Coordinate transformations of the Euclidean space

Valery Timin

(July 2019)

Russia

This paper deals with the orthonormal transformation of the coordinates of the 3-dimensional Euclidean space. These transformations are displacement and rotation transformations. Formulas and matrices of these transformations are given.

В данной работе рассмотрены вопросы ортонормированного преобразования координат 3-мерного евклидова пространства. Такими преобразованиями являются преобразования смещения и поворота. Даны формулы и матрицы этих преобразований.

Преобразования координат евклидова пространства

Пространством евклидовым (ГП) назовем 3-мерное (в общем случае – *n*-мерное) ортонормированное аффинное пространство, представляющее собой пространство P_3 с вещественным координатным представлением (r^1, r^2, r^3). Количество измерений "пространства" может быть и более 3-х. Общим координатным представлением является представление в векторной форме $r^i = (r^1, r^2, r^3)$.

Преобразование пространственных координат r^i определяется функцией от 3-х координат $\{r^1, r^1, r^3\}$:

$$r'^i = r'^i(r^1, r^2, r^3). \tag{1.1}$$

Аффинность означает, что координаты могут преобразовываться только линейно.

$$r'^i = \omega^i_j r^j - r^i_{(0)}. \tag{1.2}$$

Здесь ω^i_j – тензор линейного преобразования координат.

$r^i_{(0)}$ (и далее) – смещение новой с.о. относительно старой. Знак "минус" при ней означает направление смещения исходной с.о. относительно новой,

Ортонормированность означает, что оси координат взаимно перпендикулярны и длина единицы каждой оси нормирована и равна единице длины, предполагается – эталона длины. Это условие ограничивает множество аффинных преобразований координат смещениями начала координат и поворотами.

1. Преобразования координат 3-мерные

Евклидовы преобразования применяются по отношению к координатам, векторам и другим тензорам в евклидовом пространстве. В этом пространстве мы будем рассматривать только ортонормированные линейные преобразования координат (см. выше – аффинность и ортонормированность).

Рассмотрим преобразования 3–мерных евклидовых координат при преобразованиях тензоров и координат (ПТК), удовлетворяющих этим условиям.

1. Трансляция координат:

$$r'^{i} = r^{i} - r^{i}_{(0)}. \tag{2.1}$$

Обратные преобразования осуществляются формулами

$$r^{i} = r'^{i} + r^{i}_{(0)}. \tag{2.2}$$

Но если учесть, что обратное преобразование осуществляется в обратном направлении, то в (2.2) перед $r^{i}_{(0)}$ нужно оставить прежний знак. Но при этом необходимо смещение $r^{i}_{(0)}$ проштриховать:

$$r^{i} = r'^{i} - r'^{i}_{(0)}. \tag{2.3}$$

При этом необходимо иметь ввиду, что само преобразование смещения происходит в обратном направлении.

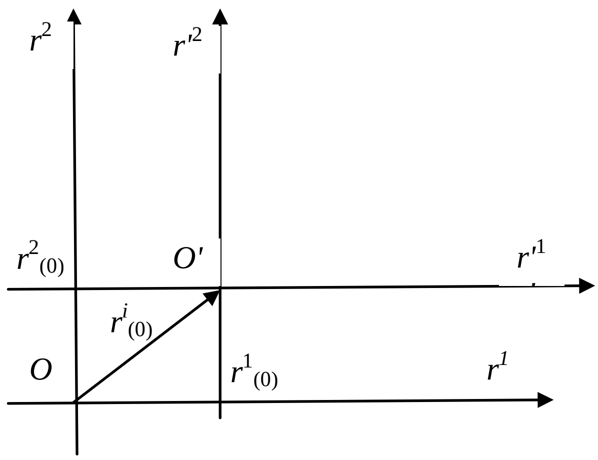

Рис. 1. Схематическое изображение преобразования трансляции осей координат.

Это преобразование не является тензорным, потому что любой вектор r подобным преобразованием можно обнулить. Это – преобразования аффинного пространства. Но при этом его дифференциал является тензором:

$$dr'^{i} = dr^{i}. \tag{2.4}$$

2. Линейные преобразования поворота пространственных координат, соответствующие ГПТК, соответствующие повороту пространственных координат относительно начала координат:

$$r'^{i} = \omega^{i}_{j} r^{j}. \tag{3.1}$$

Здесь ω^{i}_{j} (и далее) – тензор поворота новой с.о. относительно старой, за положительное направление поворота принимается последовательность $r^1 \to r^2 \to r^3 \to r^1$.

