The Case $n_1=n_2>n_3$ of the n_1 X n_2 X n_3 Dots Puzzle: Improved Upper Bound

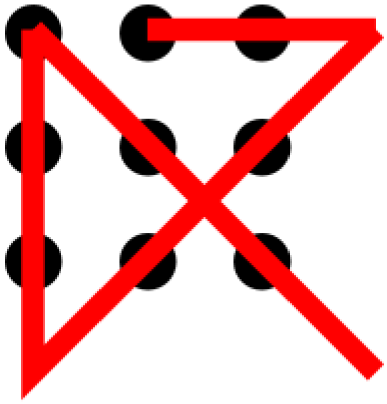
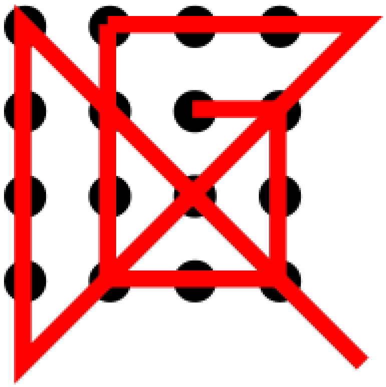
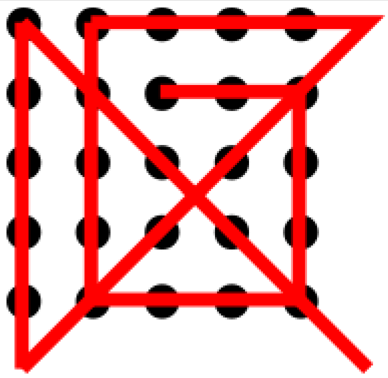
Valerio Bencini

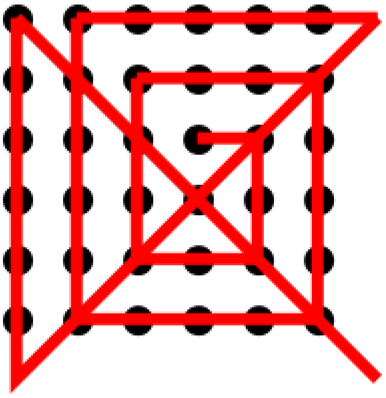
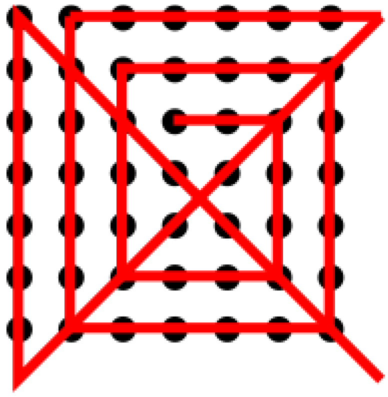
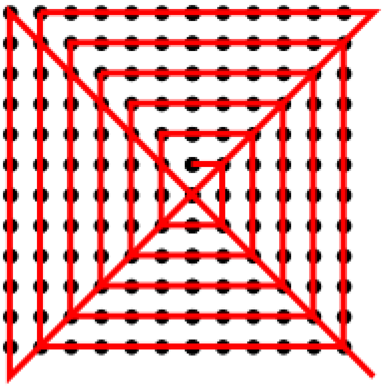
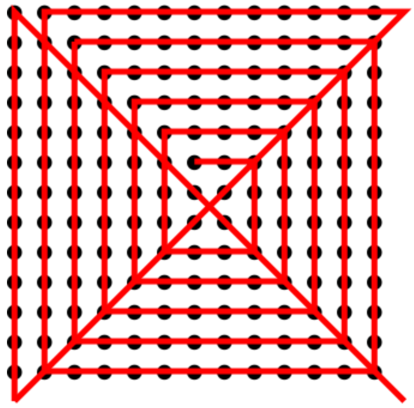
Scientific High School *Galilei Galilei*, Erba, Italy. e-mail: *valerio.bencini@gmail.com*

Abstract
In this paper, I show an improved upper bound for the case n_1=n_2>n_3 of the n_1 X n_2 X n_3 Dots Puzzle, and I extend all the upper bounds I found to the k-dimensional case, with k>=4.

