

# The Case $n_1=n_2>n_3$ of the $n_1 \times n_2 \times n_3$ Dots Puzzle: Improved Upper Bound

Valerio Bencini

Scientific High School *Galilei Galilei*, Erba, Italy. e-mail: [valerio.bencini@gmail.com](mailto:valerio.bencini@gmail.com)

## Abstract

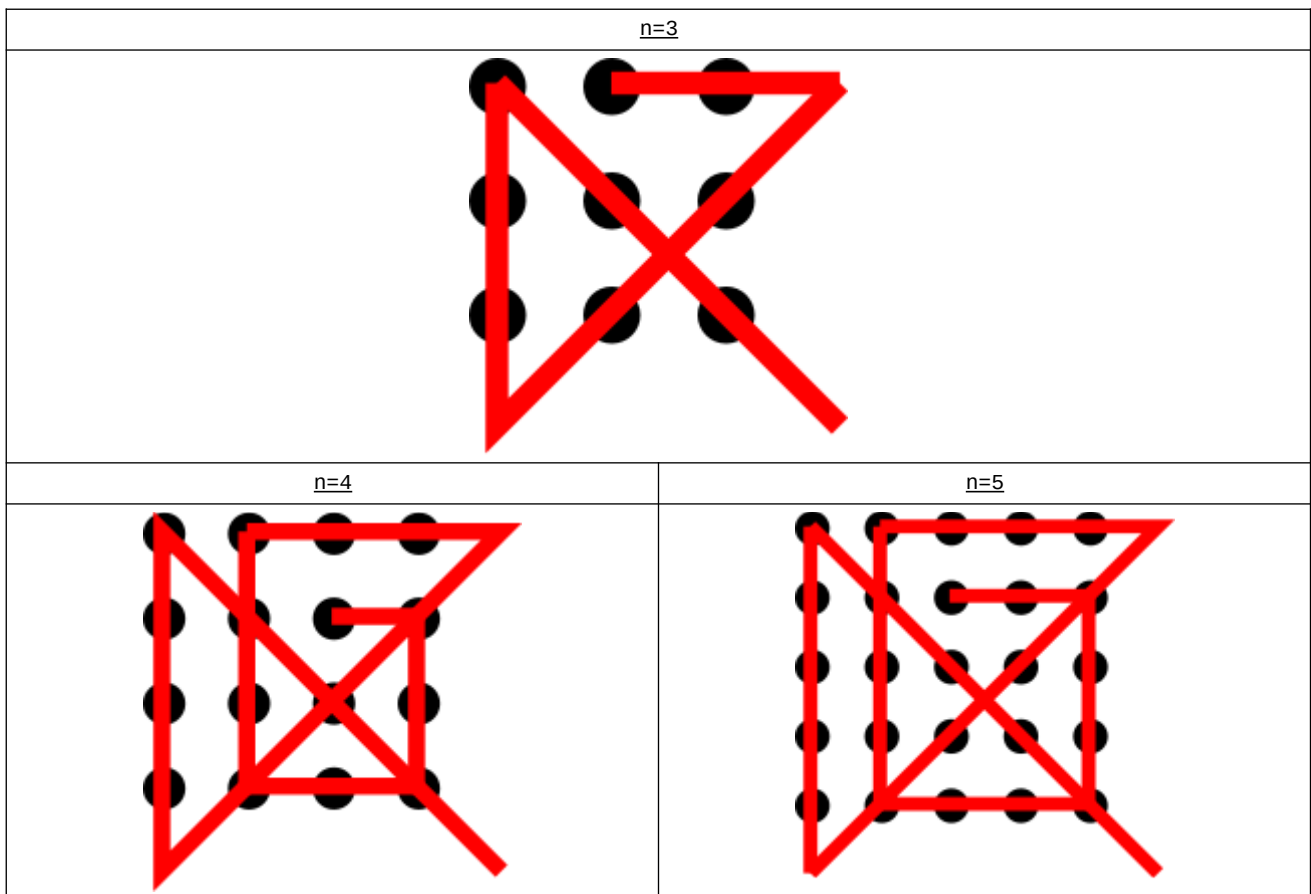
In this paper, I show an improved upper bound for the case  $n_1=n_2>n_3$  of the  $n_1 \times n_2 \times n_3$  Dots Puzzle, and I extend all the upper bounds I found to the  $k$ -dimensional case, with  $k \geq 4$ .

