

能量守恒定律的再探讨

赵永强

E-mail: zhao671116@163.com

摘要: In this paper, we will obtain the electric field of static point charge in uniform gravitational field by analyzing the electric field of uniformly accelerating linear moving point charge, and further discuss the Law of Conservation of Energy by analyzing the interaction between charges in gravitational field. // 在本文中我们将通过分析匀加速直线运动点电荷的电场, 得出均匀引力场中静止点电荷的电场, 并通过分析引力场中电荷之间的相互作用, 来进一步探讨能量守恒定律。

关键词: 能量守恒定律 扰动电场 非保守场 均匀引力场 自作用力

1. 前言:

能量守恒定律, 被认为是自然界最普遍的基本定律之一, 它表明能量既不能被创造, 也不会凭空消失, 它是人们对经验总结得出的结论, 并没有任何人能够证明它就是正确的, 至今也没有发现有任何违反能量守恒定律的事例, 那么这是否意味着能量守恒定律就是绝对正确的呢? 下面我们将对这一问题进行探讨。

2. 匀加速直线运动点电荷的电场

如图 1 所示, L 为一通电直导线, 在导线旁有一圆形闭合导体回路。我们知道, 当通电直导线中电流均匀增加时, 在导线旁的闭合回路中可以产生感生电动势。为什么在闭合回路中会产生感生电动势呢? 这是因为当通电导线中电流均匀增加时, 穿过闭合导体回路中的磁通量就会均匀增加, 因此在闭合导体回路中就产生了感生电动势。由于通电直导线中的电流是由导线中自由电子的定向移动形成的, 当电流均匀增加时自由电子的定向移动速度就会均匀增加, 这相当于自由电子做匀加速直线运动。闭合回路中的电动势就是由于通电直导线中的自由电子做加速运动产生的, 感生电动势的大小与电子的定向移动加速度有关, 而与其运动速度无关, 这说明加速运动的电荷能够在闭合回路中产生感生电动势, 也可以说加速运动电荷的电场为非保守场。下面我们研究匀加速直线运动点电荷的电场。

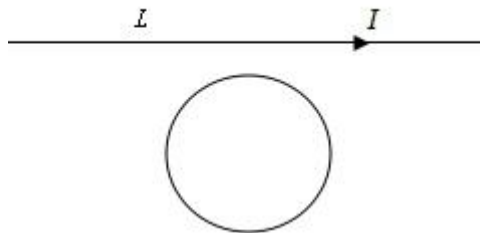


图 1 通电直导线和闭合导体回路

在此我们不做一般的研究，只对一种简单的情况加以研究。假设在真空中的惯性参照系 S 中有一个正的点电荷 q ，电荷 q 原来一直静止在原点 O ，从时刻 $t_0=0$ 开始以加速度 a 沿 y 轴正方向做匀加速直线运动。在时刻 t 时，电荷 q 的速度为 $v=at$ ，为了简单起见我们假设 $v \ll c$ (c 为光速)，下面研究在时刻 t 时电荷 q 的电场。

如图 2 所示，在 t_0 时刻，电荷 q 从原点开始加速，在时刻 t 电荷 q 到达 P 点。在此期间，由于电荷的加速运动，它周围的电场会发生扰动，这一扰动以光速 c 向外传播。在时刻 t ，这一扰动的前沿到达以 O 为中心，以 $r_0=ct$ 为半径的球面上。根据相对论关于光速最大的结论，此时不可能有任何变化的信息传到此球面以外，因此球面以外的电场仍是在 t_0 时刻之前原来电荷 q 静止于 O 点时的静电场，它的电场线是沿着从 O 点引出的沿半径方向的直线，而球面内的电场就是在这段时间内电荷加速运动产生的扰动电场。在电荷的速度远小于光速的情况下，球面内扰动电场相对于电荷的分布，可以看作是近似不变的，就好像扰动电场同电荷一起做加速运动。实际上随着时间的推移，扰动电场不断地由近及远的传播，同时电荷又不断地产生新的扰动电场。