Nota iniziale
Il metodo risolutivo utilizzato qui è lo stesso descritto da me in precedenza [1] [2], con unica eccezione il *Pattern* utilizzato, applicato al caso $n_1=n_2>n_3$, con $n_1=n_2=n$, del problema n_1 X n_2 X n_3.

Descrizione dei Pattern utilizzati
Pattern 1:

<table>
<tr><td colspan="2">n=3</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>n=4</td><td>n=5</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>n=6</td><td>n=7</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>n=12</td><td>n=13</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Per poter disegnare il Pattern 1, è necessario posizionare la griglia in maniera tale da avere il numero di punti per riga e per colonna pari a n ognuna, in maniera tale da minimizzare il numero di segmenti utilizzati, avendo $n>n_3$.
Per tracciare il Pattern 1, si parte dal punto in basso a destra, si sale fino al punto in alto a sinistra, si scende fino a raggiungere il punto in basso a sinistra e si continua seguendo l'immagine sopra.</td></tr>
</table>

Raggruppiamo i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli già stati attraversati dai segmenti precedenti:

Numero segmento (**q**) (se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**Numero punti** (se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**Numero segmento** (**q**) (se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**Numero punti** (se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})
1	n	1	n
2	n-1	2	n-1
3	n-1	3	n-2
4	n-1	4	n-1
5	n-3	5	n-3
6	n-3	6	n-3
7	n-3	7	n-3
8	n-3	8	n-3
9	n-5	9	n-5
10	n-5	10	n-5
11	n-5	11	n-5
12	n-5	12	n-5
13	n-7	13	n-7
14	n-7	14	n-7
15	n-7	15	n-7
16	n-7	16	n-7
…	…	…	…

Sommando progressivamente i valori del *Numero punti*, si ottiene:

p (se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**p** (se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})
n	n
2×n-1	2×n-1
3×n-2	3×n-3
4×n-3	4×n-4
5×n-6	5×n-7
6×n-9	6×n-10
7×n-12	7×n-13
8×n-15	8×n-16
9×n-20	9×n-21
10×n-25	10×n-26
11×n-30	11×n-31
12×n-35	12×n-36
13×n-42	13×n-43
14×n-49	14×n-50
15×n-56	15×n-57
16×n-63	16×n-64
…	…

Si nota che p è scritto nella forma $q\times n+k$. Troviamo i valori di k:
Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = q\times n-(q^2-1)\div 4$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ:
  $p = q\times n-q^2\div 4$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = q\times n-(q^2-4)\div 4$.

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:
- Se **q=1**:
  $p = n$.
- Se **q=2**:
  $p = 2\times n-1$.
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $p = q\times n-(q^2+3)\div 4$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = q\times n-q^2\div 4$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = q\times n-(q^2+4)\div 4$.

