант, когда в выражении (71) $d > 1$

Пусть в (71) $d > 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_6 + y_5 = 2y_8, \tag{77}$$

и

$$y_6 - y_5 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{78}$$

Подставив (77) и (78) в (71) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_4 - 2^{e-1}y_8)^n + (y_4 + 2^{e-1}y_8)^m = (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^l, \tag{79}$$

где

$$\begin{aligned} y_8 &= \frac{y_6 + y_5}{2}, \\ 2^{e-1}y_7 &= \frac{y_6 - y_5}{2}. \end{aligned}$$

5.6.2.2.1

Пусть в (79):

$$(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} < (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-3}\Big((2^{d-1}y_4 - y_8)(2^d y_4 + 2^{e-1}y_7 - y_8) + \\ &+ (2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)^2\Big) + (2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)^3(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-3} + (2^{d-1}y_4 + y_8) \cdot \\ &\cdot \Bigg((2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1} - (2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-3}\Big((2^{d-1}y_4 - y_8)(2^d y_4 + 2^{e-1}y_7 - y_8) + \\ &+ (2^{d-1}y_4 + 2^{e-1}y_7)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{d-1}y_4 - 2^{e-1}y_7)^l. \end{aligned} \tag{80}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n + y_2^m \neq (2^k y_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1 < (2^k y_3) < y_2$, в (63) $y_5 < y_6$, в (71) $d > 1$ и в выражении (79) $(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} < (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.6.2.2.1**) верна.

5.6.2.2.2

Пусть в (79):

$$(2^{d-1}y_4 - y_8)^{n-1} > (2^{d-1}y_4 + y_8)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{gathered}(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)(2^{d-1}y_4+y_8)^{m-3}\Big((2^{d-1}y_4+y_8)(2^dy_4+2^{e-1}y_7+y_8)+\\+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^2\Big)+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^3(2^{d-1}y_4+y_8)^{m-3}+(2^{d-1}y_4-y_8)\cdot\\\cdot\Bigg((2^{d-1}y_4-y_8)^{n-1}-(2^{d-1}y_4+y_8)^{m-3}\Big((2^{d-1}y_4+y_8)(2^dy_4+2^{e-1}y_7+y_8)+\\+(2^{d-1}y_4+2^{e-1}y_7)^2\Big)\Bigg)\neq(2^{d-1}y_4-2^{e-1}y_7)^l.\end{gathered}\tag{81}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n+y_2^m\neq(2^ky_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_1<(2^ky_3)<y_2$.
Гипотеза Биля для (**5.6**) верна.

5.7 Вариант выражения (3) без общего делителя, когда $y_2<(2^ky_3)<y_1$

Пусть в (3) $y_2<(2^ky_3)<y_1$. Тогда:

$$(2^ky_3+y_5)^n+(2^ky_3-y_6)^m=(2^ky_3)^l,\quad\text{где верно (27)}\tag{82}$$

Решается (**5.7**) точно так, как и (**5.6**), только меняются местами n и m, y_5 и y_6.
Таким образом, возвращаясь к выражению (3):

$$y_1^n+y_2^m\neq(2^ky_3)^l,$$

без общего делителя, когда в (3) $y_2<(2^ky_3)<y_1$.
Гипотеза Биля для (**5.7**) верна.

5.8 Вариант выражения (4) без общего делителя, когда $y_1<(2^ky_2)<y_3$

Рассмотрим (4) Пусть:

$$y_1+(2^ky_2)=y_4.\tag{83}$$

Пусть в (4) $y_1<(2^ky_2)<y_3$. Тогда:

$$(y_3-2^fy_5)^n+(y_3-y_6)^m=y_3^l,\quad\text{где верно (27) и } f\in\mathbb{N}.\tag{84}$$

Подставим слагаемые в скобках в (84) вместо y_1 и (2^ky_2) в (83):

$$y_3-2^fy_5+y_3-y_6=y_4.\tag{85}$$

Выразим из (85) y_3:

$$y_3=\frac{y_4+2^fy_5+y_6}{2}.\tag{86}$$

Подставим (86) в (84):

$$\left(\frac{(y_4+y_6)-2^fy_5}{2}\right)^n+\left(\frac{(y_4-y_6)+2^fy_5}{2}\right)^m=\left(\frac{(y_4+y_6)+2^fy_5}{2}\right)^l.\tag{87}$$

