Pre-relativistic vector transformations

Valery Timin

(September 11, 2019)

Russia, RME

Pre-relativistic vector transformations are transformations of 4-dimensional material vectors of classical mechanics

Formulas of transformations of contravariant and covariant vectors of pre – relativistic space-intermediate space between Galilean and relativistic (Minkowski) spaces are given. The domain of definition is the transformation of coordinates and vectors at infinitesimal velocities of material objects. Such vectors are spatial coordinates, velocities, accelerations and many other material 4-vector parameters – for example, 4-dimensional energy-momentum. The form of metric tensor of pre-relativistic space, scalar product, formula for conjugation of vectors is also given.

(Translated by Yandex Translator Яндекс-Переводчик)

Дорелятивистские преобразования векторов являются преобразованиями 4-мерных материальных векторов классической механики

Даны формулы преобразований контравариантных и ковариантных векторов дорелятивистского пространства – промежуточного пространства между галилеевыми и релятивистскими (Минковского) пространствами. Область определения –преобразования координат и векторов при бесконечно малых скоростях материальных объектов. Такими векторами являются пространственные координаты, скорости, ускорения и а также многие другие материальные 4-векторные параметры – например, 4-мерные энергия-импульс. Дан также вид метрического тензора дорелятивистского пространства, скалярного произведения, формулы для сопряжения векторов.

Оглавление

1. Преобразования контравариантных векторных параметров

В тензорном 4–х мерном виде координаты и время ведут себя как контравариантные векторы и преобразуются следующим образом:

$$q'^i = g^i{}_j q^j - q_{(0)}{}^j. \tag{1}$$

где $g^i{}_j$ – тензор преобразования 4-координат,

$q_{(0)}$ – смещение начала новых значений координат в старой.

При смешанном матрично-тензорном (далее – матричном) способе представления тензоров вектор будет соответствовать матрице–столбцу, тензор 2–го ранга – квадратной матрице, где строки будут соответствовать 1–му индексу, столбцы – 2–му индексу. Матрица преобразования координат $g^i{}_j$ при отсутствии смещения будет определяться следующим матрично-тензорным выражением:

$$g^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $v^i{}_0 \sim v^i$ – скорость новой системы отсчета относительно старой. Здесь $v^i{}_0$, v^i численно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем изложении мы в записях подобного вида будем иметь в виду, что при параметре v^i (v^j) имеется еще ковариантный индекс со значением 0.

$v^i{}_0$ – 3-тензор преобразования пространственных координат вектора: $i \in \{1..3\}$.

Областью применения ДРПТК является очень малые значения скорости, значительно меньшие единичного значения: $v^i{}_0 \sim v^i << 1$ в системе с единичным значением фундаментальной скорости c: $c = 1$. Таким образом, преобразование (1) координат с помощью тензора (2) можно записать в матричном виде:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - v^0{}_j r^j \\ \omega^i{}_j r^j - v^i{}_0 t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из этих преобразований видно, что в контравариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяются как пространственная, так и временная части вектора.

Запишем в общем виде преобразования для произвольного контравариантного вектора A^i:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_j A^j \\ \omega^i{}_j A^j - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Областью применения ДРПТК в (4) также является очень малые значения скорости, значительно меньшие единичного значения: $v^i{}_0 \sim v^i << 1$. Область значений элементов вектора A^i и других тензоров требует дополнительного обоснования.

2. Преобразования скорости и ускорения.

Скорость и ускорение в новой с.к. являются тензорами 2-го и 3-го рангов в силу следующих равенств:

$$v = \frac{dr^i}{dt} = v^i{}_0;\; w = \frac{dv^i{}_0}{dt} = v^i{}_{00}.$$

В новой с.к.: (5)

$$v' = \frac{dr'^i}{dt'} = v'^i{}_0;\; w' = \frac{dv'^i{}_0}{dt'} = w'^i{}_{00}.$$

В силу этого невозможно с помощью преобразований (1) – (3) преобразовать скорость и ускорение в новую с.к. как вектор. Но, учитывая, что характеристическая скорость с = $3{\cdot}10^8$ м.с. является очень большой, и учитывая формулу преобразования координаты времени

$$t' = t - v^0{}_i/c^2{\cdot}r^i, \tag{6}$$

в которой характерное значение $v^0{}_i/c^2 \sim 10^3[\text{м/с}]/3^2{\cdot}10^{(8+8)}[\text{м}^2/\text{с}^2] \sim 9{\cdot}10^{-16} << 1$, можем принять $t' = t$, и скорость и ускорение преобразовывать как вектор.

> *Замечание. В галилеевом пространстве $dt = dt' = d\tau$, поэтому в (5) нижние индексы можно игнорировать и в нем скорость и ускорение будут настоящими векторами.*

С учетом этого рассмотрим дорелятивистские преобразования скорости и ускорения в дифференциальной и тензорной формах.

Для скорости в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{dq'^i}{dt'} = \frac{dq'^i}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t - v^0{}_j r^j \\ \omega^i{}_j r^j - v^i{}_0 t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}t - v^0{}_j \frac{d}{dt}r^j \\ \omega^i{}_j \frac{d}{dt}r^j - v^i{}_0 \frac{d}{dt}t\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - v^0{}_j v^j \\ \omega^i{}_j v^j - v^i{}_0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^i{}_j v^j - v^i{}_0\end{pmatrix} \tag{7}$$

Порядок малости выражения $v^0{}_j v^j$ тот же, что и выше, и мы им пренебрегаем.

