# $n_1$ X $n_2$ X $n_3$ Dots Puzzle: A Method to Improve the Current Upper Bound


## Valerio Bencini

**Scientific High School *Galilei Galilei*, Erba, Italy. e-mail:** *valerio.bencini@gmail.com*



## Abstract

The aim of this paper is to lower down the current upper bound for the Ripà's n_1 X n_2 X n_3 Dots Problem, with n_1>n_2>=n_3, using the same method Ripà and I used for the case n_1=n_2=n_3=:n. The new value is now 1/2*floor(1/(3*n_1-3*n_2-3*n_3+5))*((n_1-n_2-n_3)*(n_1-n_2-n_3+1)-2*floor(1/2*(-n_1+n_2+n_3)))+2*n_2*n_3-1.

At the end of the article, I also extend this result, and that I previously found with Ripà for n_1=n_2=n_3:=n, to the k-dimensional problem n_1 X n_2 X n_3 X n_4 X ... X n_k, using the equation found by Ripà in 2013.


## Introduzione

Il problema $\boldsymbol{n_1}$ **X** $\boldsymbol{n_2}$ **X** $\boldsymbol{n_3}$ è un'ampia estensione del noto *Nine Dots Puzzle*, pubblicato nella *Cyclopedia of Puzzles* di Samuel Loyd nel 1914 [1], e formalizzata da Ripà recentemente [2].

Esso consiste nel trovare il numero minimo di segmenti di una spezzata necessari per unire $n_1$ X $n_2$ X $n_3$ punti (adimensionali), con $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, disposti equidistanti in una griglia regolare tridimensionale, larga $n_1$ punti, alta $n_2$ punti e profonda $n_3$ punti.

Lo scopo di questo articolo è diminuire il corrente "upper bound", il limite massimo dimostrato, per il caso $n_1 > n_2 \geq n_3$ tramite un metodo risolutivo unico, e analogo a quello descritto da me e Ripà per il caso $n_1 = n_2 = n_3 = n$ [3], ed estendere il risultato al caso k-dimensionale $n_1$ X $n_2$ X $n_3$ X $n_4$ … X $n_k$.

## Nota iniziale

Poiché il metodo proposto qui è analogo a quello mostrato nel problema $n$ X $n$ X $n$ da me e Ripà in precedenza [3], e sono oltretutto utilizzate le stesse convenzioni, salvo qualche piccola differenza, se si vuole evitare la rilettura, si può passare direttamente alla sezione *Descrizione del Pattern*.

## Descrizione del metodo di risoluzione del problema

Per comprendere il metodo di risoluzione, si immagina di suddividere la griglia $n_1 \times n_2 \times n_3$ in $n_3$ piani identici, con $n_1 > n_2 \geq n_3$, come mostrato nel disegno in *Figura a*.

Si parte dal primo piano tracciando $q$ **segmenti rossi** seguendo con precisione il *Pattern* descritto in *Descrizione del Pattern*.

Raggiungiamo il piano successivo tramite il primo **segmento verde** e tracciamo altri $q$ **segmenti rossi**, questa volta in ordine inverso rispetto al primo piano (come in *Figura a* e in *Figura b*).

Reiteriamo il processo fino ad aver tracciato $q$ **segmenti rossi** anche sul piano numero $n_3$ (ultimo, e opposto al piano iniziale).

Dopodiché, si nota che i punti rimanenti, di ugual numero per ogni piano e "allineati" tra loro, come mostrato in *Figura b*, sono pari al numero totale dei punti di ogni piano ($n_1 \times n_2$) meno il numero di punti già collegati tramite i $q$ **segmenti rossi**, che chiamiamo $p$, per un totale di $n_1 \times n_2 - p$ per ogni singolo piano.

Dall'ultimo punto raggiunto sull'ultimo piano, dopo aver tracciato gli ultimi $q$ **segmenti rossi**, si traccia quindi un **segmento giallo** verso il primo degli $n_1 \times n_2 - p$ punti dello stesso piano, e poi se ne traccia uno **blu** per collegare altri $n_3 - 1$ punti rimanenti. Come mostrato in *Figura b*, ci si sposta nuovamente sullo stesso piano e si ripete fino a esaurire i punti residui, "bucando" i vari piani tra i due esterni tramite i **segmenti blu**, alternati ai **segmenti gialli** di collegamento tra i vari punti di uno stesso piano (*Figura a* e *Figura b*).