5.8.1 Вариант, когда в выражении (87) $f = 1$

Пусть в (87) $f = 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_4 - y_6 = 2y_8, \tag{88}$$

и

$$y_4 + y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{89}$$

Подставив (88) и (89) в (87) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{e-1}y_7 - y_5)^n + (y_8 + y_5)^m = (2^{e-1}y_7 + y_5)^l, \tag{90}$$

где

$$\begin{aligned} y_8 &= \frac{y_4 - y_6}{2}, \\ 2^{e-1}y_7 &= \frac{y_4 + y_6}{2}. \end{aligned}$$

5.8.1.1

Пусть в (90):

$$(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} < (y_8 + y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(2^{e-1}y_7 + y_5)(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3}\Big((2^{e-1}y_7 - y_5)(2^{e-1}y_7 - 2y_5 + y_8) + (y_8 + y_5)^2\Big) + \\ &+ (y_8 + y_5)^3(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3} + (y_8 + y_5)\Bigg((y_8 + y_5)^{m-1} - (2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3} \cdot \\ &\cdot \Big((2^{e-1}y_7 - y_5)(2^{e-1}y_7 - 2y_5 + y_8) + (y_8 + y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{e-1}y_7 + y_5)^l. \end{aligned} \tag{91}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < (2^k y_2) < y_3$, в (87) $f = 1$ и в выражении (90) $(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} < (y_8 + y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.8.1.1**) верна.

5.8.1.2

Пусть в (90):

$$(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} > (y_8 + y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(2^{e-1}y_7 + y_5)(y_8 + y_5)^{m-3}\Big((y_8 + y_5)2y_8 + (y_8 - y_5)^2\Big) + \\ &+ (y_8 - y_5)^3(y_8 + y_5)^{m-3} + (2^{e-1}y_7 - y_5)\Bigg((2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} - \\ &- (y_8 + y_5)^{m-3}\Big((y_8 + y_5)2y_8 + (y_8 - y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{e-1}y_7 + y_5)^l. \end{aligned} \tag{92}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < (2^k y_2) < y_3$ и в (87) $f = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.8.1**) верна.

5.8.2 Вариант, когда в выражении (87) $f > 1$

Пусть в (87) $f > 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_4 - y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{93}$$

и

$$y_4 + y_6 = 2y_7. \tag{94}$$

Подставив (93) и (94) в (87) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_7 - 2^{f-1}y_5)^n + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^m = (y_7 + 2^{f-1}y_5)^l, \tag{95}$$

где

$$\begin{aligned} 2^{e-1}y_8 &= \frac{y_4 + y_6}{2}, \\ y_7 &= \frac{y_4 - y_6}{2}. \end{aligned}$$

5.8.2.1

Пусть в (95):

$$(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(y_7 + 2^{f-1}y_5)(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 - 2^{f-1}y_5)(y_7 - 2^f y_5 + 2^{e-1}y_8) + \\ &+ (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^3(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-3} + (2^{e-1}y_7 + 2^{f-1}y_5) \cdot \\ &\cdot \Bigg((2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1} - (y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 - 2^{f-1}y_5)(y_7 - 2^f y_5 + 2^{e-1}y_8) + \\ &+ (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 + 2^{f-1}y_5)^l. \end{aligned} \tag{96}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < (2^k y_2) < y_3$, в (87) $f > 1$ и в выражении (95) $(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.8.2.1**) верна.

5.8.2.2

Пусть в (95):
$$(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} > (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$
Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:
$$\begin{aligned}&(y_7 + 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-3}\Big((2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)2^e y_8 +\\&+ (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^3(2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-3} +\\&+ (y_7 - 2^{f-1}y_5)\Bigg((y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} - (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-3}\cdot\\&\cdot\Big((2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)2^e y_8 + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 + 2^{f-1}y_5)^l.\end{aligned} \tag{97}$$
Таким образом, возвращаясь к выражению (4):
$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$
без общего делителя, когда в (4) $y_1 < (2^k y_2) < y_3$.
Гипотеза Биля для (**5.8**) верна.