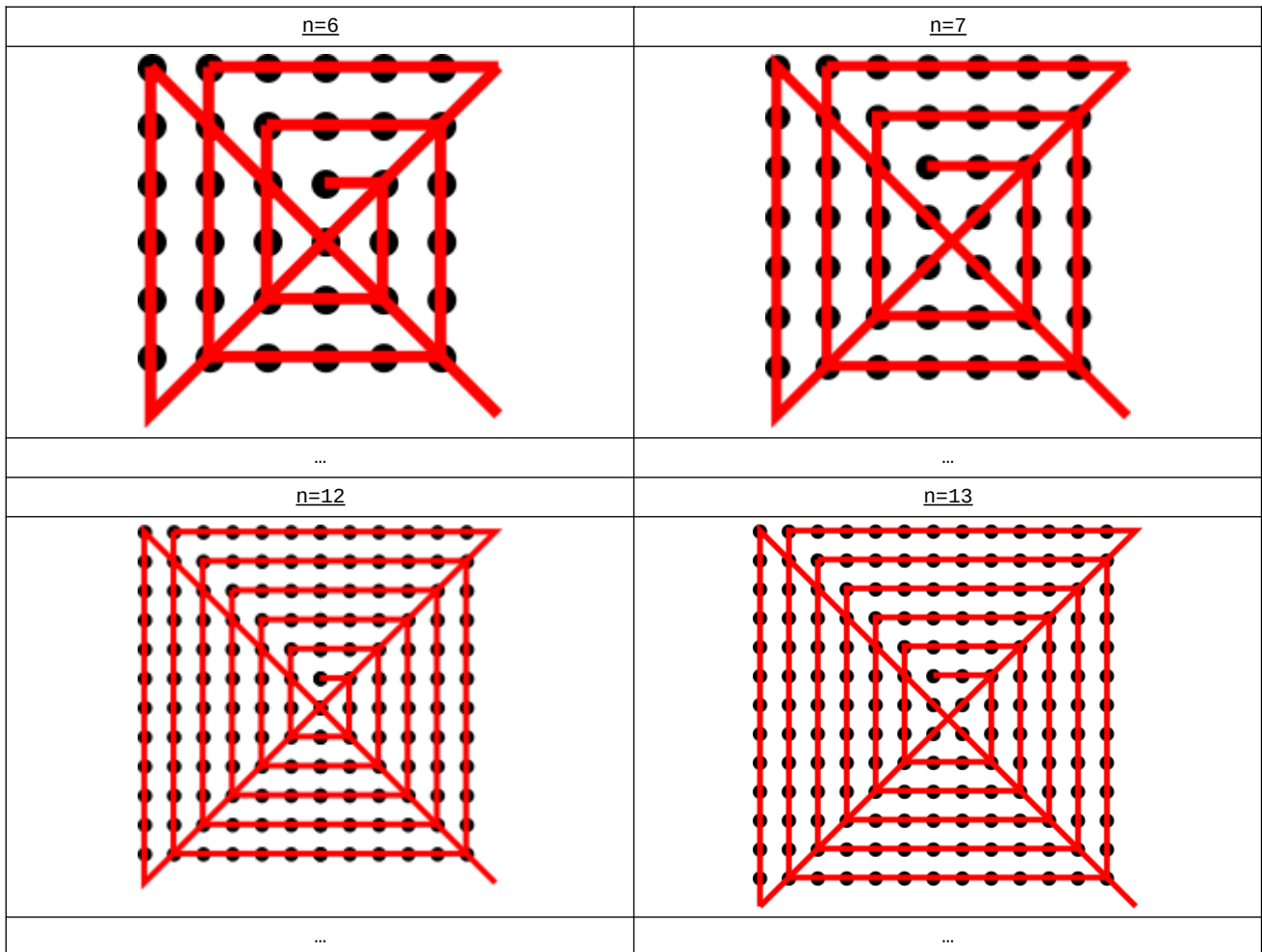
## Nota iniziale

Il metodo risolutivo utilizzato qui è lo stesso descritto da me in precedenza [1] [2], con unica eccezione il *Pattern* utilizzato, applicato al caso  $n_1=n_2>n_3$ , con  $n_1=n_2=n$ , del problema  $n_1 \times n_2 \times n_3$ .