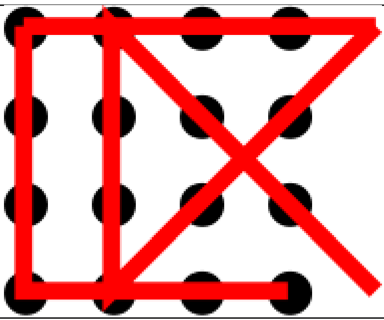
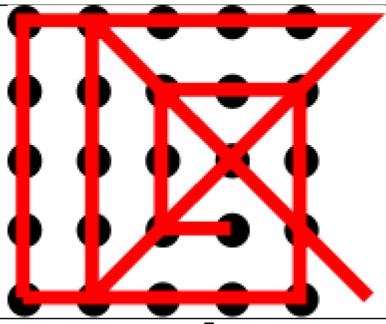
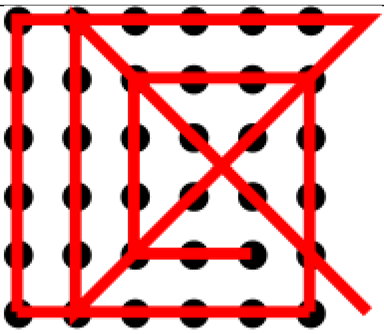
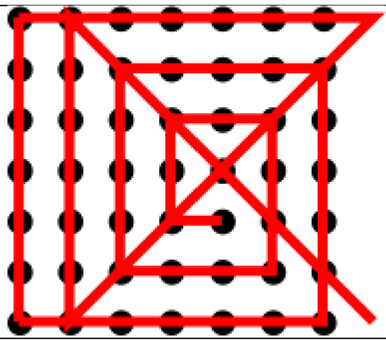
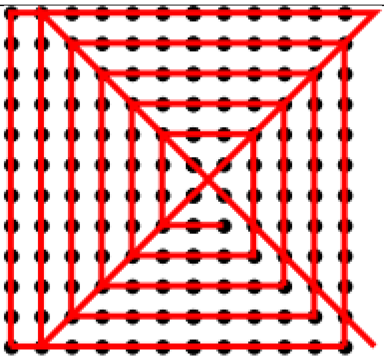
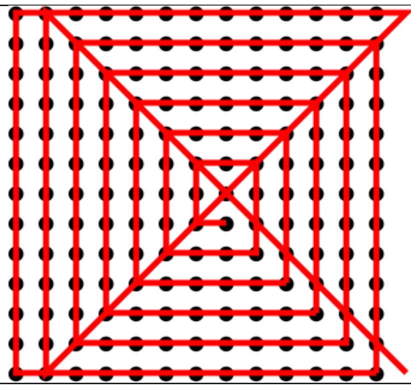
Sapendo che n^2-p corrisponda al numero di punti del *Pattern* che restano ancora da congiungere dopo aver tracciato le q linee, definiamo $h_{n;\,n;\,n\_3}=h_{n;\,n;\,n\_3}(q;\ n;\ n_3)$ come $q\times n_3 + n_3-1 + 2\times(n^2-p)$.

Posto $\boldsymbol{n>n_3}$, ∀ n ∈ ℕ\{0; 1; 2}, ∀ n_3 ∈ ℕ\{0; 1}:
Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)\div 4]\}$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2\div 4)]$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)\div 4]\}$.

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:
- Se **q=1**:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times(n^2-n)$.
- Se **q=2**:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$.
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)\div 4]\}$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2\div 4)]$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\,n;\,n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+4)\div 4]\}$.

Ripetiamo per il *Pattern 2*.

Pattern 2:

n=4	n=5
	
n=6	n=7
	
…	…
n=12	n=13
	
…	…
Anche in questo caso, è necessario posizionare la griglia in maniera tale da avere il numero di punti per riga e per colonna pari a *n* ognuna, in maniera tale da minimizzare il numero di segmenti utilizzati, avendo $n>n_3$. Per disegnare il *Pattern 2*, si parte dal punto più alto di una unità di quello in basso a destra, si sale in diagonale fino al punto a destra di un'unità di quello in alto a sinistra, si procede verso il basso e si continua seguendo lo schema mostrato sopra.	

Raggruppiamo i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli che sono già stati attraversati dai segmenti precedenti.

Numero segmento (**q**) (se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**Numero punti** (se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**Numero segmento** (**q**) (se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2})	**Numero punti** (se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2})
1	n-1	1	n-1
2	n-1	2	n-1
3	n-2	3	n-3
4	n-1	4	n-1
5	n-1	5	n-1
6	n-2	6	n-2
7	n-4	7	n-4
8	n-4	8	n-4
9	n-4	9	n-4
10	n-4	10	n-4
11	n-6	11	n-6
12	n-6	12	n-6
13	n-6	13	n-6
14	n-6	14	n-6
15	n-8	15	n-8
16	n-8	16	n-8
17	n-8	17	n-8
18	n-8	18	n-8
…	…	…	…

Si sommano in progressione i valori della tabella precedente per calcolare *p*:

p (se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1})	**p** (se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2})
n-1	n-1
2×n-2	2×n-2
3×n-4	3×n-5
4×n-5	4×n-6
5×n-6	5×n-7
6×n-8	6×n-9
7×n-12	7×n-13
8×n-16	8×n-17
9×n-20	9×n-21
10×n-24	10×n-25
11×n-30	11×n-31
12×n-36	12×n-37
13×n-42	13×n-43
14×n-48	14×n-49
15×n-56	15×n-57
16×n-64	16×n-65
17×n-72	17×n-73
18×n-80	18×n-81
…	…

Si nota che p è scritto nella forma $q \times n-k$, e troviamo i valori di k sulla base della precedente tabella:
Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **q=1**:
  $p = n-1$.
- Se **q=2**:
  $p = 2 \times n-2$.
- Se **q=3**:
  $p = 3 \times n-4$.
- Se **q=4**:
  $p = 4 \times n-5$.
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1; 2}:
  $p = q \times n-(q^2-1) \div 4$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = q \times n-(q^2-4) \div 4$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $p = q \times n-q^2 \div 4$.

Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2}:

- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 2}:
  $p = q \times n-(q^2+3) \div 4$.
- Se **q=2**:
  $p = 2 \times n-2$.
- Se **q=3**:
  $p = 3 \times n-5$.
- Se **q=4**:
  $p = 4 \times n-6$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = q \times n-(q^2-4) \div 4$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $p = q \times n-(q^2+4) \div 4$.

Si calcola $h_{n;\ n;\ n\_3}$ come $q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times (n^2-p)$:
Posto $\boldsymbol{n>n_3}$, ∀ n ∈ ℕ\{0; 1; 2}, ∀ n_3 ∈ ℕ\{0; 1}:
Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **q=1**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(n-1)]$.
- Se **q=2**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(2n-2)]$.
- Se **q=3**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(3n-4)]$.
- Se **q=4**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(4n-5)]$.
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1; 2}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2-1) \div 4]\}$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(q \times n-(q^2-4) \div 4)]$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-q^2 \div 4]\}$.

Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2}:

- Se **q=2×a-1**: ∀ a ∈ ℕ\{0; 2}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2+3) \div 4]\}$.
- Se **q=2**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(2n-2)]$.
- Se **q=3**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(3n-5)]$.
- Se **q=4**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(4n-6)]$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2-4) \div 4]\}$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q \times n_3 + n_3-1 + 2 \times [n^2-(q \times n-(q^2+4) \div 4)]$.

I valori di $h_{n;\ n;\ n\_3}$ per il *Pattern 1* e per il *Pattern 2* risultano, dunque:
Posto $\boldsymbol{n>n_3}$, ∀ n ∈ ℕ\{0; 1; 2}, ∀ n_3 ∈ ℕ\{0; 1}:

Pattern 1:

Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2}:

- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)\div 4]\}$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2\div 4)]$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)\div 4]\}$.

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **q=1**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times(n^2-n)$.
- Se **q=2**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$.
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)\div 4]\}$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2\div 4)]$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+4)\div 4]\}$.

Pattern 2:

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **q=1**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(n-1)]$.
- Se **q=2**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(2n-2)]$.
- Se **q=3**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(3n-4)]$.
- Se **q=4**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(4n-5)]$.
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1; 2}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)\div 4]\}$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(q\times n-(q^2-4)\div 4)]$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-q^2\div 4]\}$.

Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2}:

- Se **q=2×a-1**: ∀ a ∈ ℕ\{0; 2}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)\div 4]\}$.
- Se **q=2**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(2n-2)]$.
- Se **q=3**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(3n-5)]$.
- Se **q=4**:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(4n-6)]$.
- Se **q=4×a+2**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)\div 4]\}$.
- Se **q=4×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n;\ n;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3 - 1 + 2\times[n^2-(q\times n-(q^2+4)\div 4)]$.

Formula per il nuovo "upper bound"

Definiamo, ora, $\boldsymbol{q_{ottimale}}$ come il miglior valore di q in maniera tale che $h_{n;\ n;\ n\_3}$ abbia il minor valore possibile.