**Figura a)**

$n_1$=6, $n_2$=5, $n_3$=4, q=7, p=25, $n_1 \times n_2$-p=3

Numero dei *segmenti rossi*: *q* segmenti del *Pattern* per ognuno dei $n_3$ piani

Numero dei *segmenti verdi*: $n_3-1$ segmenti per collegare gli $n_3$ piani

Numero dei *segmenti gialli*: $n_1 \times n_2 - p$ segmenti per collegare gli $n_1 \times n_2 - p$ punti rimanenti a due a due

Numero dei *segmenti blu*: $n_1 \times n_2 - p$ segmenti per collegare gli $n_1 \times n_2 - p$ punti rimanenti del primo piano con gli $n_1 \times n_2 - p$ punti del piano numero $n_3$, passando per $n_3$ punti con ogni segmento

Totale dei segmenti utilizzati:
$h_{6;\,5;\,4} = q \times n_3 + n_3 - 1 + n_1 \times n_2 - p + n_1 \times n_2 - p = 7 \times 4 + 4 - 1 + 7 \times 4 - 25 + 7 \times 4 - 25 = 37$

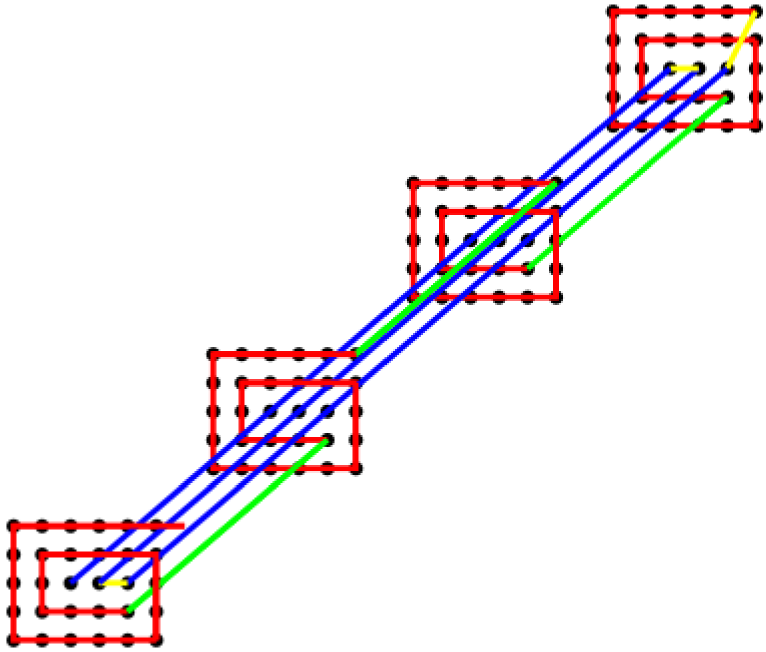
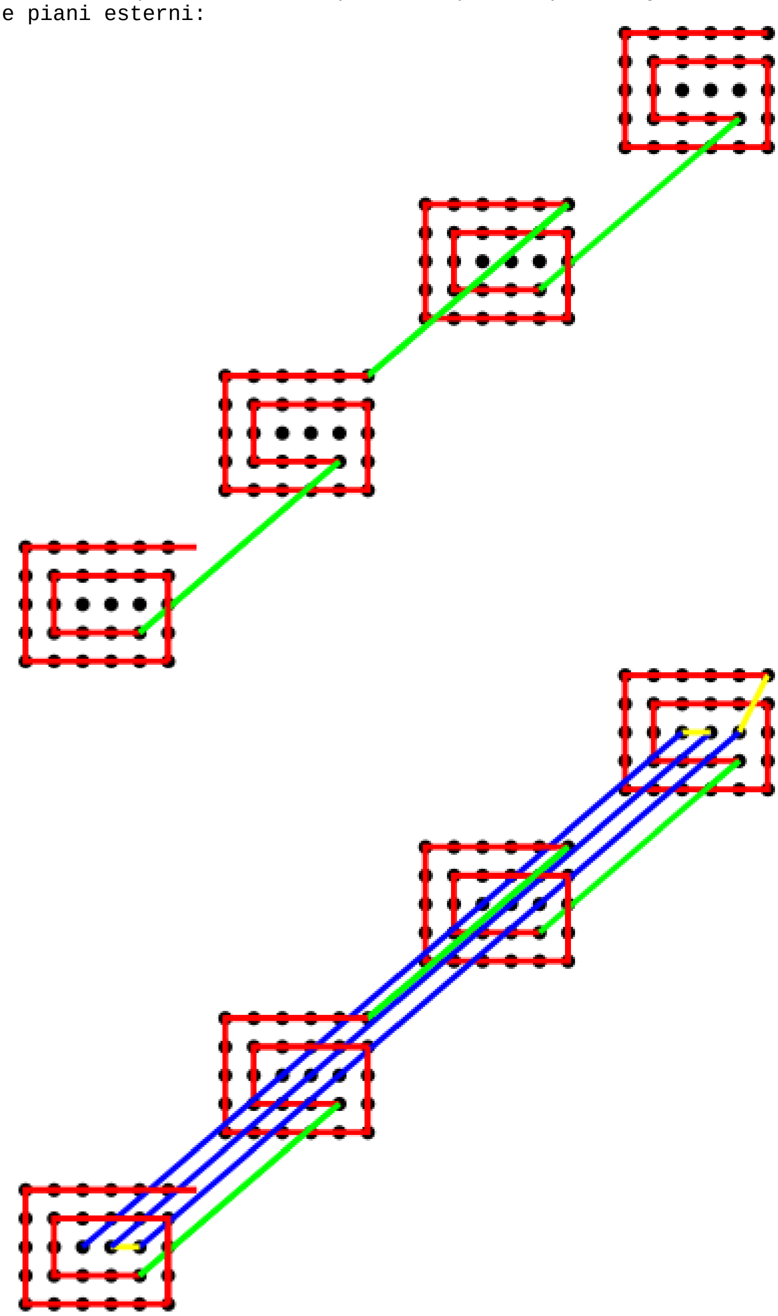
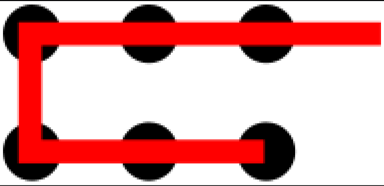
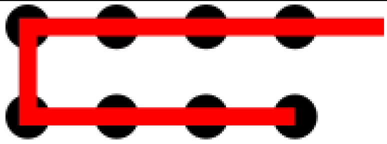
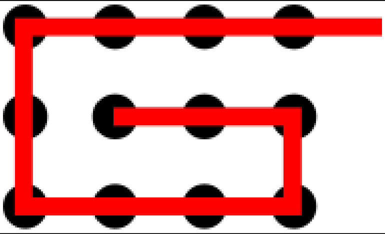
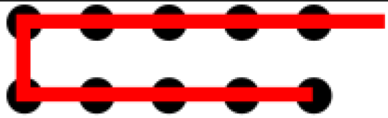
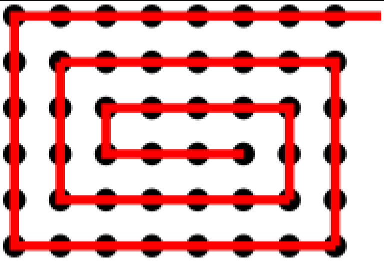
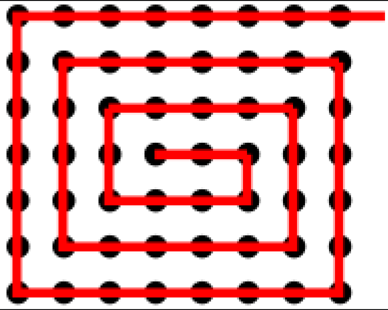


**Figura b)**

Nella prima immagine, sono visibili i *$q$ segmenti rossi*, i *$n_3-1$ segmenti verdi* e i *$n_1 \times n_2-p$* punti per cui non passa ancora alcun segmento, 3 per ogni piano, mentre nella seconda figura sono mostrati i *segmenti blu* che "bucano" i piani interni, passando per $n_3$ punti ognuno, e i *segmenti gialli* di collegamento sui due piani esterni:



## Descrizione del Pattern

| $n_1=3;\ n_2=2$ | $n_1=4;\ n_2=2$ |
|---|---|
|  |  |
| $n_1=4;\ n_2=3$ | $n_1=5;\ n_2=2$ |
|  |  |
| … | … |
| $n_1=8;\ n_2=6$ | $n_1=8;\ n_2=7$ |
|  |  |
| … | … |

Per poter disegnare il *Pattern*, è necessario posizionare la griglia in maniera tale da avere il numero di punti per colonna pari a $n_1$ e il numero di punti per riga pari a $n_2$, in maniera tale da minimizzare il numero di segmenti utilizzati, avendo $n_1>n_2$. Il perché applicare il nostro Pattern ai piani $n_1 \times n_2$ appare scontanto, essendo $n_1>n_2 \geq n_3$, e dovendo minimizzare il numero di segmenti utilizzati.
Il primo segmento del *Pattern* va tracciato dal punto in alto a destra, si procede verso sinistra bucando fino al punto in alto a sinistra, si scende fino a raggiungere il punto in basso a sinistra e così via.

## Calcolo di p

Poiché *p* è definito come il numero di punti attraversati da *q* segmenti del *Pattern*, per calcolarlo si raggruppano inizialmente i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli già attraversati dai segmenti precedenti:

| **Numero segmento** (**q**) | **Numero punti** (con $\mathbf{n_1>n_2}$, $\forall\ n_1 \in N\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$, $\forall\ n_2 \in N\backslash\{0;\ 1\}$) |
|---|---|
| 1 | $n_1$ |
| 2 | $n_2-1$ |
| 3 | $n_1-1$ |
| 4 | $n_2-2$ |
| 5 | $n_1-2$ |
| 6 | $n_2-3$ |
| 7 | $n_1-3$ |
| … | … |

Sommando in progressione i valori del *Numero* punti, si ottiene *p*.

| **p** (con $n_1>n_2$, ∀ $n_1$ ∈ N\{0; 1; 2}, ∀ $n_2$ ∈ N\{0; 1}) |
|---|
| $n_1$ |
| $n_1+n_2-1$ |
| $2\times n_1+n_2-2$ |
| $2\times n_1+2\times n_2-4$ |
| $3\times n_1+2\times n_2-6$ |
| $3\times n_1+3\times n_2-9$ |
| $4\times n_1+3\times n_2-12$ |
| … |

Poiché *p* scritto nella forma $k_1\times n_1+k_2\times n_2+k_3$, troviamo $k_1$, $k_2$ e $k_3$:
Posto $n_1>n_2$, ∀ $n_1$ ∈ N\{0; 1; 2}, ∀ $n_2$ ∈ N\{0; 1}:

- Se **q=1**:
  $p = n_1$
- Se **q=2×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $p = 1\div 2\times q\times n_1+1\div 2\times q\times n_2-(1\div 2\times q)^2$
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $p = 1\div 2\times(q+1)\times n_1+1\div 2\times(q-1)\times n_2-1\div 4\times(q+1)\times(q-1)$

Sapendo che $n_1\times n_2-p$ corrisponda al numero di punti del *Pattern* che restano ancora da congiungere dopo aver tracciato *q* linee, definiamo $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$ come $q\times n_3 + n_3-1 + 2\times(n_1\times n_2-p)$, al variare di *q*, $n_1$, $n_2$ ed $n_3$, e lo calcoliamo sulla base del valore di *p* appena trovato.