## Descrizione dei Pattern utilizzati

Pattern 1:





Per poter disegnare il *Pattern 1*, è necessario posizionare la griglia in maniera tale da avere il numero di punti per riga e per colonna pari a  $n$  ognuna, in maniera tale da minimizzare il numero di segmenti utilizzati, avendo  $n > n_3$ .  
 Per tracciare il *Pattern 1*, si parte dal punto in basso a destra, si sale fino al punto in alto a sinistra, si scende fino a raggiungere il punto in basso a sinistra e si continua seguendo l'immagine sopra.

Raggruppiamo i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli già stati attraversati dai segmenti precedenti:

Numero segmento (q) (se $n=2 \times m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	Numero punti (se $n=2 \times m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	Numero segmento (q) (se $n=2 \times m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	Numero punti (se $n=2 \times m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )
1	n	1	n
2	n-1	2	n-1
3	n-1	3	n-2
4	n-1	4	n-1
5	n-3	5	n-3
6	n-3	6	n-3
7	n-3	7	n-3
8	n-3	8	n-3
9	n-5	9	n-5
10	n-5	10	n-5
11	n-5	11	n-5
12	n-5	12	n-5
13	n-7	13	n-7
14	n-7	14	n-7
15	n-7	15	n-7
16	n-7	16	n-7
...	...	...	...

Sommando progressivamente i valori del Numero punti, si ottiene:

$p$ (se $n=2 \times m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	$p$ (se $n=2 \times m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )
$n$	$n$
$2 \times n-1$	$2 \times n-1$
$3 \times n-2$	$3 \times n-3$
$4 \times n-3$	$4 \times n-4$
$5 \times n-6$	$5 \times n-7$
$6 \times n-9$	$6 \times n-10$
$7 \times n-12$	$7 \times n-13$
$8 \times n-15$	$8 \times n-16$
$9 \times n-20$	$9 \times n-21$
$10 \times n-25$	$10 \times n-26$
$11 \times n-30$	$11 \times n-31$
$12 \times n-35$	$12 \times n-36$
$13 \times n-42$	$13 \times n-43$
$14 \times n-49$	$14 \times n-50$
$15 \times n-56$	$15 \times n-57$
$16 \times n-63$	$16 \times n-64$
...	...

Si nota che  $p$  è scritto nella forma  $q \times n + k$ . Troviamo i valori di  $k$ :

Se  $n=2 \times m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=2 \times a-1, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $p = q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 1)$ .
- Se  $q=4 \times a+2, \forall a \in \mathbb{N}$ :  
 $p = q \times n - 1 \div 4 \times q^2$ .
- Se  $q=4 \times a, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $p = q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 4)$ .

Se  $n=2 \times m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=1$ :  
 $p = n$ .
- Se  $q=2$ :  
 $p = 2 \times n - 1$ .
- Se  $q=2 \times a-1, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $p = q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 3)$ .
- Se  $q=4 \times a, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $p = q \times n - 1 \div 4 \times q^2$ .
- Se  $q=4 \times a+2, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $p = q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 4)$ .

Sapendo che  $n^2 - p$  corrisponda al numero di punti del Pattern che restano ancora da congiungere dopo aver tracciato le  $q$  linee, definiamo  $h_{n; n; n_3} = h_{n; n; n_3}(q; n; n_3)$  come  $q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times (n^2 - p)$ .

Posto  $n > n_3, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}, \forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

Se  $n=2 \times m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=2 \times a-1, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 1)]\}$ .
- Se  $q=4 \times a+2, \forall a \in \mathbb{N}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - 1 \div 4 \times q^2)]$ .
- Se  $q=4 \times a, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 4)]\}$ .

Se  $n=2 \times m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=1$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times (n^2 - n)$ .
- Se  $q=2$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (2 \times n - 1)]$ .
- Se  $q=2 \times a-1, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 3)]\}$ .
- Se  $q=4 \times a, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - 1 \div 4 \times q^2)]$ .
- Se  $q=4 \times a+2, \forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 4)]\}$ .

Ripetiamo per il *Pattern 2*.

Pattern 2:

$n=4$	$n=5$
$n=6$	$n=7$
...	...
$n=12$	$n=13$
...	...

Anche in questo caso, è necessario posizionare la griglia in maniera tale da avere il numero di punti per riga e per colonna pari a  $n$  ognuna, in maniera tale da minimizzare il numero di segmenti utilizzati, avendo  $n > n_3$ .