Calcoliamo il $\boldsymbol{q_{ottimale}}$ al variare di n ed n_3:

n	$\mathbf{n_3}$	$\mathbf{q_{ottimale}}$ **con il Pattern 1**	$\mathbf{q_{ottimale}}$ **con il Pattern 2**
3	2	4	/
4	2	/	6
4	3	/	6
5	2	8	/
5	3	8	/
5	4	4	6
		5	
		6	
		7	
		8	
6	2	/	10
6	3	/	10
6	4	8	6
			7
			8
			9
			10
6	5	/	6
7	2	12	/
7	3	12	/
7	4	8	10
		9	
		10	
		11	
		12	
7	5	8	/
7	6	8	/
8	2	/	14
8	3	/	14
8	4	12	10
			11
			12
			13
			14
8	5	/	8
8	6	/	8
8	7	/	8
9	2	16	/
9	3	16	/
9	4	12	14
		13	
		14	
		15	
		16	
9	5	12	/

<table>
<tr><th>n</th><th>n_3</th><th>$q_{ottimale}$ con il Pattern 1</th><th>$q_{ottimale}$ con il Pattern 2</th></tr>
<tr><td>9</td><td>6</td><td>12</td><td>/</td></tr>
<tr><td>9</td><td>7</td><td>12</td><td>/</td></tr>
<tr><td rowspan="5">9</td><td rowspan="5">8</td><td>8</td><td rowspan="5">10</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td><td>/</td><td>18</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3</td><td>/</td><td>18</td></tr>
<tr><td rowspan="5">10</td><td rowspan="5">4</td><td rowspan="5">16</td><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>10</td><td>5</td><td>/</td><td>14</td></tr>
<tr><td>10</td><td>6</td><td>/</td><td>14</td></tr>
<tr><td>10</td><td>7</td><td>/</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="5">10</td><td rowspan="5">8</td><td rowspan="5">12</td><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>10</td><td>9</td><td>/</td><td>10</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

I valori di $q_{ottimale}$ risultano:
Posto $n>n_3$, ∀ n ∈ ℕ\{0; 1; 2}, ∀ n_3 ∈ ℕ\{0; 1}:
Pattern 1:
Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **$n_3$3=2** ∨ **$n_3$3=3**:
  $q_{ottimale} = 2×n-2$.
- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3-2$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3-1$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3+1$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3+2$.
- Se **n_3=4×c+1**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3-1$.
- Se **n_3=4×c+2**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3$.
- Se **n_3=4×c-1**, ∀ c ∈ ℕ\{0; 1}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3+1$.

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3$.

Pattern 2:
Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **$n_3$3=2** ∨ **$n_3$3=3**:
  $q_{ottimale} = 2×n-2$.
- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3-2$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3-1$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3+1$ ∨ $q_{ottimale} = 2×n-n_3+2$.
- Se **n_3=4×c+1**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3-1$.
- Se **n_3=4×c+2**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3$.
- Se **n_3=4×c-1**, ∀ c ∈ ℕ\{0; 1}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3+1$.

Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1; 2}:

- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $q_{ottimale} = 2×n-n_3$.

Calcoliamo $h_{n;\, n;\, n\_3}$ sostituendo q con $\boldsymbol{q_{ottimale}}$:
Posto $\boldsymbol{n>n_3}$, ∀ n ∈ ℕ\{0; 1; 2}, ∀ n_3 ∈ ℕ\{0; 1}:
<u>Pattern 1</u>:
Se **n=2×m-1**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **$n_3$3=2** ∨ **$n_3$3=3**:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - n_3 - 1$.
- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 1$.
- Se **n_3=2×c-1**, ∀ c ∈ ℕ\{0; 1; 2}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 5\div 2$.
- Se **n_3=4×c+2**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 3$.

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 1$.

<u>Pattern 2</u>:
Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **$n_3$3=2** ∨ **$n_3$3=3**:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - n_3 - 1$.
- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 1$.
- Se **n_3=2×c-1**, ∀ c ∈ ℕ\{0; 1; 2}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 5\div 2$.
- Se **n_3=4×c+2**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 3$.

Se **n=2×m**, ∀ m ∈ ℕ\{0; 1}:

- Se **n_3=4×c**, ∀ c ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n;\, n;\, n\_3} = 2\times n\times n_3 - 1\div 2\times n_3^2 + n_3 - 1$.