5.9 Вариант выражения (4) без общего делителя, когда $(2^k y_2) < y_1 < y_3$

Пусть в (4) $(2^k y_2) < y_1 < y_3$. Тогда:
$$(y_3 - 2^f y_5)^n + (y_3 - y_6)^m = y_3^l, \quad \text{где верно (27) и } f \in \mathbb{N}. \tag{98}$$
Так как выражение (98) совпадает с выражением (84), решение (**5.9**) будет таким же, как и в (**5.8**). Таким образом, возвращаясь к выражению (4):
$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$
без общего делителя, когда в (4) $(2^k y_2) < y_1 < y_3$.
Гипотеза Биля для (**5.9**) верна.

5.10 Вариант выражения (4) без общего делителя, когда $y_3 < y_1 < (2^k y_2)$

Пусть в (4) $y_3 < y_1 < (2^k y_2)$ Тогда:
$$(y_3 + 2^f y_5)^n + (y_3 + y_6)^m = y_3^l, \quad \text{где верно (27) и } f \in \mathbb{N}. \tag{99}$$
Подставим слагаемые в скобках в (99) вместо y_1 и $(2^k y_2)$ в (83):
$$y_3 + 2^f y_5 + y_3 + y_6 = y_4. \tag{100}$$
Выразим из (100) y_3:
$$y_3 = \frac{y_4 - 2^f y_5 - y_6}{2}. \tag{101}$$
Подставим (101) в (99):
$$\left(\frac{(y_4 - y_6) + 2^f y_5}{2}\right)^n + \left(\frac{(y_4 + y_6) - 2^f y_5}{2}\right)^m = \left(\frac{(y_4 - y_6) - 2^f y_5}{2}\right)^l. \tag{102}$$

5.10.1 Вариант, когда в выражении (102) $f = 1$

Пусть в (102) $f = 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_5 + y_6 = 2y_8, \tag{103}$$

и

$$y_5 - y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{104}$$

Подставив (103) и (104) в (102) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{e-1}y_7 + y_5)^n + (y_8 - y_5)^m = (2^{e-1}y_7 - y_5)^l, \tag{105}$$

где

$$y_8 = \frac{y_4 + y_6}{2},$$
$$2^{e-1}y_7 = \frac{y_4 - y_6}{2}.$$

5.10.1.1

Пусть в (105):

$$(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} > (y_8 - y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}(2^{e-1}y_7 - y_5)(y_8 - y_5)^{m-3}\Big((y_8 - y_5)(2^{e-1}y_7 + y_8) + (2^{e-1}y_7 + y_5)^2\Big)+\\ + (2^{e-1}y_7 + y_5)^3(y_8 - y_5)^{m-3} + (2^{e-1}y_7 + y_5)\bigg((2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} - (y_8 - y_5)^{m-3}\cdot\\ \cdot\Big((y_8 - y_5)(2^{e-1}y_7 + y_8) + (2^{e-1}y_7 + y_5)^2\Big)\bigg) \neq (2^{e-1}y_7 - y_5)^l.\end{aligned} \tag{106}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_3 < y_1 < (2^k y_2)$, в (102) $f = 1$ и в выражении (105) $(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} > (y_8 - y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.10.1.1**) верна.

5.10.1.2

Пусть в (105):

$$(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} < (y_8 - y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}(2^{e-1}y_7 - y_5)(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-3}\Big((2^{e-1}y_7 + y_5)(2^{e-1}y_7 + 2y_5 + y_8) +\\ + (y_8 + y_5)^2\Big) + (y_8 + y_5)^3(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-3} + (y_8 - y_5)\bigg((y_8 - y_5)^{m-1} -\\ - (2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-3}\Big((2^{e-1}y_7 + y_5)(2^{e-1}y_7 + 2y_5 + y_8) + (y_8 + y_5)^2\Big)\bigg) \neq (2^{e-1}y_7 - y_5)^l.\end{aligned} \tag{107}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_3 < y_1 < (2^k y_2)$ и в (102) $f = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.10.1**) верна.

5.10.2 Вариант, когда в выражении (102) $f > 1$

Пусть в (102) $f > 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_4 + y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{108}$$

и

$$y_4 - y_6 = 2y_7. \tag{109}$$

Подставив (108) и (109) в (102) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^n + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^m = (y_7 - 2^{f-1}y_5)^l, \tag{110}$$

где

$$\begin{aligned} &2^{e-1}y_8 = \frac{y_4 + y_6}{2}, \\ &y_7 = \frac{y_4 - y_6}{2}. \end{aligned}$$

5.10.2.1

Пусть в (110):

$$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} > (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(y_7 - 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-3}\Big((2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)2^e y_8 + \\ &+ (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^3(2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-3} + \\ &+ (y_7 + 2^{f-1}y_5)\Bigg((y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} - (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-3}\Big((2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)\cdot \\ &\cdot 2^e y_8 + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 - 2^{f-1}y_5)^l. \end{aligned} \tag{111}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_3 < y_1 < (2^k y_2)$, в (102) $f > 1$ и в выражении (110)
$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} > (2^{e-1} * y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.10.2.1**) верна.