Posto $n_1>n_2\geq n_3$, ∀ $n_1$ ∈ N\{0; 1; 2}, ∀ $n_2$ ∈ N\{0; 1}, ∀ $n_3$ ∈ N\{0; 1}:

- Se **q=1**:
  $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times(n_1\times n_2-n_1)$
- Se **q=2×a**, ∀ a ∈ ℕ\{0}:
  $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times\{n_1\times n_2-[1\div 2\times q\times n_1+1\div 2\times q\times n_2-(1\div 2\times q)^2]\}$
- Se **q=2×a-1**, ∀ a ∈ ℕ\{0; 1}:
  $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3} = q\times n_3 + n_3-1 + 2\times\{n_1\times n_2-[1\div 2\times(q+1)\times n_1+1\div 2\times(q-1)\times n_2-1\div 4\times(q+1)\times(q-1)]\}$

# Formula per il nuovo "upper bound"

Definiamo $\boldsymbol{q_{ottimale}}$ come il miglior valore di $q$ tale che $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$ abbia il minor valore possibile, ovvero il nostro nuovo "upper bound".

Troviamo $\boldsymbol{q_{ottimale}}$ al variare di $n_1$, $n_2$ ed $n_3$:

| $\mathbf{n_1}$ | $\mathbf{n_2}$ | $\mathbf{n_3}$ | $\mathbf{q_{ottimale}}$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 5 |
| 4 | 3 | 3 | 3 |
| | | | 5 |
| 5 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 2 | 5 |
| 5 | 3 | 3 | 5 |
| 5 | 4 | 2 | 7 |
| 5 | 4 | 3 | 5 |
| | | | 7 |
| 5 | 4 | 4 | 5 |
| 6 | 2 | 2 | 3 |
| 6 | 3 | 2 | 5 |
| 6 | 3 | 3 | 5 |
| 6 | 4 | 2 | 7 |
| 6 | 4 | 3 | 7 |
| 6 | 4 | 4 | 5 |
| | | | 7 |
| 6 | 5 | 2 | 9 |
| 6 | 5 | 3 | 7 |
| | | | 9 |
| 6 | 5 | 4 | 7 |
| … | … | … | … |

I valori di $\boldsymbol{q_{ottimale}}$ risultano i seguenti:
Posto $\mathbf{n_1>n_2\geq n_3}$, $\forall\ n_1 \in N\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$, $\forall\ n_2 \in N\backslash\{0;\ 1\}$, $\forall\ n_3 \in N\backslash\{0;\ 1\}$:

- Se $\mathbf{n_1-n_2-n_3\geq -1}$:
  $q_{ottimale} = 2\times n_2-1$
- Se $\mathbf{n_1-n_2-n_3=-2\times m}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:
  $q_{ottimale} = n_1+n_2-n_3-1 \lor q_{ottimale} = n_1+n_2-n_3+1$
- Se $\mathbf{n_1-n_2-n_3=-2\times m+1}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0;\ 1\}$:
  $q_{ottimale} = n_1+n_2-n_3$

Per ottenere il nuovo "upper bound", si calcola il valore minimo di $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$, sostituendo $q$ con $\boldsymbol{q_{ottimale}}$:
Posto $\mathbf{n_1>n_2\geq n_3}$, $\forall\ n_1 \in N\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$, $\forall\ n_2 \in N\backslash\{0;\ 1\}$, $\forall\ n_3 \in N\backslash\{0;\ 1\}$:

- Se $\mathbf{n_1-n_2-n_3\geq -1}$:
  $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3} = 2\times n_2\times n_3-1$
- Se $\mathbf{n_1-n_2-n_3=-2\times m}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:
  $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3} = -1\div 2\times n_1^2+n_1\times n_2+n_1\times n_3-1\div 2\times n_2^2+n_2\times n_3-1\div 2\times n_3^2-n_1+n_2+n_3-1$
- Se $\mathbf{n_1-n_2-n_3=-2\times m+1}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0;\ 1\}$:
  $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3} = -1\div 2\times n_1^2+n_1\times n_2+n_1\times n_3-1\div 2\times n_2^2+n_2\times n_3-1\div 2\times n_3^2-n_1+n_2+n_3-3\div 2$

Condensando tutto in una formula unica, si ottiene:
Posto $\mathbf{n_1>n_2\geq n_3}$, $\forall\ n_1 \in N\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$, $\forall\ n_2 \in N\backslash\{0;\ 1\}$, $\forall\ n_3 \in N\backslash\{0;\ 1\}$:

$$h_{n_1;n_2;n_3}=\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{1}{3n_1-3n_2-3n_3+5}\right\rfloor[(n_1-n_2-n_3)(n_1-n_2-n_3+1)-2\left\lfloor\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}\right\rfloor]+2n_2n_3-1$$