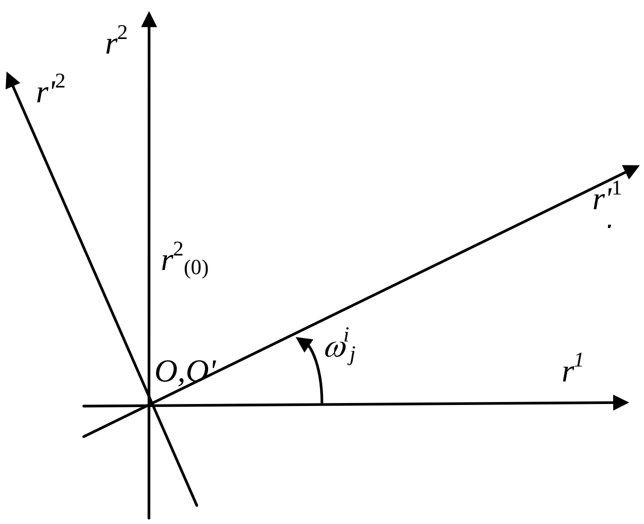

Рис. 2. Схематическое изображение преобразования поворота осей координат.

Знаки элементов ω^j_j выбираются для положительного направления поворота исходной с.о. относительно старой.

Обратные преобразования осуществляются формулами

$$r^i = \omega{*}^i{}_j r'^{\,j}. \tag{3.2}$$

где $\omega{*}^i{}_j$ – транспонированная по отношению к ω^j_j матрица. Значения элементов этих тензоров совпадают, но – не диагональные элементы имеют противоположные знаки. Но если учесть, что обратное преобразование осуществляется в обратном направлении, то в (3.2) перед $\omega^{\mathrm{j}}_{\mathrm{j}}$ для ковариантности выражения нужно оставить прежний знак. Но при этом необходимо смещение ω^j_j проштриховать:

$$r^i = \omega'^i{}_j r'^{\,j}. \tag{3.3}$$

При этом также необходимо иметь ввиду, что само преобразование поворота происходит в обратном направлении, и, само собой, тензор поворота уже должен быть инвертированным..

3. Преобразования инверсии определяют изменение направления координатных линий и относятся к дискретным.

$$r'^i = \pm r^i. \tag{4}$$

Инверсия – это в каком-то смысле операция "сопряжения": одному исходному элементу сопоставляется другой. Частичная инверсия по определенным направлениям называется отражением.

Обратные преобразования осуществляются этими же формулами.

3.1. В обобщенном виде преобразования с 1 по 3 записываются формулами (5) и (6). Здесь возможны два случая, и это связано с не коммутативностью выполнения операции смещения и поворота. В случае "сначала смещение, потом поворот" формула преобразования координат запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} r'^i = \omega^j_j\,(r^{\,j} - r^j{}_{(0)}), \\ (r''^i = r^{\,j} - r^j{}_{(0)}). \end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь r''^i (и далее) – промежуточная с.к., полученная смещением с.к. на $r^j_{(0)}$.

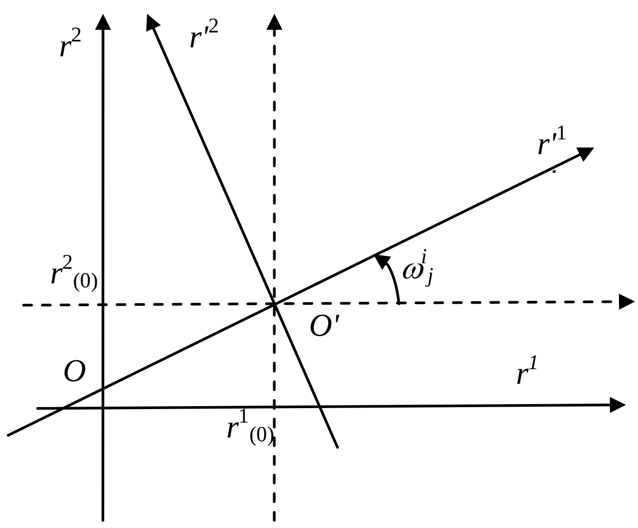

Рис. 3. Схематическое изображение обобщенного (смещение + поворот) преобразования осей координат.

Здесь r^j_0 – начальное смещение новой с.к. Формула (8) соответствует формуле (7.2).

$$r^i = \omega'^i_j\, r^j - r'^j_{(0)},$$
$$(r''^i = \omega'^{i'}_j r'^j). \tag{5.2}$$

Здесь можно заметить, что при обратном преобразовании исчезли скобки.

