Weak metric fields

Valery Timin

(August 2019)

Russia

In addition to the force fields defined by scalar and vector potential fields and their intensities, it is possible to have force fields defined directly through the metric tensor $g_{ij}(r,t)$. The role of the metric tensor in the motion of a material point is that the trajectory between any two points of space–time along the geodesic "line" as the line of the smallest length is determined through it. The length of the "straight" corresponds to the length of the shortest "interval" between these points. The differential equation of this "shortest" condition is expressed by the Christoffel symbols Γ^i_{jk}. In this paper we consider the case of weak "metric" fields and velocities of the material point. The Christoffel symbols themselves and the metric field are defined as corresponding fields in Galilean space.

Кроме силовых полей, задаваемых скалярным и векторным потенциальным полями и их напряженностями, возможно существование силовых полей, определяющихся непосредственно через метрический тензор $g_{ij}(r,t)$. Роль метрического тензора в движении материальной точки заключается в том, что через него определяется траектория между любыми двумя точками пространства–времени по геодезической "прямой" как линии наименьшей длины. Длина "прямой" при этом соответствует длине наикратчайшего "интервала" между этими точками. Дифференциальное уравнение этого "наикратчайшего" условия выражается через символы Кристоффеля Γ^i_{jk}. В данной работе рассмотрен случай слабых "метрических" полей и скоростей движения материальной точки. Сами символы Кристоффеля и метрическое поле определены как соответствующие поля в галилеевом пространстве.

Слабые метрические поля и символы Кристоффеля

Рассмотрим слабые до первых производных метрические поля g^*_{im} в галилеевом пространстве.

$$g^*_{im} = E_{im} + g_{im}\text{: } \forall i,m\text{: } g_{im} << 1 \ (i\,,\, l,\, k,\, m \in \{0..3\}).$$

Здесь g_{im} – малое отклонение метрического тензора от ортонормированного,

E_{im} – единичный псевдометрический тензор плоского галилеева пространства:

$$E^{im} = E_{im} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$E^i{}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \tag{2}$$

$$\delta^{im} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{im}.$$

Символы Кристоффеля первого рода или коэффициенты связности пространства с данной метрикой будет следующим:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(E^{im} + g^{im}\right)\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m}\right). \tag{3}$$

Предполагая слабость метрического поля: $g_{im} << 1$, выражение для расчета коэффициентов связности можем записать в следующем очень простом виде:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}E^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E^{im} g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial E^{im} g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{E^{im}\partial g_{kl}}{\partial q^m}\right). \tag{4}$$

Отделяя индекс со значением 0 от остальных и учитывая, что (при i , l, k, m $\in\{1..3\}$), можно записать следующие равенства:

$$\begin{gathered} E^{im} g_{mk} = g^i{}_k \rightarrow \\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\delta^{im}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{00} & g_{0k}\\ g_{m0} & g_{mk}\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix}g^0{}_0 & g^0{}_k\\ -\delta^{im} g_{m0} & -\delta^{im} g_{mk}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g^0{}_0 & g^0{}_k\\ g^i{}_0 & g^i{}_k\end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5}$$

В результате из (4) имеем:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^i{}_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i{}_l}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

Имеем в виду, что при поднятии/опускании пространственного значения индекса знак при элементе тензора меняет свой знак (см. 1).

1. Уравнение движения м.т. в поле связности

При движении м.т. в метрическом пространстве с коэффициентом связности Γ^i_{kl} должно выполняться уравнение геодезической:

$$\begin{gathered} \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{kl} v^k v^l = 0 \rightarrow \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma^i_{kl} v^k v^l. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь v^i – скорость м.т.

Как мы выяснили ранее в (6), коэффициенты связности Γ^i_{kl} в случае слабых метрических полей определяются выражением:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^i{}_k}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i{}_l}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

Здесь метрический тензор выступает в роли некоторого "потенциального" поля, а коэффициенты связности пространства – в роли "силового поля".

Выясним, к чему это приведет с точки зрения классической механики.

2. Изменение скорости (ускорения) по индексу 0

Будем рассматривать уравнение (7) отдельно для индекса $i = 0$ и $i \neq 0$. Для индекса $i = 0$; l, k, m $\in\{1..3\}$ уравнение (7) запишется в виде:

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t}+\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t}-\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0}\right)v^0v^0 + \\ +\left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial r^k}+\frac{\partial g^0{}_k}{\partial t}-\frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0}\right)v^kv^0 + \\ +\left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial r^l}+\frac{\partial g^0{}_l}{\partial t}-\frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0}\right)v^0v^l + \\ +\left(\frac{\partial g^0{}_k}{\partial r^l}+\frac{\partial g^0{}_l}{\partial r^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0}\right)v^kv^l \end{array}\right]_{k,l\in\{1..3\}} = 0\rightarrow \tag{8}$$