5.10.2.2

Пусть в (110):
$$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$
Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:
$$\begin{gathered}(y_7 - 2^{f-1}y_5)(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 + 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 + 2^f y_5 + y_7) + \\ + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^3(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-3} + \\ + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)\Bigg((2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1} - (y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 + 2^{f-1}y_5)\cdot \\ \cdot(2^{e-1}y_8 + 2^f y_5 + y_7) + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 - 2^{f-1}y_5)^l.\end{gathered} \tag{112}$$
Таким образом, возвращаясь к выражению (4):
$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$
без общего делителя, когда в (4) $y_3 < y_1 < (2^k y_2)$.
Гипотеза Биля для (**5.10**) верна.

5.11 Вариант выражения (4) без общего делителя, когда $y_3 < (2^k y_2) < y_1$

Пусть в (4) $y_3 < (2^k y_2) < y_1$ Тогда:
$$(y_3 + 2^f y_5)^n + (y_3 + y_6)^m = y_3^l, \quad \text{где верно (27) и } f \in \mathbb{N}. \tag{113}$$
Так как выражение (113) совпадает с выражением (99), решение (**5.11**) будет таким же, как и в (**5.10**).
Таким образом, возвращаясь к выражению (4):
$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$
без общего делителя, когда в (4) $y_3 < (2^k y_2) < y_1$.
Гипотеза Биля для (**5.11**) верна.

5.12 Вариант выражения (4) без общего делителя, когда $y_1 < y_3 < (2^k y_2)$

Пусть в (4) $y_1 < y_3 < (2^k y_2)$ Тогда:
$$(y_3 - 2^f y_5)^n + (y_3 + y_6)^m = y_3^l, \quad \text{где верно (27) и } f \in \mathbb{N}. \tag{114}$$
Подставим слагаемые в скобках в (114) вместо y_1 и $(2^k y_2)$ в (83):
$$y_3 - 2^f y_5 + y_3 + y_6 = y_4. \tag{115}$$
Выразим из (115) y_3:
$$y_3 = \frac{y_4 + 2^f y_5 - y_6}{2}. \tag{116}$$
Подставим (116) в (114):
$$\left(\frac{(y_4 - y_6) - 2^f y_5}{2}\right)^n + \left(\frac{(y_4 + y_6) + 2^f y_5}{2}\right)^m = \left(\frac{(y_4 - y_6) + 2^f y_5}{2}\right)^l. \tag{117}$$

5.12.1 Вариант, когда в выражении (117) $f = 1$

Пусть в (117) $f = 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_4 + y_6 = 2y_8, \tag{118}$$

и

$$y_4 - y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{119}$$

Подставив (118) и (119) в (117) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{e-1}y_7 - y_5)^n + (y_8 + y_5)^m = (2^{e-1}y_7 - y_5)^l, \tag{120}$$

где

$$y_8 = \frac{y_4 + y_6}{2},$$
$$2^{e-1}y_7 = \frac{y_4 - y_6}{2}.$$

5.12.1.1

Пусть в (120):

$$(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} < (y_8 + y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения (5.2.1.1)**, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(2^{e-1}y_7 + y_5)(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3}\Big((2^{e-1}y_7 - y_5)(2^{e-1}y_7 + y_8 - 2y_5) + (y_8 - y_5)^2\Big) + \\ &+ (y_8 - y_5)^3(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3} + (y_8 + y_5)\Bigg((y_8 + y_5)^{m-1} - (2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3} \cdot \\ &\cdot \Big((2^{e-1}y_7 - y_5)(2^{e-1}y_7 + y_8 - 2y_5) + (y_8 - y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{e-1}y_7 + y_5)^l.\end{aligned} \tag{121}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < y_3 < (2^k y_2)$, в (117) $f = 1$ и в выражении (120) $(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} < (y_8 + y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.12.1.1**) верна.