Per disegnare il *Pattern 2*, si parte dal punto più alto di una unità di quello in basso a destra, si sale in diagonale fino al punto a destra di un'unità di quello in alto a sinistra, si procede verso il basso e si continua seguendo lo schema mostrato sopra.

Raggruppiamo i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli che sono già stati attraversati dai segmenti precedenti.

Numero segmento (q) (se $n=2 \times m$ , $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	Numero punti (se $n=2 \times m$ , $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	Numero segmento (q) (se $n=2 \times m - 1$ , $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ )	Numero punti (se $n=2 \times m - 1$ , $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ )
1	n-1	1	n-1
2	n-1	2	n-1
3	n-2	3	n-3
4	n-1	4	n-1
5	n-1	5	n-1
6	n-2	6	n-2
7	n-4	7	n-4
8	n-4	8	n-4
9	n-4	9	n-4
10	n-4	10	n-4
11	n-6	11	n-6
12	n-6	12	n-6
13	n-6	13	n-6
14	n-6	14	n-6
15	n-8	15	n-8
16	n-8	16	n-8
17	n-8	17	n-8
18	n-8	18	n-8
...	...	...	...

Si sommano in progressione i valori della tabella precedente per calcolare p:

p (se $n=2 \times m$ , $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ )	p (se $n=2 \times m - 1$ , $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ )
n-1	n-1
2×n-2	2×n-2
3×n-4	3×n-5
4×n-5	4×n-6
5×n-6	5×n-7
6×n-8	6×n-9
7×n-12	7×n-13
8×n-16	8×n-17
9×n-20	9×n-21
10×n-24	10×n-25
11×n-30	11×n-31
12×n-36	12×n-37
13×n-42	13×n-43
14×n-48	14×n-49
15×n-56	15×n-57
16×n-64	16×n-65
17×n-72	17×n-73
18×n-80	18×n-81
...	...

Si nota che  $p$  è scritto nella forma  $q \times n + k$ , e troviamo i valori di  $k$  sulla base della precedente tabella:

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=1$ :  
 $p = n-1$ .
- Se  $q=2$ :  
 $p = 2 \times n-2$ .
- Se  $q=3$ :  
 $p = 3 \times n-4$ .
- Se  $q=4$ :  
 $p = 4 \times n-5$ .
- Se  $q=2 \times a-1$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :  
 $p = q \times n-1 \div 4 \times (q^2-1)$ .
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $p = q \times n-1 \div 4 \times (q^2-4)$ .
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $p = q \times n-1 \div 4 \times q^2$ .

Se  $n=2 \times m-1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :

- Se  $q=2 \times a-1$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$ :  
 $p = q \times n-1 \div 4 \times (q^2+3)$ .
- Se  $q=2$ :  
 $p = 2 \times n-2$ .
- Se  $q=3$ :  
 $p = 3 \times n-5$ .
- Se  $q=4$ :  
 $p = 4 \times n-6$ .
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $p = q \times n-1 \div 4 \times (q^2-4)$ .
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $p = q \times n-1 \div 4 \times (q^2+4)$ .

Si calcola  $h_{n; n; n_3}$  come  $q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times (n^2-p)$ :

Posto  $n > n_3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=1$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(n-1)]$ .
- Se  $q=2$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(2 \times n-2)]$ .
- Se  $q=3$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(3 \times n-4)]$ .
- Se  $q=4$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(4 \times n-5)]$ .
- Se  $q=2 \times a-1$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-1 \div 4 \times (q^2-1)]\}$ .
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(q \times n-1 \div 4 \times (q^2-4))]$ .
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-1 \div 4 \times q^2]\}$ .

Se  $n=2 \times m-1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :

- Se  $q=2 \times a-1$ :  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-1 \div 4 \times (q^2+3)]\}$ .
- Se  $q=2$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(2 \times n-2)]$ .
- Se  $q=3$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(3 \times n-5)]$ .
- Se  $q=4$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(4 \times n-6)]$ .
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-1 \div 4 \times (q^2-4)]\}$ .
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(q \times n-1 \div 4 \times (q^2+4))]$ .