Применив 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору скорости непосредственно, получим то же самое:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ v^j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v^0{}_j v^j \\ \omega^i{}_j v^j - v^i{}_0 v^0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^i{}_j v^j - v^i{}_0\end{pmatrix} \tag{8}$$

Для вектора ускорения аналогично. Для ускорения в дифференциальной форме имеем. Заметим: $w^0 = 0$:

$$\frac{d^2q'^i}{dt'^2} = \frac{d^2q'^i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} t - v^0{}_j r^j \\ \omega^i{}_j r^j - v^i{}_0 t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}t - v^0{}_j \frac{d^2}{dt^2}r^j \\ \omega^i{}_j \frac{d^2}{dt^2}r^j - v^i{}_0 \frac{d^2}{dt^2}t\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 - v^0{}_j w^j \\ \omega^i{}_j w^j - v^i{}_0{\cdot}0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^0{}_j w^j \\ \omega^i{}_j w^j\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^i{}_j w^j\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Порядок малости выражения $v^0{}_j w^j$ тот же, что и выше, и мы им пренебрегаем.

Применим 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору ускорения непосредственно:

$$w'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^0{}_j w^j \\ \omega^i{}_j w^j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^i{}_j v^j \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из вида этих преобразований видно, что координата, скорость, ускорение при 4–х мерных дорелятивистских преобразованиях координат ведут себя одинаково – как контравариантные тензорные величины (векторы), и нет необходимости делить их на векторы разной природы при преобразованиях координат в четырехмерном виде, но при этом $v^0 = 1$, $w^0 = 0$.

3. *Скалярное произведение и сопряженные векторы*

Соответствующие друг другу контравариантный и ковариантный векторы называются сопряженными. Именно через сопряженные векторы определяется скалярное произведение векторов:

$$A \cdot B = A^i B_i. \tag{11}$$

В дорелятивистском пространстве, так же как и в любом другом тензорном пространстве, такое скалярное произведение двух векторов можно определить в соответствии с формулами (22).

В тензорной алгебре сопряженный вектор может быть получен операцией опускания индексов для контравариантных и операцией поднятия индексов для ковариантных векторов. Операция поднятия-опускания индексов осуществляется с помощью невырожденного, а в ортонормированном метрическом пространстве еще и диагонального метрического тензорова g_{ij} и g^{ij}:

$$\begin{gathered} g_{ij}A^j = A_j \text{ – опускание индекса,} \\ g^{ij}A_j = A^j \text{ – поднятие индекса.} \end{gathered} \tag{12}$$

В галилеевом пространстве такого тензора не имеется. Следовательно, невозможно стандартно определить сопряженные вектора. Но в дорелятивистском пространстве такую операцию можно определить.

Вспомним, что закон сохранения энергии или перехода работы в энергию и наоборот имеет форму скалярного произведения с диагональным метрическим тензором

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

С использованием этого метрического тензора закон сохранения энергии записывается в виде:

$$\begin{gathered} dK - dA = 0 \rightarrow \\ \rightarrow (P, F^i) \cdot (dt, dr^i) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow g_{ij} F^i dq^j = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Вместе с существованием метрического тензора появляется возможность осуществления операций опускания-поднятия индекса тензора (12).

В качестве первого примера используем операцию опускания индекса к произвольному контравариантному вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{il} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -A^l \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Как видим, изменился знак при элементах с пространственными индексами 1..3.

В качестве второго примера используем операцию опускания-поднятия индекса к тензору ГПТК и получить тензор преобразования ковариантного вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Поднимем второй (нижний) индекс, обозначенный как *l*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{kj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0{}_0 & -v^0{}_l \\ -v^k{}_0 & \omega^k{}_l \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & v^{0l} \\ -v^{k0} & -\omega^{kl} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Опустим первый (верхний) индекс, обозначенный как *l*:

$$\begin{pmatrix} 1 & v^{0l} \\ -v^{k0} & -\omega^{kl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta^{il} \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_j \\ -v^k{}_0 & +\omega^k{}_j \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Как видим, опускание и/или поднятие пространственного индекса сопровождается изменением знака соответствующего индекса. При этом элемент с "временным" индексом 0 не меняет значения.

4. Преобразования ковариантных векторных параметров

При смешанном матрично-тензорном (далее – матричном) способе представления тензоров вектор будет соответствовать матрице–столбцу, тензор 2–го ранга – квадратной матрице, где строки будут соответствовать 1–му индексу, столбцы – 2–му индексу. Матрица преобразования ковариантного вектора $g_j^{\,i}$ будет определяться следующим выражением:

$$g_i{}^j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^j \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{19}$$

где $v_i^0 \sim v_i$ – скорость новой системы отсчета относительно старой. Здесь $v_i^0 \sim v_i$ численно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем изложении мы в записях подобного вида будем иметь в виду, что при параметре v_i (v_j) имеется еще контравариантный индекс со значением 0.

Запишем в общем виде преобразования для произвольного ковариантного вектора A_i:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^j \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^j A_j \\ A_0 v_i{}^0 + \omega_i{}^j A_j \end{pmatrix}. \tag{20}$$

5. Литература

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А.А. Курс общей физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М. Высшая школа, 2017. - 245 с.
3. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк.,

2001. – 575 с. 74

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: В 10 т.: т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с

Мои работы

http://vixra.org/author/valery_timin