Pre-relativistic tensor transformations

Valery Timin

(September 11, 2019)

Russia, RME

Pre-relativistic tensor transformations are transformations of 4-dimensional material tensors of classical mechanics

Formulas for transformations of contravariant, covariant, and mixed rank 2 tensors of a pre – relativistic space-the intermediate space between Galilean and relativistic (Minkowski) spaces-are given. The domain of definition is the transformation of coordinates and vectors at infinitesimal velocities of material objects. Such tensors are metric tensors of 4-dimensional space.

(Translated by Yandex Translator Яндекс-Переводчик)

Дорелятивистские преобразования тензоров являются преобразованиями 4-мерных материальных тензоров классической механики

Даны формулы преобразований контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров ранга 2 дорелятивистского пространства – промежуточного пространства между галилеевыми и релятивистскими (Минковского) пространствами. Область определения – преобразования координат и векторов при бесконечно малых скоростях материальных объектов. Такими тензорами являются метрические тензоры 4-мерного пространства.

Оглавление

Преобразования дорелятивистских тензоров ранга 2метриче

Рассмотрим расширенные галилеевы преобразования тензоров ранга 2 как произведения преобразованных соответствующих типов (ковариантного или контравариантного) векторов A_i, A^i, B_j или B^j:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_n \\ -v^i{}_0 & \omega^j{}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_n A^n \\ \omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}.$$
$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$$B'^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_m \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}.$$
$$B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ v_j{}^0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Также имеем в виду, что:

1) $v^0{}_j$ и $v_0{}^j$ численно равны, но при поднятии/опускании индекса необходимо учитывать правила смены знаков;

2) $\omega^i{}_j$ и $\omega_i{}^j$ численно равны;

3) $E^i{}_j$ – единичная диагональная матрица;

4) "*" может означать, что необходимо учитывать, выражения вида $v^0{}_i v_0{}^j A$... в последующих формулах может быть того же порядка, что и $v^0{}_j A$... .

Преобразования контравариантных тензоров ранга 2

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A^{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'^{ij} \Leftrightarrow (g^i{}_n A^n)\,(g^j{}_m A^m) = A'^i B'^j \to C'^{ij}. \quad (3)$$

Проведем это преобразование как произведение двух преобразованных контравариантных векторов:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_n \\ -v^i{}_0 & \omega^j{}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_n A^n \\ \omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}.$$
$$B'^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_m \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$A'^i B'^j = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_n A^n \\ \omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m & \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A^0 - v^0{}_n A^n)(B^0 - v^0{}_m B^m) & (A^0 - v^0{}_n A^n)(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0) \\ (\omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0)(B^0 - v^0{}_m B^m) & (\omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0)(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0) \end{pmatrix} = \quad (5)$$

$$=\begin{pmatrix} A^0B^0 - v^0{}_nA^nB^0 - A^0v^0{}_mB^m + v^0{}_nA^nv^0{}_mB^m & A^0\omega^j{}_mB^m - A^0v^j{}_0B^0 - v^0{}_nA^n\omega^j{}_mB^m + v^0{}_nA^nv^j{}_0B^0 \\ \omega^i{}_nA^nB^0 - v^i{}_0A^0B^0 - \omega^i{}_nA^nv^0{}_mB^m + v^i{}_0A^0v^0{}_mB^m & \omega^i{}_nA^n\omega^j{}_mB^m - \omega^i{}_nA^nv^j{}_0B^0 + v^i{}_0A^0v^j{}_0B^0 - v^i{}_0A^0\omega^j{}_mB^m \end{pmatrix}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование контравариантного тензора:

$$C'^{ij}$$

$$=\begin{pmatrix} A^{00} - (v^0{}_nA^{n0} + v^0{}_mA^{0m}) + v^0{}_nv^0{}_mA^{nm} & \omega^j{}_nA^{0m} - v^j{}_0A^{00} - v^0{}_n\omega^j{}_mA^{nm} + v^0{}_nv^j{}_0A^{n0} \\ \omega^i{}_nA^{n0} - v^i{}_0A^{00} - \omega^i{}_nv^0{}_mA^{nm} + v^i{}_0v^0{}_mA^{0m} & \omega^i{}_n\omega^j{}_mA^{nm} - \left(\omega^i{}_nv^j{}_0A^{n0} + v^i{}_0\omega^j{}_mA^{0m}\right) + v^i{}_0v^j{}_0A^{00} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (6) запишутся в виде