Пересоберем элементы уравнения (8):

$$\frac{dv^{i=0}}{dt} = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t}v^0+\frac{\partial g^0{}_0}{\partial r^k}v^k\right)v^0 + \left(\frac{\partial g^0{}_l}{\partial t}v^0+\frac{\partial g^0{}_l}{\partial r^k}v^k\right)v^l\right. \\ \left.+\left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t}v^0+\frac{\partial g^0{}_0}{\partial r^l}v^l\right)v^0 + \left(\frac{\partial g^0{}_k}{\partial t}v^0+\frac{\partial g^0{}_k}{\partial r^l}v^l\right)v^k\right)_{k,l\in\{1..3\}} - \\ -\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0}v^0v^0+\frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0}v^kv^0+\frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0}v^0v^l+\frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0}v^kv^l\right)_{k,l\in\{1..3\}} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{dg^0{}_0}{dq^k}v^kv^0+\frac{dg^0{}_0}{dq^l}v^lv^0+\frac{dg^0{}_l}{dq^k}v^kv^l+\frac{dg^0{}_k}{dq^l}v^lv^k\right)_{k,l\in\{0..3\}} - \\ -\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0}v^0v^0+\frac{\partial g_{k0}v^kv^0}{\partial t_0}+\frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0}v^0v^l+\frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0}v^kv^l\right)_{k,l\in\{1..3\}} \end{array}\right] =$$

$$= -\left(\frac{dg^0{}_0}{dt}v^0+\frac{dg^0{}_k}{dt}v^k\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0}v^0v^0+\frac{\partial g_{k0}v^kv^0}{\partial t_0}+\frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0}v^0v^l+\frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0}v^kv^l\right)_{k,l\in\{1..3\}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0}v^lv^k - \frac{dg^0{}_k}{dt}v^k\right)_{k,l\in\{0..3\}}. \tag{9}$$

Последнюю формулу можно получить непосредственно из (6) и (7) при подстановке $i = 0$ без детального расписывания (8, 9).

3. Изменение скорости (ускорение) по индексам $i \neq 0$

Для индекса $i \in\{1..3\}$, l, k, $m \in\{1..3\}\}$ уравнение (7) запишется в виде:

$$\frac{dv^{i\neq 0}}{dt} = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial t}+\frac{\partial g^i{}_0}{\partial t}-\frac{\partial g_{00}}{\partial r_i}\right)v^0v^0 + \\ +\left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial r^k}+\frac{\partial g^i{}_k}{\partial t}-\frac{\partial g_{k0}}{\partial r_i}\right)v^kv^0 + \\ +\left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial r^l}+\frac{\partial g^i{}_l}{\partial t}-\frac{\partial g_{0l}}{\partial r_i}\right)v^0v^l + \\ +\left(\frac{\partial g^i{}_k}{\partial r^l}+\frac{\partial g^i{}_l}{\partial r^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial r_i}\right)v^kv^l \end{array}\right]. \tag{10}$$

Тривиально (8..10) выполняются при выполнении условия g_{kl} = const = 0 и/или v^i = 0.

4. Метрика волновое галилеева пространства

В галилеевом пространстве возможно применение трех видов метрик : временно́го, пространственного и волнового . " Временна́я" метрика является вырожденной и имеет единственный ненулевой метрический элемент – g_0 или g_{00}. Ее плюсом является ее глобальность. Характер метрики – линейный или билинейный.

"Пространственная" метрика также является вырожденной, имеет ненулевыми диагональные элементы g_{ij}: $i, j \in \{1..3\}$ и не является глобальной: однозначно определена только на 3–плоскости при постоянном значении координаты "время". Глобальные свойства, но с сохранением вырожденности, она имеет, если имеются свойства АСО. Диагональность при этом теряется. Характер метрики – билинейность.

В силу вырожденности "временно́й" и "пространственной" метрик их применение для наших целей проблематично. "Волновая" метрика представляет собой их сумму, является глобальной и не является вырожденной. Характер метрики – билинейность.

Галилеево волновое пространство является ортонормированным только в одной выделенной с.о., которая соответствует АСО, и не может быть ортонормированным в общем случае в силу того, что ее волновой релятивистский "интервал" при галилеевых преобразованиях координат становится не ортонормированным. Это видно из вида волновой метрики в таком пространстве:

$$g^{*'}{}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & -V_{0j} \\ -V_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$g^{*'ij} = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V^{0j} \\ V^{j0} & -\delta^{ij} \end{pmatrix},$$

$$g^{*i}{}_j = g^{*'i}{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $V = V_{0i} = V_{i0}$: $V \in \{-\infty .. +\infty\}$ – скорость сопутствующего АСО галилеева пространства с волновой метрикой. Из (11) также видно, что с.к. при этом остается в 4–мерном представлении равнообъемной. При этом использование ортонормированного пространства остается возможным – но это будет уже не галилеевым, а релятивистским (как минимум – дорелятивистским) пространством.