3.2. В случае "сначала поворот, потом смещение " формула преобразования координат запишется следующим образом:

$$r'^i = \omega^i_j\, r^j - r^j_{(0)},$$
$$(r''^i = \omega'^i_j\, r^j). \tag{6.1}$$

Здесь r''^i (и далее) – промежуточная с.к., полученная поворотом с.к. на угол ω^j_j. Обратная операция осуществляется по формулам

$$r^i = \omega'^i_j\,(r'^j - r'^j_{(0)}),$$
$$(r''^i = r'^j - r'^j_{(0)}). \tag{6.2}$$

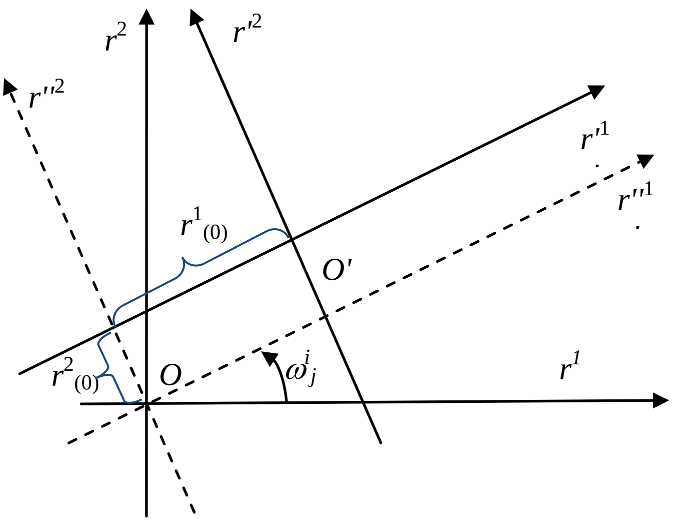

Рис. 4. Схематическое изображение обобщенного (поворот + смещение) преобразования осей координат.

3.3. Для преобразований координат в обобщенном виде с начальным смещением (сначала поворот, затем смещение) в смешанной тензорно-матричной форме можно применить следующие формулы, написанные в 4-мерной форме. Дополнительная координата при этом может иметь только одно значение - единица:

$$r'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r^i_{(0)} & \omega^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^i_j r^j - r^i_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Здесь $r^j_{(0)}$ – начальное смещение новой с.к. Формула (7.1) соответствует формуле (6.2) и рис.4. Обратная операция (сначала смещение, затем поворот) осуществляется по формулам

$$r^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega'^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r'^j - r'^j_{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega'^i_j (r'^j - r'^j_{(0)}) \end{pmatrix}. \tag{7.2.1}$$

или

$$r^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega'^i_j r'^j_{(0)} & \omega'^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r'^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega'^i_j (r'^j - r'^j_{(0)}) \end{pmatrix}. \tag{7.2.2}$$

и соответствует формуле (6.1) и рис.3 "поворот смещенной к.с.". Как видно, два способа – (5) и (6) – взаимно обратны друг к другу. Но также видно, что эти два способа не ковариантны по отношению друг к другу.

3.4. Векторы евклидова пространства в 4-мерной форме отличаются от векторов в 3-мерной форме только наличием еще одной, дополнительной, координаты, имеющей значение 0:

$$(r^i) \to (0, r^i).$$

В качестве индекса этого дополнительного элемента вектора в евклидовом пространстве можно взять индекс 0.

В галилеевом и других псевдоевклидовых пространств индекс 0 занят координатой "время", поэтому альтернативами являются значения "4" или "s", и для наглядности записей тензоров можно элементы с этим индексом записывать до всех других элементов с другими индексами, как будто это индекс "-1".

Для "нормальных" тензоров произвольного порядка все элементы, включающие в себя этот индекс, должны быть равны 0. Но теоретически допустимы тензоры, у которых значения этих элементов будут константами. Их природа и полезность требуют дополнительного рассмотрения и обоснования.

2. *Преобразования координат как 4-вектора*

Ранее на вопрос "являются ли координаты тензорами"? мы ответили отрицательно и назвали причину этого: любое смещение начала отсчета координат придает нулевому исходному значению координат ненулевое значение, равное смещению. Для избавления от этого недостатка имеется известный способ – добавление еще одной, дополнительной 4-ой координаты "s", которая принимает единственное, равное единице, значение. В таком 4-мерном пространстве 3-мерное пространство представляется 3-мерный "подпространством" с фиксированным значением координаты в 5-ом измерении, равным "1". Тогда любая точка 4-пространства будет определяться координатами $(1, r^1, r^2, r^3)$, и любой пространственный вектор не сможет иметь нулевое значение всех координат. Соответственно изменится и тензор преобразования координат. Точка начала координат при этом будет иметь координаты (1,0,0,0). Следовательно, при любых преобразованиях координат любой пространственный вектор будет оставаться ненулевым вектором.