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} - (v^0{}_nA^{n0} + v^0{}_mA^{0m}) & \omega^j{}_nA^{0m} - v^j{}_0A^{00} - v^0{}_n\omega^j{}_mA^{nm} \\ \omega^i{}_nA^{n0} - v^i{}_0A^{00} - \omega^i{}_nv^0{}_mA^{nm} & \omega^i{}_n\omega^j{}_mA^{nm} - \left(\omega^i{}_nv^j{}_0A^{n0} + v^i{}_0\omega^j{}_mA^{0m}\right) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Если нет поворота с.о., то преобразование еще упростится:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} - (v^0{}_nA^{n0} + v^0{}_mA^{0m}) + v^0{}_nv^0{}_mA^{nm} & A^{0j} - \left(v^j{}_0A^{00} + v^0{}_nA^{nj}\right) + v^0{}_nv^j{}_0A^{n0} \\ A^{i0} - \left(v^i{}_0A^{00} + v^0{}_mA^{im}\right) + v^i{}_0v^0{}_mA^{0m} & A^{ij} - \left(v^j{}_0A^{i0} + v^i{}_0A^{0j}\right) + v^i{}_0v^j{}_0A^{00} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

При антисимметричной смешанной части формула (6.1) упрощается:

$$C'^{ij}$$

$$=\begin{pmatrix} A^{00} + v^0{}_nv^0{}_mA^{nm} & A^{0j} - \left(v^j{}_0A^{00} + v^0{}_nA^{nj}\right) + v^0{}_nv^j{}_0A^{n0} \\ A^{i0} - \left(v^i{}_0A^{00} + v^0{}_mA^{im}\right) + v^i{}_0v^0{}_mA^{0m} & A^{ij} - \left(v^j{}_0A^{i0} + v^i{}_0A^{0j}\right) + v^i{}_0v^j{}_0A^{00} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

При наличии только вращения пространственных координат ($v^i{}_0 = 0$) временной элемент (6) не изменяется, пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^j{}_nA^{0m} \\ \omega^i{}_nA^{n0} & \omega^i{}_n\omega^j{}_mA^{nm} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Следствия.

1). Из (6) видно, что временная часть тензора при ГПТК не изменяется, а остальные изменяются.

2). Если тензор $A^{ij} = -A^{ji}$ (антисимметричен), то $A^{ii} = 0$ (в т.ч. $A^{00} = 0$), то формула преобразования упрощается, причем она остается антисимметричной, более того – неизменной. В общем случае насчет галилеева преобразования контравариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности (антисимметричности).

Преобразования ковариантных тензоров ранга 2

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'_{i\,j} \Leftrightarrow (g_i{}^nA_n)\,(g_i{}^mB_m) = A'_iB'_j \rightarrow C'_{i\,j}. \quad (7)$$

Проведем это преобразование как произведение двух ковариантных векторов:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & {v_0}^n \\ {v_i}^0 & {\omega_i}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + {v_0}^n A_n \\ {v_i}^0 A_0 + {\omega_i}^n A_n \end{pmatrix}.$$
$$B'_j = \begin{pmatrix} 1 & {v_0}^m \\ {v_j}^0 & {\omega_j}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + {v_0}^m B_m \\ {v_j}^0 B_0 + {\omega_j}^m B_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$A'_i B'_j = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} B_0 & B_m \end{pmatrix}' =$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 + {v_0}^n A_n \\ {v_i}^0 A_0 + {\omega_i}^n A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 + {v_0}^m B_m & {v_j}^0 B_0 + {\omega_j}^m B_m \end{pmatrix} = \tag{9}$$
$$= \begin{pmatrix} (A_0 + {v_0}^n A_n)(B_0 + {v_0}^m B_m) & (A_0 + {v_0}^n A_n)\left({v_j}^0 B_0 + {\omega_j}^m B_m\right) \\ \left({v_i}^0 A_0 + {\omega_i}^n A_n\right)(B_0 + {v_0}^m B_m) & \left({v_i}^0 A_0 + {\omega_i}^n A_n\right)\left({v_j}^0 B_0 + {\omega_j}^m B_m\right) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 B_0 + {v_0}^n A_n B_0 + A_0 {v_0}^m B_m + {v_0}^n A_n {v_0}^m B_m & A_0 {v_j}^0 B_0 + {v_0}^n A_n {v_j}^0 B_0 + A_0 {\omega_j}^m B_m + {v_0}^n A_n {\omega_j}^m B_m \\ {v_i}^0 A_0 B_0 + {\omega_i}^n A_n B_0 + {v_i}^0 A_0 {v_0}^m B_m + {\omega_i}^n A_n {v_0}^m B_m & {v_i}^0 A_0 {v_j}^0 B_0 + {\omega_i}^n A_n {v_j}^0 B_0 + {v_i}^0 A_0 {\omega_j}^m B_m + {\omega_i}^n A_n {\omega_j}^m B_m \end{pmatrix}.$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование ковариантного тензора:

