Galilean transformations of tenzors

Valery Timin

(July 2019)

Russia

This paper deals with the orthonormal transformation of the tensors of the 4-dimensional Galilean space. Such transformations are transformations of rotation and transition to a moving coordinate system. Formulas and matrices of these transformations are given.

The transition from one coordinate system to another, moving relative to the first, did long before the theory of relativity. The natural space for "transitions from one coordinate system to another" is the Galilean space. It is the space of classical mechanics. This paper focuses on the 4-dimensional interpretation of such transformations.

В данной работе рассмотрены вопросы ортонормированного преобразования тензоров 4-мерного галилеева пространства. Такими преобразованиями являются преобразования поворота и перехода в движущуюся систему координат. Даны формулы и матрицы этих преобразований.

Галилеевы преобразования тензоров

Переход от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой, делали задолго до появления теории относительности. Естественным пространством для "переходов от одной системы координат к другой" является галилеево пространство. Именно оно является пространством классической механики. В данной работе сделан упор на 4-мерной интерпретации таких преобразований.

1. Преобразования галилеевых тензоров ранга 2

Рассмотрим галилеевы преобразования тензоров ранга 2 как произведения преобразованных соответствующих типов (ковариантного или контравариантного) векторов A_i, A^i, B_j или B^j:

$$A'^{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^{i}{}_{0} & \omega^{j}{}_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{0} \\ \omega^{j}{}_{n} A^{n} - v^{i}{}_{0} A^{0} \end{pmatrix}.$$
$$A'_{i} = \begin{pmatrix} 1 & v_{0}{}^{n} \\ 0 & \omega_{i}{}^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0} \\ A_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0} + v_{0}{}^{n} A_{n} \\ \omega_{i}{}^{n} A_{n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$B'^{j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^{j}{}_{0} & \omega^{j}{}_{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{0} \\ B^{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{0} \\ \omega^{j}{}_{m} B^{m} - v^{j}{}_{0} B^{0} \end{pmatrix}.$$
$$B'_{j} = \begin{pmatrix} 1 & v_{0}{}^{m} \\ 0 & \omega_{j}{}^{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0} \\ B_{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{0} + v_{0}{}^{m} B_{m} \\ \omega_{j}{}^{m} B_{m} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Преобразования контравариантных тензоров ранга 2

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 $C^{ij} = A^i A^j$ при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C^{ij} \Leftrightarrow (g^i{}_n A^n)\,(g^j{}_m A^m) = A'^i B'^j \to C'^{ij}. \tag{3}$$

Проведем это преобразование как произведение двух преобразованных контравариантных векторов:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}.$$
$$B'^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^j{}_0 & \omega^j{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 \\ \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$A'^i B'^j = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 & \omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A^0 B^0 & A^0\left(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0\right) \\ \left(\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0\right) B^0 & \left(\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0\right)\left(\omega^j{}_m B^m - v^j{}_0 B^0\right) \end{pmatrix} = \tag{5}$$
$$= \begin{pmatrix} A^0 B^0 & A^0 \omega^j{}_n B^m - A^0 v^j{}_0 B^0 \\ \omega^i{}_n A^n B^0 - v^i{}_0 A^0 B^0 & \omega^i{}_n A^n \omega^j{}_m B^m - \omega^i{}_n A^n v^j{}_0 B^0 + v^i{}_0 A^0 v^j{}_0 B^0 - v^i{}_0 A^0 \omega^j{}_m B^m \end{pmatrix}.$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование контравариантного тензора:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^j{}_n A^{0m} - v^j{}_0 A^{00} \\ \omega^i{}_n A^{n0} - v^i{}_0 A^{00} & \omega^i{}_n \omega^j{}_m A^{nm} - \left(\omega^i{}_n v^j{}_0 A^{n0} + v^i{}_0 \omega^j{}_n A^{0m}\right) + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из (6) видно, что "временная" часть тензора A^{00} при ГПТК не изменяется. При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (6) запишется в более упрощенном виде:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^j{}_n A^{0m} - v^j{}_0 A^{00} \\ \omega^i{}_n A^{n0} - v^i{}_0 A^{00} & \omega^i{}_n \omega^j{}_m A^{nm} - \omega^i{}_n v^j{}_0 A^{n0} - v^i{}_0 \omega^j{}_n A^{0m} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование еще упростится:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{0j} - v^j{}_0 A^{00} \\ A^{i0} - v^i{}_0 A^{00} & A^{ij} - \left(v^j{}_0 A^{i0} + v^i{}_0 A^{0j}\right) + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