5.12.1.2

Пусть в (120):

$$(2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} > (y_8 + y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения (5.2.1.1)**, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(2^{e-1}y_7 + y_5)(y_8 + y_5)^{m-3}\Big((y_8 + y_5)2y_8 + (y_8 - y_5)^2\Big) + (y_8 - y_5)^3 \cdot \\ &\cdot (y_8 + y_5)^{m-3} + (2^{e-1}y_7 - y_5)\Bigg((2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-1} - (y_8 + y_5)^{m-3} \cdot \\ &\cdot \Big((y_8 + y_5)2y_8 + (y_8 - y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{e-1}y_7 + y_5)^l.\end{aligned} \tag{122}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < y_3 < (2^k y_2)$ и в (117) $f = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.12.1**) верна.

5.12.2 Вариант, когда в выражении (117) $f > 1$

Пусть в (117) $f > 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_4 + y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{123}$$

и

$$y_4 - y_6 = 2y_7. \tag{124}$$

Подставив (123) и (124) в (117) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_7 - 2^{f-1}y_5)^n + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^m = (y_7 + 2^{f-1}y_5)^l, \tag{125}$$

где

$$\begin{aligned} 2^{e-1}y_8 &= \frac{y_4 + y_6}{2}, \\ y_7 &= \frac{y_4 - y_6}{2}. \end{aligned}$$

5.12.2.1

Пусть в (125):

$$(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(y_7 + 2^{f-1}y_5)(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 - 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 + y_7 - 2^f y_5) + \\ &+ (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^3(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-3} + (2^{e-1}y_8 + \\ &+ 2^{f-1}y_5)\Bigg((2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1} - (2^{e-1}y_7 - y_5)^{n-3}\Big((2^{e-1}y_7 - y_5)\cdot \\ &\cdot (2^{e-1}y_8 + y_7 - 2^f y_5) + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 + 2^{f-1}y_5)^l. \end{aligned} \tag{126}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < y_3 < (2^k y_2)$, в (117) $f > 1$ и в выражении (125) $(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.12.2.1**) верна.

5.12.2.2

Пусть в (125):

$$(y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} > (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения (5.2.1.1)**, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(y_7 + 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-3}\Big((2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)2^e y_8 + \\ &+ (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^3(2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-3} + \\ &+ (y_7 - 2^{f-1}y_5)\Bigg((y_7 - 2^{f-1}y_5)^{n-1} - (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^{m-3}\cdot \\ &\cdot\Big((2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)2^e y_8 + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 + 2^{f-1}y_5)^l.\end{aligned} \tag{127}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $y_1 < y_3 < (2^k y_2)$.
Гипотеза Биля для (**5.12**) верна.

5.13 Вариант выражения (4) без общего делителя, когда $(2^k y_2) < y_3 < y_1$

Пусть в (4) $(2^k y_2) < y_3 < y_1$. Тогда:

$$(y_3 + 2^f y_5)^n + (y_3 - y_6)^m = y_3^l, \quad \text{где верно (27) и } f \in \mathbb{N}. \tag{128}$$

Подставим слагаемые в скобках в (128) вместо y_1 и $(2^k y_2)$ в (83):

$$y_3 + 2^f y_5 + y_3 - y_6 = y_4. \tag{129}$$

Выразим из (129) y_3:

$$y_3 = \frac{y_4 - 2^f y_5 + y_6}{2}. \tag{130}$$

Подставим (130) в (128):

$$\left(\frac{(y_4 + y_6) + 2^f y_5}{2}\right)^n + \left(\frac{(y_4 - y_6) - 2^f y_5}{2}\right)^m = \left(\frac{(y_4 + y_6) - 2^f y_5}{2}\right)^l. \tag{131}$$

5.13.1 Вариант, когда в выражении (131) $f = 1$

Пусть в (131) $f = 1$. Тогда согласно (23) и (24):

$$y_4 - y_6 = 2y_8, \tag{132}$$

и

$$y_4 - y_6 = 2^e y_7, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}. \tag{133}$$

Подставив (132) и (133) в (131) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(2^{e-1}y_7 + y_5)^n + (y_8 - y_5)^m = (2^{e-1}y_7 - y_5)^l, \tag{134}$$