$$C'_{ij}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{00} + ({v_0}^n A_{n0} + {v_0}^m A_{0m}) + {v_0}^n {v_0}^m A_{nm} & {v_j}^0 A_{00} + {v_0}^n {v_j}^0 A_{n0} + {\omega_j}^m A_{0m} + {v_0}^n {\omega_j}^m A_{nm} \\ {v_i}^0 A_{00} + {\omega_i}^n A_{n0} + {v_i}^0 {v_0}^m A_{0m} + {\omega_i}^n {v_0}^m A_{nm} & {v_i}^0 {v_j}^0 A_{00} + \left({\omega_i}^n {v_j}^0 A_{n0} + {v_i}^0 {\omega_j}^m A_{0m}\right) + {\omega_i}^n {\omega_j}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Если учесть,что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (10) запишутся в виде

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + ({v_0}^n A_{n0} + {v_0}^m A_{0m}) & {v_j}^0 A_{00} + A_{0m} {\omega_j}^m + {v_0}^n {\omega_j}^m A_{nm} \\ {\omega_i}^n A_{n0} + {v_i}^0 A_{00} + {\omega_i}^n {v_0}^m A_{nm} & {\omega_i}^n {\omega_j}^m A_{nm} + \left({\omega_i}^n {v_j}^0 A_{n0} + {v_i}^0 {\omega_j}^m A_{0m}\right) \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование (10) еще упростится:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + ({v_0}^n A_{n0} + {v_0}^m A_{0m}) + {v_0}^n {v_0}^m A_{nm} & A_{0j} + {v_j}^0 A_{00} + {v_0}^n A_{nj} + {v_0}^n A_{n0} {v_j}^0 \\ {v_i}^0 A_{00} + A_{i0} + {v_i}^0 {v_0}^m A_{0m} + A_{im} {v_0}^m & {v_i}^0 {v_j}^0 A_{00} + \left(A_{i0} {v_j}^0 + {v_i}^0 A_{0j}\right) + A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

При антисимметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + {v_0}^n {v_0}^m A_{nm} & {v_j}^0 A_{00} + A_{0j} + {v_0}^n A_{nj} + {v_0}^n {\omega_j}^m A_{nm} \\ {v_i}^0 A_{00} + A_{i0} + {v_0}^m A_{im} + {\omega_i}^n {v_0}^m A_{nm} & {v_i}^0 {v_j}^0 A_{00} + \left(A_{i0} {v_j}^0 + {v_i}^0 A_{0j}\right) + {\omega_i}^n {\omega_j}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

При наличии только вращения пространственных координат (${v^i}_0 = 0$) временной элемент не изменяется, пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} & {\omega_j}^m A_{0m} \\ {\omega_i}^n A_{n0} & {\omega_i}^n {\omega_j}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

Следствия:

1). Если тензор антисимметричен: A_{ij} = - A_{ji}, то A_{ii} = 0 (в т.ч. A_{00} = 0), и формула преобразования упрощается, причем она остается антисимметричной. В общем случае насчет галилеева преобразования ковариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и антисимметричности.