При антисимметричной смешанной части формула еще более упрощается:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{0j} - v^j{}_0 A^{00} \\ A^{i0} - v^i{}_0 A^{00} & A^{ij} + v^i{}_0 v^j{}_0 A^{00} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

В общем случае насчет галилеева преобразования контравариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и/или антисимметричности.

При наличии только вращения пространственных координат ($v^i{}_0 = 0$) пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \omega^{j}{}_{n}A^{0m} \\ \omega^{j}{}_{n}A^{n0} & \omega^{j}{}_{n}\omega^{j}{}_{m}A^{nm} \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Следствия.

1). Пространственный тензор (в т.ч. метрический) сохраняет свою структуру:

$$A'^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{ij} \end{pmatrix} \to A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{ij} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

2). Временной тензор (в т.ч. метрический) существенно изменяется:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} g^{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} g^{00} & -v^{j}{}_{0}A^{00} \\ -v^{i}{}_{0}A^{00} & v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0}A^{00} \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (7.1) запишется в несколько упрощенном виде:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} g^{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} g^{00} & -v^{j}{}_{0}A^{00} \\ -v^{i}{}_{0}A^{00} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

3). Единичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$\begin{gathered} A'^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & -v^{j}{}_{0}A^{00} \\ -v^{i}{}_{0}A^{00} & A^{ij} + v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0}A^{00} \end{pmatrix}. \\ g'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -v^{j}{}_{0} \\ -v^{i}{}_{0} & E^{ij} + v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{7.4}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве евклидова и псевдометрики, определенные в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяют значения своих элементов. Но это не означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о. Это всего лишь преобразование определенного "единичного диагонального" тензора:

$$g'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -v^{j}{}_{0} \\ -v^{i}{}_{0} & E^{ij} + v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0} \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

4). Псевдоединичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру, кроме своей симметрии:

$$g'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -v^{j}{}_{0} \\ -v^{i}{}_{0} & -E^{ij} + v^{i}{}_{0}v^{j}{}_{0} \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов. Замечание то же.

3. *Преобразования ковариантных тензоров ранга 2*

В тензорных обозначениях контравариантный тензор ранга 2 A_{ij} при смене системы отсчета преобразуется следующим образом:

$$C'_{i\,j} \Leftrightarrow (g_i{}^n A_n)\,(g_i{}^m B_m) \ = A'_i B'_j \rightarrow C'_{i\,j}. \tag{8.1}$$

Проведем это преобразование как произведение двух ковариантных векторов:

$$\begin{gathered} A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^n \\ 0 & \omega_i{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix}. \\ B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ 0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$\begin{gathered} A'_i B'_j = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & B_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A_0 + v_0{}^n A_n \\ \omega_i{}^n A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m & \omega^m{}_j B_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (A_0 + v_0{}^n A_n)(B_0 + v_0{}^m B_m) & (A_0 + v_0{}^n A_n)\omega_j{}^m B_m \\ \omega_i{}^n A_n (B_0 + v_0{}^m B_m) & \omega_i{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A_0 B_0 + v_0{}^n A_n B_0 + A_0 v_0{}^m B_m + v_0{}^n A_n v_0{}^m B_m & A_0 \omega_j{}^m B_j + v_0{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \\ \omega_i{}^n A_n B_0 + \omega_i{}^n A_n v_0{}^m B_m & \omega_i{}^n A_n \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} = \end{gathered} \tag{9}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование ковариантного тензора:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m} + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_j{}^m A_{0m} + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ \omega_i{}^n A_{n0} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (10) запишется в несколько упрощенном виде:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m} & \omega_j{}^m A_{0m} + v_0{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \\ \omega_i{}^n A_{n0} + \omega_i{}^n v_0{}^m A_{nm} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Если нет поворота с.о., то преобразование еще упростится:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + (v_0{}^n A_{n0} + v_0{}^m A_{0m}) + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & A_{0j} + v_0{}^n A_{nj} \\ A_{i0} + v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