где

$$y_8 = \frac{y_4 - y_6}{2},$$
$$2^{e-1}y_7 = \frac{y_4 + y_6}{2}.$$

5.13.1.1

Пусть в (134):

$$(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} > (y_8 - y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(2^{e-1}y_7 - y_5)(y_8 - y_5)^{m-3}\Big((y_8 - y_5)2y_8 + (y_8 + y_5)^2\Big)+\\&+ (y_8 + y_5)^3(y_8 - y_5)^{m-3} + (2^{e-1}y_7 + y_5)\Bigg((2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} - (y_8 - y_5)^{m-3}\cdot\\&\cdot\Big((y_8 - y_5)2y_8 + (y_8 + y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{e-1}y_7 - y_5)^l.\end{aligned} \tag{135}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $(2^k y_2) < y_3 < y_1$, в (131) $f = 1$ и в выражении (134) $(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} > (y_8 - y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.13.1.1**) верна.

5.13.1.2

Пусть в (134):

$$(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-1} < (y_8 - y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&(2^{e-1}y_7 - y_5)(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-3}\Big((2^{e-1}y_7 + y_5)(2^{e-1}y_7 + y_8 + 2y_5) + (y_8 + y_5)^2\Big)+\\&+ (y_8 + y_5)^3(2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-3} + (2^{e-1}y_7 + y_5)\Bigg((2^{e-1}y_7 + y_5)^{m-1} - (2^{e-1}y_7 + y_5)^{n-3}\cdot\\&\cdot\Big((2^{e-1}y_7 + y_5)(2^{e-1}y_7 + y_8 + 2y_5) + (y_8 + y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (2^{e-1}y_7 - y_5)^l.\end{aligned} \tag{136}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $(2^k y_2) < y_3 < y_1$ и в (131) $f = 1$.
Гипотеза Биля для (**5.13.1**) верна.

5.13.2 Вариант, когда в выражении (131) $f > 1$

Пусть в (131) $f > 1$. Тогда согласно (21) и (22):

$$y_4 - y_6 = 2^e y_8, \quad \text{где} \quad (e \geq 2) \in \mathbb{N}, \tag{137}$$

и

$$y_4 + y_6 = 2y_7. \tag{138}$$

Подставив (137) и (138) в (131) и разделив выражения в скобках на 2, получим следующее выражение:

$$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^n + (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^m = (y_7 - 2^{f-1}y_5)^l, \tag{139}$$

где

$$2^{e-1}y_8 = \frac{y_4 - y_6}{2},$$
$$y_7 = \frac{y_4 + y_6}{2}.$$

5.13.2.1

Пусть в (139):

$$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&(y_7 - 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-3}\Big((2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)2^e y_8 + \\
&+ (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^3(2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-3} + \\
&+ (y_7 + 2^{f-1}y_5)\Bigg((y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} - (2^{e-1}y_8 - y_5)^{m-3}\Big((2^{e-1} * y_8 - y_5) \cdot \\
&\cdot 2^e y_8 + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big)\Bigg) \neq (y_7 - 2^{f-1}y_5)^l.
\end{aligned} \tag{140}$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя, когда в (4) $(2^k y_2) < y_3 < y_1$, в (131) $f > 1$ и в выражении (139) $(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1}$.
Гипотеза Биля для (**5.13.2.1**) верна.

5.13.2.2

Пусть в (139):

$$(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-1} < (2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1}.$$

Вычисляя **Методом сложения** (**5.2.1.1**), получим следующее выражение:

$$
\begin{gathered}
(y_7 - 2^{f-1}y_5)(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 + 2^{f-1}y_5)(2^{e-1}y_8 + y_7 + 2^f * y_5) + \\
+ (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big) + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^3(y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-3} + (2^{e-1}y_8 - \\
- 2^{f-1}y_5)\bigg((2^{e-1}y_8 - 2^{f-1}y_5)^{m-1} - (y_7 + 2^{f-1}y_5)^{n-3}\Big((y_7 + 2^{f-1}y_5)\cdot \\
\cdot (2^{e-1}y_8 + y_7 + 2^f y_5) + (2^{e-1}y_8 + 2^{f-1}y_5)^2\Big)\bigg) \neq (y_7 - 2^{f-1}y_5)^l.
\end{gathered} \tag{141}
$$

Таким образом, возвращаясь к выражению (4):

$$y_1^n + (2^k y_2)^m \neq y_3^l,$$

без общего делителя.
Гипотеза Биля для (**5**) верна.

Учитывая выводы разделов (**2**), (**4**) и (**5**), **Гипотеза Биля** доказана.