由于电荷 q 做加速运动，球面内扰动电场的电场线不再是直线，而是变为曲线，因此在时刻 t ，球面内的电场线应该是从此时刻 q 所在的 P 点引出的曲线。由高斯定律可知，在球面两侧的电场线总条数应该是相等的，而且电场线在通过球面处也应该是连续的，因此用电场线描绘整个电场时，就应该把球面两侧的电场线一一对应连接，如图 2 所示。

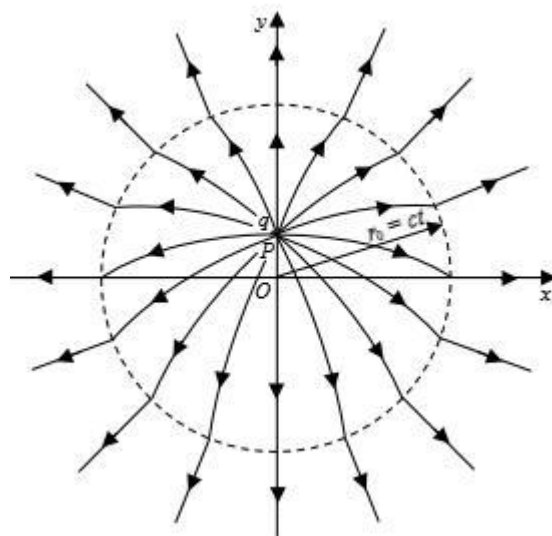


图 2 在时刻 t 加速电荷 q 的电场

现在借助电场线图来分析球面处的扰动电场。如图 3 所示， M 为球面上任意一点， r 为从点 P 到点 M 的径矢，且 r 与 y 轴的夹角为 φ 。在球面内过点 M 的电场线为曲线 PM ，在球面外则是沿着直线 OM 。从 O 到 M 的径矢 r_0 与 y 轴的夹角为 θ 。点 P 距点 O 的距离为 $OP=vt/2$ 。由于 $r_0=ct$ 且 $v \ll c$ ，因而 $OP \ll r_0$ 。

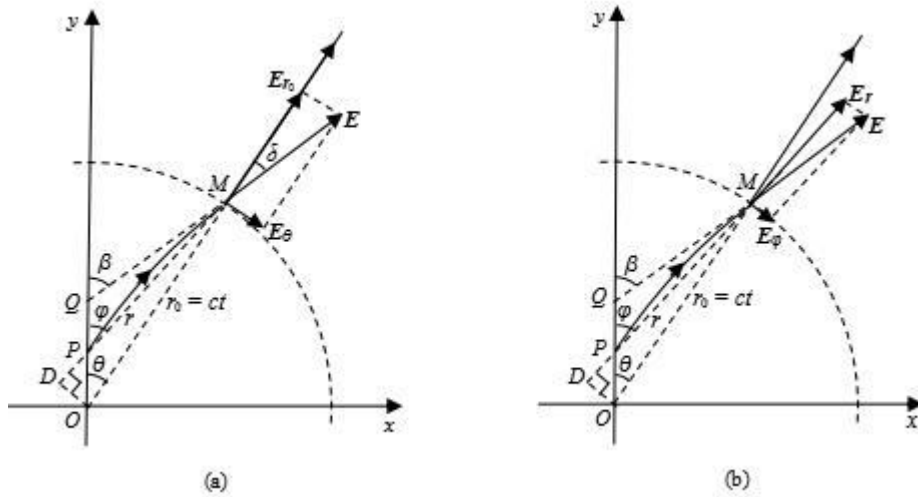


图3 在球面上点 M 处的扰动电场 \mathbf{E} 。(a) \mathbf{E} 被分为 \mathbf{E}_{r_0} 和 \mathbf{E}_θ 两个分量。(b) \mathbf{E} 被分为 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_ϕ 两个分量。