Per poter apprezzare il nuovo "upper bound", viene mostrata una tabella con i valori di $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$, per il caso $n_1-1=n_2=n_3$. Si nota che i valori per $h_{3;\ 2;\ 2}$ e $h_{4;\ 3;\ 3}$ coincidono con la soluzione esatta al problema.

| **$n_1$-1=$n_2$=$n_3$** | **$h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$** |
|---|---|
| 2 | <u>7</u> |
| 3 | <u>17</u> |
| 4 | 29 |
| 5 | 45 |
| 6 | 63 |
| 7 | 85 |
| 8 | 109 |
| 9 | 137 |
| 10 | 167 |
| 11 | 201 |
| 12 | 237 |
| 13 | 277 |
| 14 | 319 |
| 15 | 365 |
| 16 | 413 |
| 17 | 465 |
| 18 | 519 |
| 19 | 577 |
| 20 | 637 |
| 21 | 701 |
| 22 | 767 |
| 23 | 837 |
| 24 | 909 |
| 25 | 985 |
| … | … |
| 50 | 3847 |
| … | … |

## Estensione al caso k-dimensionale

Il problema $n_1$ X $n_2$ X $n_3$ può essere esteso a dimensioni superiori alla terza, disponendo i punti in una griglia k-dimensionale $n_1$ X $n_2$ X $n_3$ X $n_4$ X … $n_k$, con $k \geq 4$.

Per estendere il nostro "upper bound" al caso k-dimensionale, si può utilizzare il metodo descritto da Ripà nel 2013 [2], definendo $t \coloneqq h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$.

Esso risulta, dunque:

$$h_{n_1;n_2;n_3;n_4;\ldots;n_k}=(t+1)\prod_{b=4}^{k}(n_b)-1$$

Sostituendo $t$, si ottiene:

Posto **$n_1>n_2\geq n_3$, $k\geq 4$**, $\forall\ n_1 \in \mathbb{N}\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$, $\forall\ n_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0;\ 1\}$, $\forall\ n_3 \in \mathbb{N}\backslash\{0;\ 1\}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

$$h_{n_1;n_2;n_3;n_4;\ldots;n_k}=\left\{\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{1}{3n_1-3n_2-3n_3+5}\right\rfloor\left[(n_1-n_2-n_3)(n_1-n_2-n_3+1)-2\left\lfloor\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}\right\rfloor\right]+2n_2n_3\right\}\prod_{b=4}^{k}(n_b)-1$$

Considerando, ora, il miglior "upper bound" di $h_{n\_1;\ n\_2;\ n\_3}$ per $n_1=n_2=n_3=n$, ottenuto da me e Ripà [3], anch'esso può essere esteso al caso k-dimensionale, con $k \geq 3$, utilizzando il metodo descritto da Ripà e Remirez nel 2013 [4], definendo $t \coloneqq h_{n;\ n;\ n}$.

Esso diventa, dunque:

$$h_{n;n;n;\ldots;n}=(t+1)n^{k-3}-1$$

Sostituendo $t$, si ottiene:
Per **n≥6**, **k≥3**, ∀ n ∈ ℕ, ∀ k ∈ ℕ:

$$h_{n;n;n;\ldots;n}=\left(\left\lfloor\frac{3}{2}n^2\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor+n-1\right)n^{k-3}-1$$

## Bibliografia


[1] Loyd, S., *Cyclopedia of Puzzles*. *The Lamb Publishing Company*, 1914, p. 301
[2] Ripà, M., *The Rectangular Spiral Solution for the n_1 X n_2 X … X n_k Points Problem*, *viXra*, 11 Jan. 2014, http://vixra.org/pdf/1307.0095v3.pdf
[3] Ripà, M., Bencini, V., *The n X n X n Dots Problem: An Improved "Outside the Box" Upper Bound*, *viXra*, 25 July 2018, http://vixra.org/pdf/1807.0384v2.pdf
[4] Ripà, M., Remirez, P., *The Nine Dots Puzzle Extended to Nxnxn…xn Points*, *viXra*, 5 Sept. 2013, http://vixra.org/pdf/1307.0021v4.pdf