В качестве модельного волнового пространства со слабым метрическим полем возьмем плоское галилеево пространство, в каждой точке которого определено некоторое локальное волновое АСО с относительной скоростью v от базового и с фундаментальной скоростью, равной 1 (единице). Локальная метрика пространства в с.о., связанной с местной АСО, будет изотропной. Локальная метрика в базовой АСО будет определяться скоростью базовой АСО, равной $-v$, следовательно, локальная метрика произвольной точки пространства в базовой АСО будет определяться как

$$g^{*'}{}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V_{0j} \\ V_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix},$$

$$g^{*'ij} = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & -V_{0j} \\ -V_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$g^{*'i}{}_j = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V^0{}_j \\ -V^i{}_0 & \delta^i_j \end{pmatrix},$$

$$g^{*'}{}_i^{\ j} = \begin{pmatrix} 1-V^2 & -V_0{}^j \\ V_i{}^0 & \delta^i_j \end{pmatrix}.$$

Здесь V^i_0 – скорость новой с.о. в старой. Как видно, член $V_{kl} \equiv 0 \equiv g_{kl}$.

5. Волновое галилеево пространство: i=0

Для галилеева пространства из ($v^0 = 1$) → ($w^0 = 0$). В этом случае уравнение (9) для "скорости" по индексу 0 перепишется в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0} v^l v^k - \frac{d g^0{}_k}{dt} v^k\right)_{k,l\in\{0..3\}} = 0. \tag{10*}$$

или в пересобранном виде с выделением индекса 0 по k, l должно выполняться уравнение (13):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0} v^k + \frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0} v^l + \frac{\partial g_{kl}}{\partial t_0} v^l v^k\right) - \left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t} + \frac{d g^0{}_k}{dt} v^k\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0} v^k + \frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0} v^l\right) - \left(\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t} + \frac{d g^0{}_k}{dt} v^k\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0} v^k + \frac{\partial g_{0l}}{\partial t_0} v^l\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial t_0} + \frac{\partial g^0{}_0}{\partial t} + \frac{d g^0{}_k}{dt} v^k\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0} v^k - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t} + \frac{d g^0{}_k}{dt} v^k\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial g_{k0}}{\partial t_0} v^k - \frac{d g^0{}_k}{dt} v^k = \frac{1}{2}\frac{\partial g^0{}_0}{\partial t}. \tag{13}$$

Подставим значения элементов из (12):

$$\left(\frac{dV^0{}_k}{dt} - \frac{\partial V_{k0}}{\partial t_0}\right) v^k_{\ \ k\in\{1..3\}} = \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t}. \tag{14}$$

Уравнения (14) соответствует закону сохранения энергии классической механики (без учета массы м.т.): работа силы dA равно изменению кинетической энергии dK (или потенциальной энергии $-dU$):

$$dA + dU = \text{const}:$$
$$dA = dK = \left(\frac{dV^0{}_k}{dt} - \frac{\partial V_{k0}}{\partial t_0}\right) v^k dt = \left(\frac{dV^0{}_k}{dt} - \frac{\partial V_{k0}}{\partial t_0}\right) dr^k, \tag{15}$$
$$-dU = \frac{\partial}{\partial t}\frac{V^2}{2} dt.$$

Ускорение (сила) F_i, действующая на м.т., и удельная мощность P поля (источника силы) определяются из (15, 16):

$$F_k dr^k = P dt, \tag{16}$$

6. Волновое галилеево пространство: i≠0

Для галилеева пространства для нашей модели $v^0 = 1$, $g_{ik} = 0$. В этом случае уравнение (10) для индекса $i \neq 0$ перепишется в следующем виде:

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial t} + \frac{\partial g^i{}_0}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial r_i}\right) + \\ + \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial r^k} + \frac{\partial g^i{}_k}{\partial t} - \frac{\partial g_{k0}}{\partial r_i}\right) v^k + \\ + \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial r^l} + \frac{\partial g^i{}_l}{\partial t} - \frac{\partial g_{0l}}{\partial r_i}\right) v^l + \\ + \left(\frac{\partial g^i{}_k}{\partial r^l} + \frac{\partial g^i{}_l}{\partial r^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial r_i}\right) v^k v^l \end{bmatrix} \to - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial r_i}\right) + \\ + \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial r^k} - \frac{\partial g_{k0}}{\partial r_i}\right) v^k \end{bmatrix} \to \tag{10*}$$

