Two Integrals

Edgar Valdebenito

08/05/2019 7:17:09

Abstract. This note presents two elementary integrals.

Integrals

Entry 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-x-2e^{-x}}\sin\left(2e^{-x}\right)}{1+2e^{-2e^{-x}}\cos\left(2e^{-x}\right)+e^{-4e^{-x}}}dx=\frac{(\ln 2)^2}{2}-\frac{\pi\ln 2}{16} \quad (1)$$

Remark 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-x-2e^{-x}}\sin\left(2e^{-x}\right)}{1+2e^{-2e^{-x}}\cos\left(2e^{-x}\right)+e^{-4e^{-x}}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-xe^{x-2e^{x}}\sin\left(2e^{x}\right)}{1+2e^{-2e^{x}}\cos\left(2e^{x}\right)+e^{-4e^{x}}}dx=$$
$$=\int_{0}^{\infty}\frac{-e^{-2x}\sin(2x)\ln x}{1+2e^{-2x}\cos(2x)+e^{-4x}}dx=\int_{0}^{1}\frac{x\sin(2\ln x)\ln(-\ln x)}{1+2x^2\cos(2\ln x)+x^4}dx \quad (2)$$

Entry 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\left(e^{-2e^{-x}}+\cos\left(2e^{-x}\right)\right)e^{-x-2e^{-x}}}{1+2e^{-2e^{-x}}\cos\left(2e^{-x}\right)+e^{-4e^{-x}}}dx=\frac{(\ln 2)^2}{2}+\frac{\pi\ln 2}{16} \quad (3)$$

Remark 2 :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\left(e^{-2e^{-x}}+\cos\left(2e^{-x}\right)\right)e^{-x-2e^{-x}}}{1+2e^{-2e^{-x}}\cos\left(2e^{-x}\right)+e^{-4e^{-x}}}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\left(e^{-2e^{x}}+\cos\left(2e^{x}\right)\right)e^{x-2e^{x}}}{1+2e^{-2e^{x}}\cos\left(2e^{x}\right)+e^{-4e^{x}}}dx=$$
$$=-\int_{0}^{\infty}\frac{\left(e^{-2x}+\cos(2x)\right)e^{-2x}\ln x}{1+2e^{-2x}\cos(2x)+e^{-4x}}dx=-\int_{0}^{1}\frac{x\left(x^2+\cos(2\ln x)\right)\ln(-\ln x)}{1+2x^2\cos(2\ln x)+x^4}dx \quad (4)$$

References

1. D.F. Connon: Some applications of the Stieltjes constants. arXiv: 0901.2083[pdf] ,2009.
2. D.F. Connon: Some series and integrals involving the Riemann zeta functions, binomial coefficients and harmonic numbers. Volume V , 2007. arXiv: 0710.4047 [pdf] .