我们来求点 M 处的扰动电场 \mathbf{E} 。 \mathbf{E} 是加速电荷 q 在 O 点产生的此时已传播至点 M 处的扰动电场。 \mathbf{E} 的方向是沿着曲线 PM 在点 M 处的切线方向。 \mathbf{E} 可分为 \mathbf{E}_{r_0} 和 \mathbf{E}_θ 两个分量(见图 3a)。根据高斯定律, 电通量只与垂直于高斯面的电场分量有关, 所以电场线在球面处连续就意味着 \mathbf{E}_{r_0} 分量仍是由库仑定律给出的径向电场, 也就是原来点 M 处的静电场, 即

$$E_{r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (1)$$

\mathbf{E}_θ 分量就是加速电荷 q 产生的横向电场, 即^[1]

$$E_\theta = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} = \frac{v \sin \theta}{c} E_{r_0} \quad (2)$$

由于 $v \ll c$, 所以 $E_\theta \ll E_{r_0}$, 因而可得

$$E = \sqrt{E_{r_0}^2 + E_\theta^2} \approx E_{r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (3)$$

如图 3 所示, 过点 O 作 OD 垂直于直线 PM , 并与直线 PM 相交于点 D 。 \mathbf{E} 的延长线与 y 轴相交于点 Q , 并且与 y 轴的夹角为 β , \mathbf{E} 与 \mathbf{E}_{r_0} 的夹角为 δ 。因此可得

$$\sin \angle OMD = \frac{OD}{r_0} = \frac{\frac{vt}{2} \sin \varphi}{ct} = \frac{v \sin \varphi}{2c} \quad (4)$$

$$\cos \angle OMD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle OMD} = \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin \varphi}{2c}\right)^2} \approx 1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{E_{\theta}}{E} \approx \frac{v \sin \theta}{c} = \frac{v}{c} \sin(\varphi - \angle OMD) \\ &\approx \frac{v}{c} \left(\sin \varphi - \frac{v \sin \varphi \cos \varphi}{2c} \right) \approx \frac{v \sin \varphi}{c}\end{aligned}\quad (6)$$

$$\cos \angle \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \angle \delta} = \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin \varphi}{c} \right)^2} \approx 1 \quad (7)$$

$$\sin \angle QMP = \sin(\delta - \angle OMD) \approx \frac{v \sin \varphi}{c} - \frac{v \sin \varphi}{2c} = \frac{v \sin \varphi}{2c} \quad (8)$$

$$\cos \angle QMP = \sqrt{1 - \sin^2 \angle QMP} = \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin \varphi}{2c} \right)^2} \approx 1 \quad (9)$$

由于

$$r_0 = \frac{DM}{\cos \angle OMD} \approx r + \frac{ar_0^2 \cos \varphi}{2c^2} \approx r + \frac{ar^2 \cos \varphi}{2c^2} \quad (10)$$

因此点 M 处扰动电场 \mathbf{E} 的大小为

$$E = E_{r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{ar^2 \cos \varphi}{2c^2} \right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (11)$$

从图 3b 可以看出, \mathbf{E} 的方向不在径矢 \mathbf{r} 的方向上, 而是向加速度的反方向发生了偏转, 且 \mathbf{E} 与径矢 \mathbf{r} 方向的夹角等于 $\angle QMP$ 。如果把 \mathbf{E} 分为 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_φ 两个分量, 其中 \mathbf{E}_r 为 \mathbf{E} 在径矢 \mathbf{r} 方向上的分量, \mathbf{E}_φ 为 \mathbf{E} 在径矢 \mathbf{r} 垂直方向上的分量(见图 3b), 则

$$E_r = E \cos \angle QMP \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (12)$$

$$E_\varphi = E \sin \angle QMP \approx \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right) \times \frac{v \sin \varphi}{2c} \approx \frac{qa \sin \varphi}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (13)$$

\mathbf{E} 可以用矢量式表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_\varphi = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right) \times \mathbf{e}_r + \frac{qa \sin \varphi}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\varphi \quad (14)$$