Окончательно:

$$\frac{dv^i}{dt} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial r_i} - \frac{\partial g^i{}_0}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial g^i{}_0}{\partial r^k} - \frac{\partial g_{k0}}{\partial r_i}\right) v^k. \tag{17}$$

Локальная волновая метрика метрического поля в галилеевом пространстве изменяется в соответствии с уравнением:

$$\begin{gathered} g^{*'}{}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V_{0j} \\ V_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \\ g^{*'i}{}_j = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V^0{}_j \\ -V^i{}_0 & \delta^i_j \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{12*}$$

Подставляя элементы этого уравнения в (17), имеем:

$$\frac{dv^i}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial V^i{}_0}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial V^i{}_0}{\partial r^k} - \frac{\partial V}{\partial r_i}\right) v^k. \tag{18}$$

Если член $v^2/2$ обозначим через φ^0, то (18) запишется в следующем виде:

$$\frac{dv^i}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial r_i} - \frac{\partial V^i{}_0}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial V^i{}_0}{\partial r^k} - \frac{\partial V_{k0}}{\partial r_i}\right) v^k. \tag{19}$$

Сравнивая (19) с напряженностью векторного потенциального поля $A^i \to A^i_j$, можно сделать вывод о соответствии их элементам слабого метрического поля g_{ij}, а также самого векторного потенциального поля A^i с полем кинетической энергии и скоростей объемов с.с.:

$$g^*{}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - V^2 & V_{0j} \\ V_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \to A^i = \left(\frac{V^2}{2}, v_{(0)}{}^i\right). \tag{20}$$

Хочу предостеречь читателей от именно этой однозначной интерпретации векторного потенциального поля A^i со скоростью $V^i_{(0)}$ местной АСО и метрическим полем g_{ij}: это всего лишь модельная интерпретация. Такой вывод можно делать, только если элементы поля $A^i{}_0$, $V^i_{(0)}$ и $g^i{}_0$ отождествлены. Думаю, возможны другие "векторно–тензорно–полевые" интерпретации. Также хочу предостеречь читателей от мысли о том, что рассматриваемое выше галилеево пространство является реальным физическим пространством. В данной работе это просто модельное пространство. Реальное физическое пространство должно соответствовать реальным физическим эталонам, а они могут не соответствовать галилеевым. Возможными кандидатами могут быть релятивистские пространства (СТО, ОТО), которым полностью соответствуют электромагнитные эталоны. В области малых скоростей и полей вполне возможно использование галилеевого пространства, при больших скоростях – СТО, а при больших полях – ОТО. В области малых времен и расстояний – квантованные пространства и поля.

В уравнении (19) имеется три члена, влияющих на движение м.т.

- Первый член соответствует половине квадрата скорости $V^i_{(0)}$ местной сопутствующей АСО в некоторой заранее выбранной в качестве "исходной", "первоначальной", "покоящейся" "глобальной" АСО. По аналогии с потенциальным полем φ в ньютоновой механике, этот член, равный половине квадрата скорости локальной АСО, можно считать "скалярным" потенциальным силовым полем, соответствующее скорости $V^i_{(0)}$ местной сопутствующей АСО. Возможно, аналог "скалярного" потенциала метрического (гравитационного) поля.

- Второй член, равный частной производной $V^i_{(0)}$ по времени, соответствует напряженности некоторого "векторного" потенциального поля, соответствующее скорости $V^i_{(0)}$ местной сопутствующей АСО. Возможно, аналог "векторного" потенциала метрического поля.

- Третий член уже зависит от скорости м.т. и задает изменение скорости от "вихревого" составляющей поля от той же скорости $V^i_{(0)}$ местной сопутствующей АСО. Возможно, аналог "вихревого" потенциала метрического поля.

7. Выводы.

- Эти уравнения говорят о том, что слабое гравитационное поле φ, открытое Ньютоном, может интерпретироваться в галилеевом волновом пространстве чисто геометрически как элемент g_{00} 4–мерного метрического поля пространства–времени.

- Пространственные элементы g_{0j} и g_{i0} метрического поля могут интерпретироваться в галилеевом пространстве как векторное потенциальное поле G_i 3–мерного пространства. Ускорение м.т. за счет этой составляющей метрического поля имеет первый порядок малости. Она геометрически интерпретируется как скорость локального АСО, зависящее от координаты привязки этого локального АСО к пространству–времени.

- Ускорение м.т. за счет пространственной метрики g_{kl} будет нулевым в силу равенства ее нулю.

- Несмотря на наличие "скалярного", "векторного" и "вихревого" потенциалов, метрическое поле не является электрическим полем. Тем более, что векторное электромагнитное поле – это векторное поле, а элементы "векторного" метрического поля являются элементами тензора ранга 2.