Для преобразований координат в обобщенном 4-мерном виде с начальным смещением в смешанной тензорно-матричной форме можно применить следующие формулы. Дополнительная координата при этом может иметь только одно значение – единица. По алгоритму "сначала поворот, затем смещение " производится по формуле:

$$r'^i == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -{r_{(0)}}^i & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^i_j r^j - {r_{(0)}}^i \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Обратная к (8.1) операция осуществляется по формулам (сначала смещение с переходом в ИСО, потом поворот):

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^i{}_j {r_{(0)}}^j & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^i_j \left(r^j - {r_{(0)}}^i\right) \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Как видно, два способа – (8.1) и (8.2) – взаимно обратны друг к другу. Но также видно, что эти два способа не ковариантны по отношению друг к другу из-за не коммутативности композиции этих операции.

Векторы галилеева пространства в 5-мерной форме отличаются от векторов в 4-мерной форме только наличием еще одной, дополнительной, координаты, имеющей значение 0:

$$(q^i) \to (0, q^i).$$

В качестве индекса этого дополнительного элемента вектора в евклидовом пространстве можно взять индекс 4. Представление галилеева пространства в 5-мерном виде переводит смещение 4-координат в тензорный вид

В галилеевом и других псевдоевклидовых пространств индекс 0 занят координатой "время", поэтому альтернативами являются значения "4" или "s", и для наглядности записей тензоров можно элементы с этим индексом записывать до всех других элементов с другими индексами, как будто это индекс "-1".

Для "нормальных" тензоров произвольного порядка все элементы, включающие в себя этот индекс, должны быть равны 0. Но теоретически допустимы тензоры, у которых значения этих элементов будут константами или даже переменными. Их природа и полезность требуют дополнительного рассмотрения и обоснования.

3. Матрица поворота в двумерном пространстве

В двумерном пространстве поворот можно описать одним углом θ со следующей матрицей линейного преобразования в декартовой системе координат:

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Поворот выполняется путём умножения матрицы поворота на вектор-столбец, описывающий вращаемую точку:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Координаты (x',y') в результате поворота точки (x, y) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta \mp y\sin\theta \\ \pm x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Конкретные знаки в формулах зависят от того, является ли система координат правосторонней или левосторонней, и выполняется ли поворот по или против часовой стрелки. Верхний знак указан для обычного соглашения: правосторонняя система координат и положительное направление поворота против часовой стрелки (тот же знак верен для левосторонней координатной системы при выборе положительного направления поворота по часовой стрелке; в оставшихся двух комбинациях - нижний знак).

4. Матрица поворота в 3-мерном пространстве

Любой поворот в трехмерном пространстве может быть представлено как композиция поворотов вокруг трех ортогональных осей (например, вокруг осей декартовых координат). Этой композиции соответствует матрица, равная произведению соответствующих трех матриц поворота.

Матрицами поворота вокруг оси декартовой системы координат на угол θ вокруг осей x, y, z в трёхмерном пространстве являются:

Поворот вокруг оси x:

$$M_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Поворот вокруг оси y:

$$M_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Поворот вокруг оси z:

$$M_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.3}$$

Положительным углам при этом соответствует поворот вектора против часовой стрелки в правой системе координат, и по часовой стрелке в левой системе координат, если смотреть против направления соответствующей оси. Например, при повороте на угол 90° вокруг оси x ось y переходит в z. Аналогично, при повороте на угол 90° вокруг оси y ось z переходит в x. Аналогично, вокруг при повороте на угол 90° вокруг оси z ось x переходит в y. Правая система координат связана с выбором правого базиса (см. правило буравчика).

Знаки перед синусами определяются порядком перечисления осей плоскости поворота: какая названа первой, в той строке перед синусом минус: $P(x, y) \to M(1, 2) < 0$, $P(y, z) \to M(2, 3) < 0$, $P(z, x) \to M(3, 1) < 0$.

Матрицы поворота легко переносятся и на многомерные пространства.