Из (10.2) видно, что пространственная часть A_{ij} тензора при ГПТК без поворота не изменяется, а остальные изменяются.

При наличии только вращения пространственных координат ($v^i_0 = 0$) пространственно-временные (смешанные) элементы получают одинарное вращение, а пространственная часть тензора получает двойное вращение:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} & \omega_j{}^m A_{0m} \\ \omega_i{}^n A_{n0} & \omega_i{}^n \omega_j{}^m A_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

При антисимметричной смешанной части формула упрощается:

$$C'_{ij} = \begin{pmatrix} A_{00} + v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & A_{0j} + v_0{}^n A_{nj} \\ A_{i0} + v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

В общем случае насчет галилеева преобразования ковариантного тензора можно сказать, что она не теряет свойство симметричности и/или антисимметричности.

Следствия:

1). Метрический временной тензор не изменяется:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

2). Пространственный тензор не сохраняет свою структуру:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \to A'_{ij} = \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m A_{nm} & v_0{}^n A_{nj} \\ v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (11.3) запишется в несколько упрощенном виде:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \to A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & v_0{}^n A_{nj} \\ v_0{}^m A_{im} & A_{ij} \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

3). Метрический пространственный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$\begin{gathered} g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm E_{ij} \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \pm \begin{pmatrix} v_0{}^n v_0{}^m E_{nm} & v_0{}^n E_{nj} \\ v_0{}^m E_{im} & E_{ij} \end{pmatrix} = \\ = \pm \begin{pmatrix} v_0{}^n v_{0n} & v_{0j} \\ v_{i0} & E_{ij} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & E_{ij} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{11.4}$$

Соответственно, при ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (11.4) также запишется в более упрощенном виде:

$$g_{ij} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \to g'_{ij} = \pm \begin{pmatrix} 0 & v_{0j} \\ v_{i0} & E_{ij} \end{pmatrix}. \tag{11.5}$$

4). Единичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру:

$$\begin{gathered} g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + v_0{}^n v_0{}^m E_{nm} & +v_0{}^n E_{nj} \\ +E_{im} v_0{}^m & +E_{nm} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & v_{0j} \\ v_{i0} & E_{ij} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{11.6}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов, что означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о.

5). Псевдоединичный диагональный ковариантный тензор также не сохраняет свою структуру, кроме своей симметрии:

$$\begin{gathered} g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - v_0{}^n v_0{}^m E_{nm} & -v_0{}^n E_{nj} \\ -E_{im} v_0{}^m & -E_{ij} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & -v_{0j} \\ -v_{i0} & -E_{ij} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{11.6}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов, что означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о.

4. Преобразования смешанных тензоров $C^i{}_j$

$$C'^i{}_j \Leftrightarrow (g^j{}_n A^n)\,(g_i{}^m B_m) = A'^i B'_j \rightarrow C'_i{}^j. \tag{12}$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