I valori di  $h_{n; n; n_3}$  per il *Pattern 1* e per il *Pattern 2* risultano, dunque:  
 Posto  $n > n_3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

Pattern 1:

Se  $n=2 \times m-1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=2 \times a-1$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 1)]\}.$$
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - (q \times n - 1 \div 4 \times q^2)\}.$$
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 4)]\}.$$

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=1$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times (n^2 - n).$$
- Se  $q=2$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (2 \times n - 1)].$$
- Se  $q=2 \times a-1$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 3)]\}.$$
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - 1 \div 4 \times q^2)].$$
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 4)]\}.$$

Pattern 2:

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $q=1$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (n - 1)].$$
- Se  $q=2$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (2 \times n - 2)].$$
- Se  $q=3$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (3 \times n - 4)].$$
- Se  $q=4$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (4 \times n - 5)].$$
- Se  $q=2 \times a-1$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 1)]\}.$$
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 4))].$$
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times q^2]\}.$$

Se  $n=2 \times m-1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :

- Se  $q=2 \times a-1$ :  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 3)]\}.$$
- Se  $q=2$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (2 \times n - 2)].$$
- Se  $q=3$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (3 \times n - 5)].$$
- Se  $q=4$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (4 \times n - 6)].$$
- Se  $q=4 \times a+2$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 - 4)]\}.$$
- Se  $q=4 \times a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  

$$h_{n; n; n_3} = q \times n_3 + n_3 - 1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - 1 \div 4 \times (q^2 + 4))].$$

### Formula per il nuovo "upper bound"

Definiamo, ora,  $q_{ottimale}$  come il miglior valore di  $q$  in maniera tale che  $h_{n; n; n_3}$  abbia il minor valore possibile.

Calcoliamo il  $q_{ottimale}$  al variare di  $n$  ed  $n_3$ :

$n$	$n_3$	$q_{ottimale}$ con il Pattern 1	$q_{ottimale}$ con il Pattern 2
3	2	4	/
4	2	/	6
4	3	/	6
5	2	8	/
5	3	8	/
5	4	4	6
		5	
		6	
		7	
5	8		
6	2	/	10
6	3	/	10
6	4	8	6
			7
			8
			9
6	5	/	6
7	2	12	/
7	3	12	/
7	4	8	10
		9	
		10	
		11	
7	5	8	/
7	6	8	/
8	2	/	14
8	3	/	14
8	4	12	10
			11
			12
			13
8	5	/	8
8	6	/	8
8	7	/	8
9	2	16	/
9	3	16	/
9	4	12	14
		13	
		14	
		15	
9	5	12	/



n	$n_3$	$q_{ottimale}$ con il Pattern 1	$q_{ottimale}$ con il Pattern 2
9	6	12	/
9	7	12	/
9	8	8	10
		9	
		10	
		11	
		12	
10	2	/	18
10	3	/	18
10	4	16	14
			15
			16
			17
			18
10	5	/	14
10	6	/	14
10	7	/	14
10	8	12	10
			11
			12
			13
			14
10	9	/	10
...	...	...	...

I valori di  $q_{ottimale}$  risultano:

Posto  $n > n_3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

Pattern 1:

Se  $n=2 \times m - 1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=2$  v  $n_3=3$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - 2$ .
- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 - 2$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 - 1$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 + 1$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 + 2$ .
- Se  $n_3=4 \times c + 1$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 - 1$ .
- Se  $n_3=4 \times c + 2$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3$ .
- Se  $n_3=4 \times c - 1$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 + 1$ .

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3$ .

Pattern 2:

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=2$  v  $n_3=3$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - 2$ .
- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 - 2$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 - 1$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 + 1$  v  $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 + 2$ .
- Se  $n_3=4 \times c + 1$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 - 1$ .
- Se  $n_3=4 \times c + 2$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3$ .
- Se  $n_3=4 \times c - 1$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3 + 1$ .

Se  $n=2 \times m - 1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :

- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $q_{ottimale} = 2 \times n - n_3$ .

Calcoliamo  $h_{n; n; n_3}$  sostituendo  $q$  con  $q_{ottimale}$ :  
 Posto  $n > n_3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

Pattern 1:

Se  $n=2 \times m-1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=2$  v  $n_3=3$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - n_3 - 1$ .
- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 1$ .
- Se  $n_3=2 \times c-1$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 5 + 2$ .
- Se  $n_3=4 \times c+2$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 3$ .

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 1$ .

Pattern 2:

Se  $n=2 \times m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=2$  v  $n_3=3$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - n_3 - 1$ .
- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 1$ .
- Se  $n_3=2 \times c-1$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 5 + 2$ .
- Se  $n_3=4 \times c+2$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 3$ .

Se  $n=2 \times m-1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

- Se  $n_3=4 \times c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  
 $h_{n; n; n_3} = 2 \times n \times n_3 - 1 + 2 \times n_3^2 + n_3 - 1$ .