5. Выражение матрицы 3-мерного поворота через угол поворота φ и единичный вектор оси поворота v = (x, y, z)

В декартовых координатах матрица поворота имеет вид:

$$M_z(\hat{v}, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi){v_x}^2 & (1-\cos\varphi)v_x v_y - v_z\sin\varphi & (1-\cos\varphi)v_x v_z + v_y\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)v_y v_x + v_z\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi){v_y}^2 & (1-\cos\varphi)v_y v_z - v_x\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)v_z v_x - v_y\sin\varphi & (1-\cos\varphi)v_z v_y + v_x\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi){v_z}^2 \end{pmatrix}. \quad (13.1)$$

Последовательные повороты около осей z, x', z'', на угол прецессии (α), угол нутации (β) и на угол собственного поворота (γ) приводят к следующему выражению для матрицы поворота:

$$M_z(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

Ось x' — ось x, повернутая первым поворотом (на α), z'' — ось z, повернутая первым и вторым поворотом (на α и β). Вследствие перестановочности поворотов приведенная матрица соответствует поворотам на углы вокруг осей z, x, z:

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = M_z(\alpha) \cdot M_x(\beta) \cdot M_z(\gamma).$$

6. Матрица бесконечно малого поворота в 3-мерном пространстве

Матрицы поворота на бесконечно малый угол φ вокруг осей декартовой системы координат x, y, z) в трёхмерном можно получить из (8). Для этого устремим угол θ к нулю. В результате получим:

Поворот вокруг оси x:

$$M_x(\theta^1)_{\theta^1 \to 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta^1 & -\sin\theta^1 \\ 0 & \sin\theta^1 & \cos\theta^1 \end{pmatrix}_{\theta^1 \to 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta^1 \\ 0 & \theta^1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот вокруг оси y:

$$M_y(\theta^2)_{\theta^2 \to 0} = \begin{pmatrix} \cos\theta^2 & 0 & \sin\theta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta^2 & 0 & \cos\theta^2 \end{pmatrix}_{\theta^2 \to 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот вокруг оси z:

$$M_z(\theta^3)_{\theta^3\to 0} = \begin{pmatrix} \cos\theta^3 & -\sin\theta^3 & 0 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\theta^3\to 0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta^3 & 0 \\ \theta^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножив все три матрицы друг на друга, в результате получим матрицу обобщенного поворота на бесконечно малые углы θ^i вокруг соответствующих осей декартовой системы координат (x, y, z):

$$M(\theta^1,\theta^2,\theta^3)_{\theta\to 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta^1 \\ 0 & \theta^1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\theta^3 & 0 \\ \theta^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta^1 \\ 0 & \theta^1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & 1 & 0 \\ -\theta^2 & \theta^2\theta^3 & 1 \end{pmatrix} = \quad (14)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 - \theta^1\theta^2 & 1 - \theta^1\theta^2\theta^3 & -\theta^1 \\ -\theta^1\theta^3 - \theta^2 & \theta^1 - \theta^2\theta^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Избавляясь от бесконечно малых членов второго порядка по углу поворота, получим результат:

$$M(\theta^1,\theta^2,\theta^3)_{\theta\to 0} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & 1 & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Результат (15) не зависит от порядка матричного произведения (14). Этот результат можно получить без перемножений матриц. Вспомним (13.1):

$$M_z(\hat{v},\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi){v_x}^2 & (1-\cos\varphi)v_x v_y - v_z\sin\varphi & (1-\cos\varphi)v_x v_z + v_y\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)v_y v_x + v_z\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi){v_y}^2 & (1-\cos\varphi)v_y v_z - v_x\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)v_z v_x - v_y\sin\varphi & (1-\cos\varphi)v_z v_y + v_x\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi){v_z}^2 \end{pmatrix}.$$

Приняв во внимание, что $\cos\varphi_{\varphi\to 0} = 1 = \cos\theta$, $\sin\varphi_{\varphi\to 0} = \varphi = \sin\theta$, получим следующий результат:

$$M_z(\hat{v},\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -v_z\sin\varphi & v_y\sin\varphi \\ v_z\sin\varphi & 1 & -v_x\sin\varphi \\ -v_y\sin\varphi & v_x\sin\varphi & 1 \end{pmatrix}_{\varphi\to 0} \to \begin{pmatrix} 1 & -v_z\theta & v_y\theta \\ v_z\theta & 1 & -v_x\theta \\ -v_y\theta & v_x\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), можно сделать вывод о следующих равенствах:

$$\theta^1 = v_x\theta,$$
$$\theta^2 = v_y\theta, \quad (17)$$
$$\theta^3 = v_z\theta.$$

Как следствие, можно сделать вывод о том, что три угла поворота (θ^1, θ^2, θ^3) одновременно составляют координаты вектора оси вращения бесконечно малого поворота, длина которой задает угол поворота вокруг этой оси.