$$\begin{gathered} A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^j{}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \\ B'_j = \begin{pmatrix} 1 & v_0{}^m \\ 0 & \omega_j{}^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 + v_0{}^m B_m \\ \omega_j{}^m B_m \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{13}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$\begin{gathered} C'^i{}_j = A'^i B'_j = \begin{pmatrix} A^0 \\ \omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}(B_0 + v_0{}^m B_m \quad \omega_j{}^m B_m) = \\ = \begin{pmatrix} A^0(B_0 + v_0{}^m B_m) & A^0 \omega_j{}^m B_m \\ (\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0)(B_0 + v_0{}^m B_m) & (\omega^i{}_n A^n - v^i{}_0 A^0)\omega_j{}^m B_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (A^0 B_0 + v_0{}^m A^0 B_m) & A^0 \omega_j{}^m B_m \\ \omega^i{}_n A^n B_0 - v^i{}_0 v_0{}^m A^0 B_m - v^i{}_0 A^0 B_0 + \omega^i{}_n A^n v_0{}^m B_m & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n B_m - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0 B_m \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{14}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + v_0{}^m A^0{}_m & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 + \omega^i{}_n v_0{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0{}_m \end{pmatrix}. \tag{15}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (15) запишется в несколько упрощенном виде:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + v_0{}^m A^0{}_m & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 - v^i{}_0 A^0{}_0 + \omega^i{}_n v_0{}^m A^n{}_m & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m - v^i{}_0 \omega_j{}^m A^0{}_m \end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'^i = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & \omega_j{}^m A^0{}_m \\ \omega^i{}_n A^n{}_0 & \omega^i{}_n \omega_j{}^m A^n{}_m \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора элемент $A^0{}_j$ не изменяется:

$$C'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 + v_0{}^m A^0{}_m & A^0{}_j \\ A^i{}_0 - (v^i{}_0 A^0{}_0 - v_0{}^m A^i{}_m) - v^i{}_0 v_0{}^m A^0{}_m & A^i{}_j - v^i{}_0 A^0{}_j \end{pmatrix}. \tag{15.3}$$

Если оба тензора являются тензорами преобразования координат ($A^0{}_0 = 1$, $A^0{}_j = 0$),то имеем:

$$C'^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ A^{i}{}_{0}-v^{i}{}_{0} & A^{i}{}_{j}\end{pmatrix}. \tag{15.4}$$

По сути это закон сложения скоростей. Если тензор является единичным тензором преобразования координат ($A^i_j = E^i_j$),то имеем:

$$C'^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -v^{i}{}_{0} & E^{i}{}_{j}\end{pmatrix}. \tag{15.5}$$

Следствия:

1). Метрический временной смешанный тензор изменяется:

$$g^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}A^{0}{}_{0} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow g'_{ij}=\begin{pmatrix}A^{0}{}_{0} & 0\\ -v^{i}{}_{0}A^{0}{}_{0} & A^{i}{}_{j}\end{pmatrix}. \tag{16.1}$$

2). Пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$C^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A^{i}{}_{j}\end{pmatrix}\rightarrow C'^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ v_{0}{}^{m}A^{i}{}_{m} & A_{ij}\end{pmatrix}. \tag{16.2}$$

3). Метрический пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$g^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{ij}\end{pmatrix}\rightarrow g'^{i}{}_{j}=\pm\begin{pmatrix}0 & 0\\ v_{0}{}^{m}E^{i}{}_{m} & E^{i}{}_{j}\end{pmatrix}. \tag{16.3}$$

4). Единичный диагональный смешанный тензор сохраняет свою структуру:

$$E'^{i}{}_{j}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -v^{i}{}_{0}+v_{0}{}^{i} & E^{i}{}_{j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & E^{i}{}_{j}\end{pmatrix}=E. \tag{16.4}$$

5. Преобразования смешанных тензоров $C_i{}^j$

$$C'_i{}^j \Leftrightarrow (g_i{}^m A_m)\,(g^j{}_n B^n) = A'_i B'^j. \tag{17.1}$$

где $g^j{}_n$ и $g_i{}^m$ – взаимно обратные галилеевы преобразования соответственно для контравариантного и ковариантного векторов.