Condensando tutti i casi in un'unica formula, si ottiene:

Posto  $n > n_3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ :

$$h_{n; n; n_3} = 2nn_3 + \left( \left\lfloor -\frac{n_3^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_3-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_3+2}{4} \right\rfloor + n_3 - 2 \right) \left( \left\lfloor \frac{1}{n_3^2 - n_3 - 7} \right\rfloor + 1 \right) + (n_3 + 1) \left\lfloor \frac{1}{n_3^2 - n_3 - 7} \right\rfloor$$

Tabella con i valori di  $h_{n; n; n_3}$ .

<b>n</b>	<b>n<sub>3</sub></b>	<b>h<sub>n; n; n<sub>3</sub></sub></b>
3	2	9
4	2	13
4	3	20
5	2	17
5	3	26
5	4	35
6	2	21
6	3	32
6	4	43
6	5	50
7	2	25
7	3	38
7	4	51
7	5	60
7	6	69
8	2	29
8	3	44
8	4	59
8	5	70
8	6	81
8	7	92
9	2	33
9	3	50
9	4	67
9	5	80
9	6	93
9	7	106
9	8	119
10	2	37
10	3	56
10	4	75
10	5	90
10	6	105
10	7	120
10	8	135
10	9	146
...	...	...
20	18	573
...	...	...

## Estensione al caso k-dimensionale

In questo paragrafo, illustro l'estensione di tutti gli "upper bound" trovati da me e Ripà [1] [2], utilizzando il metodo descritto da Ripà nel 2013 [3] [4], dividendo il problema nei vari casi studiati.

### 1. Caso $n_1=n_2=n_3 \geq n_4 \geq \dots \geq n_k$ , con $n_1=n_2=n_3=n$ :

Per  $n \geq 6$ ,  $k \geq 4$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$h_{n;n;n;n_4;\dots;n_k} = \left( \left\lfloor \frac{3n^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + n - 1 \right) \prod_{b=4}^k (n_b) - 1$$

### 2. Caso $n_1=n_2 > n_3 \geq n_4 \geq \dots \geq n_k$ , con $n_1=n_2=n$ :

Per  $n > n_3$ ,  $k \geq 4$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$h_{n;n;n_3;n_4;\dots;n_k} = [2nn_3 + \left( \left\lfloor -\frac{n_3^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_3-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_3+2}{4} \right\rfloor + n_3 - 2 \right) \left( \left\lfloor \frac{1}{n_3^2 - n_3 - 7} \right\rfloor + 1 \right) + (n_3 + 1) \left\lfloor \frac{1}{n_3^2 - n_3 - 7} \right\rfloor + 1] \prod_{b=4}^k (n_b) - 1$$

### 3. Caso $n_1 > n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq \dots \geq n_k$ :

Per  $n_1 > n_2 \geq n_3$ ,  $k \geq 4$ ,  $\forall n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ ,  $\forall n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ ,  $\forall n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$h_{n_1;n_2;n_3;n_4;\dots;n_k} = \left\{ \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{1}{3n_1 - 3n_2 - 3n_3 + 5} \right\rfloor \left[ (n_1 - n_2 - n_3)(n_1 - n_2 - n_3 + 1) - 2 \left\lfloor \frac{-n_1 + n_2 + n_3}{2} \right\rfloor \right] + 2n_2n_3 \right\} \prod_{b=4}^k (n_b) - 1$$

## Bibliografia

- [1] Ripà, M., Bencini, V., *The  $n \times n \times n$  Dots Problem: An Improved "Outside the Box" Upper Bound*, viXra, 25 July 2018, <http://vixra.org/pdf/1807.0384v2.pdf>
- [2] Bencini, V.,  *$n_1 \times n_2 \times n_3$  Dots Puzzle: A Method to Improve the Current Upper Bound*, viXra, 7 June 2019, <http://vixra.org/abs/1906.0110v1.pdf>
- [3] Ripà, M., Ramirez, P., *The Nine Dots Puzzle Extended to  $N \times n \times n \dots \times n$  Points*, viXra, 5 Sept. 2013, <http://vixra.org/pdf/1307.0021v4.pdf>
- [4] Ripà, M., *The Rectangular Spiral Solution for the  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  Points Problem*, viXra, 11 Jan. 2014, <http://vixra.org/pdf/1307.0095v3.pdf>