假设有一个匀加速运动的参照系 S' , 加速电荷 q 相对于 S' 系始终静止。如果在 S' 系中观察, 电荷 q 周围的扰动电场相对于电荷 q 的分布是固定不变的, 并且根据等效原理, 该电场同电荷 q 在与 S' 系等效的引力场中静止时的电场相同。

在 S 系中, 在 $v \ll c$ 的情况下, 电荷 q 周围的扰动电场与在 S' 系中近似相同, 并且随着时间的推移, 之前在电荷 q 周围扰动电场的分布是近似不变的, 也就是说在电荷 q 周围相对于电荷 q 任意一点处的扰动电场是一近似恒量, 所以电荷 q 周围任意一点的扰动电场都可以用式 (14) 近似表示, 此时式中 r 表示该点距电荷 q 的距离, φ 表示电荷 q 到该点的径矢 \mathbf{r} 与加速度方向的夹角。由于 $v = ar_0/c \approx ar/c$,

因此, 当 $v \ll c$ 时, 我们可以得到 $r \ll c^2/a$, 这就是上式中 r 的取值范围。如果加速电荷为负电荷, 则负电荷与正电荷产生的扰动电场大小相等方向相反。

E 在加速度垂直方向的分量为

$$\begin{aligned}
 E_{\perp} &= E \sin \beta = E \sin(\varphi + \angle QMP) \approx E \left(\sin \varphi + \frac{v \sin \varphi \cos \varphi}{2c} \right) \\
 &\approx \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right) \times \left(\sin \varphi + \frac{a r \sin \varphi \cos \varphi}{2c^2} \right) \\
 &\approx \frac{q \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{a r \cos \varphi}{2c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

图 4 表示做匀加速直线运动的正的点电荷 q 的扰动电场, 其中 $ABCD$ 为一闭合回路, BC 和 AD 是以 q 为圆心的两个同心圆的弧, BA 和 CD 是沿径向的两个线段。我们求电场沿这一闭合回路的线积分。由式(13)可知, 电场沿 BC 和 DA 的线积分的大小相等, 因此它们相互抵消, 对总积分无贡献。由式(12)可知, 线段 BA 上的电场强度小于线段 CD 上的电场强度, 而此两个线段的长度相等, 所以电场沿这两线段的线积分的大小不相等。因此, 电场沿此闭合回路的线积分不为零, 即 $\oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ 。这一结果表明, 匀加速直线运动点电荷的扰动电场不是保守场。这与通电直导线中电流变化时在导线旁闭合导体回路中可以产生感生电动势的事实是相符的, 这也反过来证明式(14)是正确的。

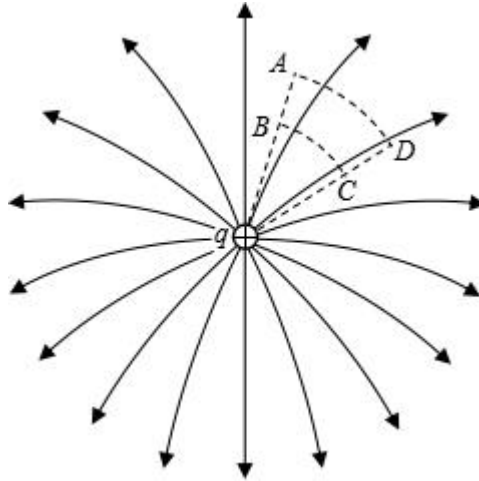


图 4 匀加速直线运动点电荷 q 的扰动电场

3. 讨论

假设在真空中某惯性参照系 S 中有一个正的点电荷 q 和一个带均匀正电荷的细圆环, 电荷和圆环在同一平面内, 圆环可绕圆心 O 转动, 如图 5 所示。现在假设电荷和圆环一起以加速度 a 做匀加速直线运动, 并且圆环上电荷的分布始终保持不变。由于电荷 q 做匀加速直线运动, 在它周围就会产生不断增强的磁场, 通过圆环的磁通量就会不断增加, 因此根据法拉第电磁感应定律, 在圆环闭合回路中就会不断产生感生电动势。感生电动势正是由于加速电荷产生的扰动电场的非保守性而产生的。由于圆环均匀带电, 在扰动电场的作用下, 带电圆环将会受