Condensando tutti i casi in un'unica formula, si ottiene:
Posto $\boldsymbol{n>n_3}$, ∀ n ∈ ℕ\{0; 1; 2}, ∀ n_3 ∈ ℕ\{0; 1}:

$$h_{n;n;n_3} = 2nn_3 + \left(\left\lfloor -\frac{n_3^{\,2}}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_3-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_3+2}{4} \right\rfloor + n_3 - 2 \right)\left(\left\lfloor \frac{1}{n_3^{\,2}-n_3-7} \right\rfloor + 1 \right) + (n_3+1)\left\lfloor \frac{1}{n_3^{\,2}-n_3-7} \right\rfloor$$

Tabella con i valori di $h_{n;\ n;\ n\_3}$.

n	**n_3**	**$h_{n;\ n;\ n\_3}$**
3	2	9
4	2	13
4	3	20
5	2	17
5	3	26
5	4	35
6	2	21
6	3	32
6	4	43
6	5	50
7	2	25
7	3	38
7	4	51
7	5	60
7	6	69
8	2	29
8	3	44
8	4	59
8	5	70
8	6	81
8	7	92
9	2	33
9	3	50
9	4	67
9	5	80
9	6	93
9	7	106
9	8	119
10	2	37
10	3	56
10	4	75
10	5	90
10	6	105
10	7	120
10	8	135
10	9	146
…	…	…
20	18	573
…	…	…

Estensione al caso k-dimensionale

In questo paragrafo, illustro l'estensione di tutti gli "upper bound" trovati da me e Ripà, utilizzando il metodo descritto da Ripà nel 2013 [3] [4], dividendo il problema nei vari casi studiati.

1. Caso $n_1=n_2=n_3=n_3 \ldots n_k$, con $n_1=n_2=n_3=n_3 \ldots n_k=n$.
Per **$n \geq 6$**, **$k \geq 4$**, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

$$h_{n;n;n;n;\ldots;n}=\left(\left\lfloor\frac{3n^2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor+n-1\right)n^{k-3}-1$$

2. Caso $n_1=n_2>n_3 \geq n_4 \geq \ldots \geq n_k$, con $n_1=n_2=n$.
Posto **$n>n_3$**, **$k \geq 4$**, $\forall\ n \in N \setminus \{0; 1; 2\}$, $\forall\ n_3 \in N \setminus \{0; 1\}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

$$h_{n;n;n_3;n_4\ldots;n_k}=\left[2nn_3+\left(\left\lfloor-\frac{n_3^{\,2}}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n_3}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n_3-1}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n_3+1}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n_3+2}{4}\right\rfloor+n_3-2\right)\left(\left\lfloor\frac{1}{n_3^{\,2}-n_3-7}\right\rfloor+1\right)+(n_3+1)\left\lfloor\frac{1}{n_3^{\,2}-n_3-7}\right\rfloor+1\right]\prod_{b=4}^{k}(n_b)-1$$

3. Caso $n_1>n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq \ldots \geq n_k$.
Posto **$n_1>n_2 \geq n_3$**, **$k \geq 4$**, $\forall\ n_1 \in N \setminus \{0; 1; 2\}$, $\forall\ n_2 \in N \setminus \{0; 1\}$, $\forall\ n_3 \in N \setminus \{0; 1\}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

$$h_{n_1;n_2;n_3;n_4;\ldots;n_k}=\left\{\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{1}{3n_1-3n_2-3n_3+5}\right\rfloor\left[(n_1-n_2-n_3)(n_1-n_2-n_3+1)-2\left\lfloor\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}\right\rfloor\right]+2n_2n_3\right\}\prod_{b=4}^{k}(n_b)-1$$

Bibliografia

[1] Ripà, M., Bencini, V., *The n X n X n Dots Problem: An Improved "Outside the Box" Upper Bound*, *viXra*, 25 July 2018, http://vixra.org/pdf/1807.0384v2.pdf

[2] Bencini, V., *n_1 X n_2 X n_3 Dots_Puzzle: A Method to Improve the Current Upper Bound*, *viXra*, 7 June 2019, http://vixra.org/abs/1906.0110v1.pdf

[3] Ripà, M., Remirez, P., *The Nine Dots Puzzle Extended to Nxnxn…xn Points*, *viXra*, 5 Sept. 2013, http://vixra.org/pdf/1307.0021v4.pdf

[4] Ripà, M., *The Rectangular Spiral Solution for the n_1 X n_2 X … X n_k Points Problem*, *viXra*, 11 Jan. 2014, http://vixra.org/pdf/1307.0095v3.pdf