2). (псевдо)Метрический тензор не изменяется:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_{ij} \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_{ij} \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

3). Метрический временной тензор не сохраняет свою структуру и изменяется следующим образом:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & v_j{}^0 \\ v_i{}^0 & v_i{}^0 v_j{}^0 \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

4). Пространственный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

5). Метрический пространственный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$\begin{aligned} g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \to g'_{ij} &= \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m E_{nm} & v_0{}^n E_{nj} \\ v_0{}^m E_{im} & E_{ij} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_0{}^n v_{0n} & v_{0j} \\ v_{i0} & E_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & E_{ij} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Преобразования смешанных тензоров $C^i{}_j$

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'^i{}_j \Leftrightarrow (g^j{}_n A^n)\,(g_i{}^m B_m) = A'^i B'_j \to C'_i{}^j. \tag{12}$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

Проведем это преобразование как произведение двух соответствующих векторов:

$$\begin{aligned} A'^i &= \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_n \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_n A^n \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \\ B'_j &= \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ v_j{}^0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$C'^i{}_j = A'^i B'_j = \begin{pmatrix} A^0 - v^0{}_n A^n \\ \omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m & v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A^0 - v^0{}_n A^n)(B_0 + v_0{}^m B_m) & (A^0 - v^0{}_n A^n)\left(v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m\right) \\ \left(\omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0\right)(B_0 + v_0{}^m B_m) & \left(\omega^j{}_n A^n - v^i{}_0 A^0\right)\left(v_j{}^0 B_0 + \omega_j{}^m B_m\right) \end{pmatrix} = \qquad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} A^0 B_0 + A^0 v_0{}^m B_m - v^0{}_n A^n B_0 - v^0{}_n A^n v_0{}^m B_m & A^0 v_j{}^0 B_0 + A^0 \omega_j{}^m B_m - v^0{}_n A^n v_j{}^0 B_0 - v^0{}_n A^n \omega_j{}^m B_m \\ \omega^j{}_n A^n B_0 - v^i{}_0 A^0 B_0 + \omega^j{}_n A^n v_0{}^m B_m - v^i{}_0 A^0 v_0{}^m B_m & \omega^j{}_n A^n v_j{}^0 B_0 + \omega^j{}_n \omega_j{}^m A^n B_m - v^i{}_0 A^0 v_j{}^0 B_0 - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0 B_m \end{pmatrix}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + (v_0{}^m A^0{}_m - v^0{}_n A^n{}_0) - v^0{}_n v_0{}^m A^n{}_m & v_j{}^0 A^0{}_0 + \omega_j{}^m A^0{}_m - v^0{}_n v_j{}^0 A^n{}_0 - v^0{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m \\ \omega^j{}_n A^n{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 + \omega^j{}_n v_0{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m & \omega^j{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m + \left(\omega^j{}_n v_j{}^0 A^n{}_0 - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0{}_m\right) - v^i{}_0 v_j{}^0 A^0{}_0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (15) запишутся в виде

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + (v_0{}^m A^0{}_m - v^0{}_n A^n{}_0) & \omega_j{}^m A^0{}_m + v_j{}^0 A^0{}_0 - v^0{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m \\ \omega^j{}_n A^n{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 + \omega^j{}_n v_0{}^m A^n{}_m & \omega^j{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m + \left(\omega^j{}_n v_j{}^0 A^n{}_0 - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0{}_m\right) \end{pmatrix}. \qquad (15.1)$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора формула преобразования следующая:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + (v_0{}^m A^0{}_m - v^0{}_n A^n{}_0) - v^0{}_n v_0{}^m A^n{}_m & A^0{}_j + v_j{}^0 A^0{}_0 - v^0{}_n A^n{}_j - v^0{}_n v_j{}^0 A^n{}_0 \\ A^i{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m + v_0{}^m A^i{}_m & A^i{}_j + \left(v_j{}^0 A^i{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_j\right) - v^i{}_0 v_j{}^0 A^0{}_0 \end{pmatrix}. \qquad (15.2)$$

При симметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 - v^0{}_n v_0{}^m A^n{}_m & A^0{}_j + v_j{}^0 A^0{}_0 - v^0{}_n v_j{}^0 A^n{}_0 - v^0{}_n A^n{}_j \\ A^i{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m + v_0{}^m A^i{}_m & A^i{}_j + \left(v_j{}^0 A^i{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_j\right) - v^i{}_0 v_j{}^0 A^0{}_0 \end{pmatrix}. \qquad (15.3)$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'^i = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^j{}_n A^n{}_0 & \omega^j{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m \end{pmatrix}. \qquad (15.4)$$

Преобразования смешанных тензоров $C_i{}^j$

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'_i{}^j \Leftrightarrow (g_i{}^m A_m)\,(g^j{}_n B^n) = A'_i B'^j. \qquad (16)$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

Проведем это преобразование как произведение двух соответствующих векторов:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ v_i{}^0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}.$$
$$B'^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^0{}_m \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$C'_i{}^j = A'_i B'^j = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 - v^0{}_m B^m & \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A_0 + v_0{}^n A_n)(B^0 - v^0{}_m B^m) & (A_0 + v_0{}^n A_n)(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0) \\ (v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n)(B^0 - v^0{}_m B^m) & (v_i{}^0 A_0 + \omega_i{}^n A_n)(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0) \end{pmatrix} = \tag{18}$$
$$= \begin{pmatrix} A_0 B^0 + v_0{}^n A_n B^0 - A_0 v^0{}_m B^m - v_0{}^n A_n v^0{}_m B^m & \omega^j{}_m A_0 B^m - v^j{}_0 A_0 B^0 + v_0{}^n A_n \omega^j{}_m B^m - v_0{}^n A_n v^j{}_0 B^0 \\ v_i{}^0 A_0 B^0 + \omega_i{}^n A_n B^0 - v_i{}^0 A_0 v^0{}_m B^m - \omega_i{}^n A_n v^0{}_m B^m & v_i{}^0 A_0 \omega^j{}_m B^m - v_i{}^0 A_0 v^j{}_0 B^0 + \omega_i{}^n A_n \omega^j{}_m B - \omega_i{}^n A_n v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'_i{}^j$$
$$= \begin{pmatrix} A_0{}^0 + (v_0{}^n A_n{}^0 - A_0{}^m v^0{}_m) - v_0{}^n A_n{}^m v^0{}_m & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ v_i{}^0 A_0{}^0 + \omega_i{}^n A_n{}^0 - v_i{}^0 v^0{}_m A_0{}^m - \omega_i{}^n v^0{}_m A_n{}^m & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m + v_i{}^0 \omega^j{}_m A_0{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 - v_i{}^0 v^j{}_0 A_0{}^0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Если учесть, что эти преобразования ограничены очень малыми скоростями, преобразования (19) запишутся в виде

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 - A_0{}^m v^0{}_m & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 + v_i{}^0 A_0{}^0 - \omega_i{}^n v^0{}_m A_n{}^m & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m + v_i{}^0 \omega^j{}_m A_0{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \end{pmatrix}. \tag{19.1}$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора формула преобразования практически не упрощается:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 - A_0{}^m v^0{}_m - v_0{}^n A_n{}^m v^0{}_m & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_i{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ v_i{}^0 A_0{}^0 + A_i{}^0 - v^0{}_m A_i{}^m - v_i{}^0 v^0{}_m A_0{}^m & v_i{}^0 A_0{}^j + A_i{}^j - v^j{}_0 A_i{}^0 - v_i{}^0 v^j{}_0 A_0{}^0 \end{pmatrix}. \tag{19.2}$$

При симметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 - v_0{}^n A_n{}^m v^0{}_m & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_i{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ v_i{}^0 A_0{}^0 + A_i{}^0 - v_i{}^0 v^0{}_m A_0{}^m - v^0{}_m A_i{}^m & A_i{}^j + (v_i{}^0 A_0{}^j - v^j{}_0 A_i{}^0) - v_i{}^0 v^j{}_0 A_0{}^0 \end{pmatrix}. \tag{19.3}$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \end{pmatrix}. \tag{19.4}$$

Литература

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А.А. Курс общей физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М. Высшая школа, 2017. - 245 с.
3. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: В 10 т.: т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с

Мои работы

http://vixra.org/author/valery_timin