到一个沿逆时针方向的转动力矩。在摩擦力可以忽略的情况下，圆环将绕圆心 O 加速转动。假设有一个匀加速参照系 S' ，上述做加速运动的电荷和圆环在 S' 系中始终静止，那么在 S' 系中的观察者也会看到圆环绕点 O 作加速转动。根据等效原理，在与 S' 系等效的均匀引力场中，如果上述的电荷和带电圆环静止在其中，那么在不考虑摩擦力的情况下，圆环也会绕点 O 加速转动，因此圆环的动能就会不断增加。在这个过程中，圆环增加的动能是由电荷周围的非保守电场对带电圆环做功产生的，它并不伴随其它能量的减少，所以在这种情况下能量不再守恒。在现实中理想的均匀引力场是不存在的，但是在地球上方的局部引力场可以看作是近似的均匀引力场，因此可以用地球上方的局部引力场代替均匀引力场。

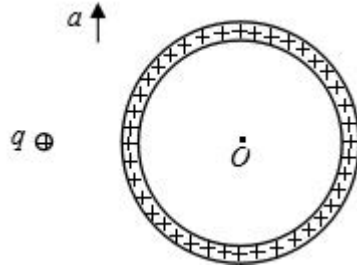


图5 电荷 q 和均匀带电圆环一起做匀加速直线运动

假设在一个重力加速度为 g 的均匀引力场中，有一个绝缘材料构成的圆锥体，并放置在一光滑水平面上， O 为圆锥体底面圆的圆心，在圆锥体的顶点固定一个正的点电荷 q_1 ，在圆锥体底边上固定一个正的点电荷 q_2 ， q_1 和 q_2 之间的距离为 r ， q_1 和 q_2 的连线与底面的夹角为 θ ，如图 6 所示。假设 $r \ll c^2/g$ ，则电荷 q_2 在电荷 q_1 处的电场可以用式 (14) 近似表示。从而就可以根据式 (15) 求出电荷 q_2 在电荷 q_1 处的电场在水平方向上的分量，然后可以求出 q_1 受到 q_2 电场的作用力在水平方向上的分量为

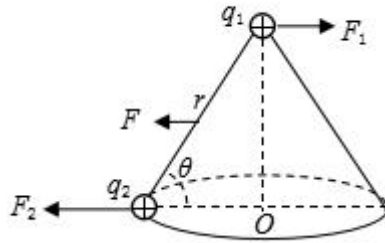


图6 在均匀引力场中电荷系 (q_1 和 q_2) 的自作用力

$$F_1 \approx \frac{q_1 q_2 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{gr \sin \theta}{2c^2} \right) \quad (16)$$

同理， q_2 受到 q_1 电场的作用力在水平方向的分量为

$$F_2 \approx \frac{q_1 q_2 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{gr \sin \theta}{2c^2} \right) \quad (17)$$

由于 F_1 和 F_2 的方向相反，因此它们的合力为

$$F = F_2 - F_1 \approx \frac{q_1 q_2 g \sin\theta \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (18)$$

上式表明 F_1 和 F_2 不能相互抵消，因此电荷系 (q_1 和 q_2) 将受到一个水平方向的自作用力 F ， F 也将作用于圆锥体上。如果不考虑圆锥体和水平面之间的摩擦力，圆锥体将在力 F 的作用下，沿水平方向做加速运动。圆锥体的动能将会不断增加，其增加的动能是由电荷系的自作用力做功产生的，在这个过程中并不伴随其它能量的减少，因此在这种情况下能量也会出现不守恒。

4. 结论

通过以上分析可以看出，能量守恒定律不是绝对正确的，能量是可以被创造的。能量守恒定律经过了大量实验的验证，在通常情况下能量都是守恒的，但在某些特殊情况下能量也可以出现不守恒。

参考文献

- [1] 张三慧. 电磁学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 373-377.