$$\begin{gathered}A'_{i}=\begin{pmatrix}1 & v_{0}{}^{n}\\ 0 & \omega_{i}{}^{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{0}\\ A_{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{0}+v_{0}{}^{n}A_{n}\\ \omega_{i}{}^{n}A_{n}\end{pmatrix}.\\ B'^{j}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -v^{j}{}_{0} & \omega^{j}{}_{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B^{0}\\ B^{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{0}\\ \omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{17.2}$$

Умножим эти два вектора друг на друга:

$$\begin{gathered}C'_{i}{}^{j}=A'_{i}B'^{j}=\begin{pmatrix}A_{0}+v_{0}{}^{n}A_{n}\\ \omega_{i}{}^{n}A_{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B^{0} & \omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}(A_{0}+v_{0}{}^{n}A_{n})B^{0} & (A_{0}+v_{0}{}^{n}A_{n})\left(\omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\right)\\ \omega_{i}{}^{n}A_{n}B^{0} & \omega_{i}{}^{n}A_{n}\left(\omega^{j}{}_{m}B^{m}-v^{j}{}_{0}B^{0}\right)\end{pmatrix}=\\ =\begin{pmatrix}A_{0}B^{0}+v_{0}{}^{n}A_{n}B^{0} & \omega^{j}{}_{m}A_{0}B^{m}-v^{j}{}_{0}A_{0}B^{0}+v_{0}{}^{n}A_{n}\,\omega^{j}{}_{m}B^{m}-v_{0}{}^{n}A_{n}v^{j}{}_{0}B^{0}\\ \omega_{i}{}^{n}A_{n}B^{0} & \omega_{i}{}^{n}A_{n}\,\omega^{j}{}_{m}B^{m}-\omega_{i}{}^{n}A_{n}v^{j}{}_{0}B^{0}\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{18}$$

Переведем этот результат по аналогии на преобразование смешанного тензора:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

При ограничении преобразований очень малыми скоростями, преобразование (19) запишется в несколько упрощенном виде:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m - \omega_i{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \end{pmatrix}. \tag{19.1}$$

При наличии только вращения для смешанного тензора формула преобразования значительно упрощается:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & \omega^j{}_m A_0{}^m \\ \omega_i{}^n A_n{}^0 & \omega_i{}^n \omega^j{}_m A_n{}^m \end{pmatrix}. \tag{19.2}$$

При наличии только галилеевых преобразований смешанного тензора элемент A_i^0 не изменяется:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ A_i{}^0 & A_i{}^j - A_i{}^0 v^j{}_0 \end{pmatrix}. \tag{19.3}$$

Если оба тензора являются тензорами преобразования координат ($A_0{}^0 = 1$, $A_i{}^0 = 0$),то имеем:

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} 1 & A_0{}^j + v_0{}^j \\ 0 & A_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{19.4}$$

По сути это закон сложения скоростей.

Следствия:

1). Метрический временной смешанный тензор изменяется:

$$g_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow g'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 & -v^j{}_0 A_0{}^0 \\ 0 & A_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{20.1}$$

$$C'_i{}^j = \begin{pmatrix} A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^0 & A_0{}^j - v^j{}_0 A_0{}^0 + v_0{}^n A_n{}^j - v_0{}^n v^j{}_0 A_n{}^0 \\ A_i{}^0 & A_i{}^j - A_i{}^0 v^j{}_0 \end{pmatrix}.$$

2). Пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$C^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^i{}_j \end{pmatrix} \rightarrow C'^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & v_0{}^n A_n{}^j \\ 0 & A_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{20.2}$$

3). Метрический пространственный смешанный тензор не сохраняет свою структуру:

$$g^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_i{}^j \end{pmatrix} \rightarrow g'^i{}_j = \pm \begin{pmatrix} 0 & v_0{}^j \\ 0 & E_i{}^j \end{pmatrix}. \tag{20.3}$$

4). Единичный диагональный смешанный тензор сохраняет свою структуру:

$$E'{}_i{}^j = \begin{pmatrix} 1 & -v^j{}_0 + v_0{}^j \\ 0 & E^i{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E^i{}_j \end{pmatrix} = E. \tag{20.4}$$