# Démonstration de la conjecture de Legendre par AF. Michaël

afmichael73@gmail.com

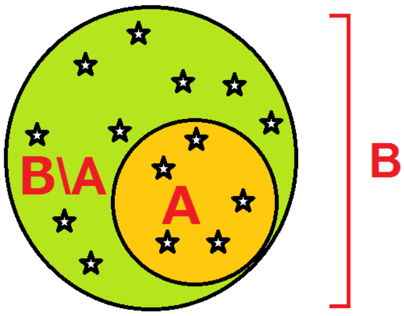
Table des matières

# 1 Enoncé

Legendre a conjecturé que : " Il existe au moins un nombre premier entre n² et (n+1)² pour tout entier $n \geq 1$ ."

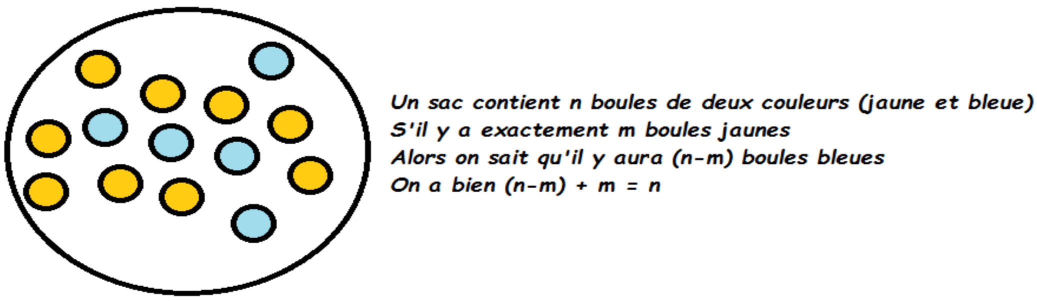
# 2 Preuve

A titre de rappel, le cardinal d'un ensemble n'est rien d'autre que le nombre d'élément de cet ensemble.
Soient A, B deux ensembles avec $A \subseteq B$




Card(B\A) + Card(A) = Card(B)

On peut conclure d'après cette image alors que Card(B\A) = Card(B) - Card(A)
Voici un petit exemple




Dans la suite, on notera P comme étant l'ensemble des nombres premiers.

Notons $P_n$ l'ensemble défini par $P_n = \{N \in P / N \leq n\}$ c'est-à-dire l'ensemble qui contient tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Dans le cas où n n'est pas premier, on peut exclure la possibilité que n appartienne à $P_n$ .
$P_n = \{N \in P / N < n\}$
Pour un entier $a \in \mathbb{N}$ , on en déduit donc que $P_{a^2} = \{N \in P / N < a^2\}$ car le carré d'un nombre ne peut être un nombre premier.

## 2.1 Théorème

Soient m, n deux entiers positifs si n < m alors $P_n \subseteq P_m$

Ce théorème se déduit par le fait que $P_m$ contient tous les nombres premiers inférieurs à m et comme n < m alors il doit aussi contenir au moins les éléments de $P_n$ .

* Ce théorème implique donc que $\forall n \in \mathbb{N} \; P_{n^2} \subseteq P_{(n+1)^2}$

Le nombre de nombres premiers entre n² et (n+1)² est en fait le cardinal de $P_{(n+1)^2} \setminus P_{n^2}$ car il ne doît pas contenir le nombre de nombres premiers inférieurs à n²+1 et supérieurs à (n+1)²-1 ( étant donné que n² et (n+1)² ne sont pas premier ).

On obtient alors l'égalité $Card(P_{(n+1)^2} \setminus P_{n^2}) = Card(P_{(n+1)^2}) - Card(P_{n^2})$

## 2.2 Théorème fondamental des nombres premiers

Dans la suite, posons $\pi(x) = Card\, P_x$
Grâce aux efforts d'Euler, de Gauss et de La Vallée Poussin on a pu établir le comportement asymptotique de π(x)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} (x \to +\infty)$$

Le logarithme intégral permet d'obtenir de meilleures approximations

$$\pi(x) \sim li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} (x \to +\infty)$$

La fonction Li(x) nettement plus proche de $\pi(x)$ que li(x) sera privilégiée ici pour tout x > 2 :

$$\pi(x) \sim li(x) \sim Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} (x \to +\infty)$$

On admettra donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{Li(x)}{\pi(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{li(x)}{\pi(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{Li(x)}{li(x)} = 1$$

Il nous suffit donc d'étudier une fonction équivalente à Π(x) de notre choix pour que nous puissions démontrer la conjecture.

Et en posant $\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$
Les résultats précédents nous permettent d'affirmer l'égalité

$$Card(P_{(n+1)^2} \setminus P_{n^2}) = Card(P_{(n+1)^2}) - Card(P_{n^2}) = \pi((n+1)^2) - \pi(n^2)$$

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) = \int_2^{(x+1)^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_2^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_2^{x^2} \frac{dt}{\ln t} + \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_2^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\ln t}$$

Donc entre x² et (x+1)² il y a approximativement $\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\ln t}$ nombres premiers.

En excluant les nombres inférieurs à 2 car calculable à la main, il ne nous reste qu'à prouver que $\forall n \geq 2\ \ \pi((n+1)^2)-\pi(n^2) \geq 1$ **sachant que** pour n=1 la conjecture est vérifiée.

Comme

$$0<2^2<n^2<t<(n+1)^2$$

$$0<\ln n^2<\ln t<\ln(n+1)^2$$

$$\frac{1}{\ln(n+1)^2}<\frac{1}{\ln t}<\frac{1}{\ln(n^2)}$$

$$\frac{1}{\ln(n+1)^2}\int_{n^2}^{(n+1)^2} dt<\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{dt}{\ln t}<\frac{1}{\ln(n^2)}\int_{n^2}^{(n+1)^2} dt$$

$$\frac{1}{\ln(n+1)^2}(n^2+2n+1-n^2)<\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{dt}{\ln t}<\frac{1}{\ln(n^2)}(n^2+2n+1-n^2)$$

$$Soit\ \ \forall n \geq 2\ \ \frac{2n+1}{\ln(n+1)^2}<\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{dt}{\ln t}<\frac{2n+1}{\ln(n^2)}$$

La suite $\left(V_n=\frac{2n+1}{\ln(n+1)^2}\right)_{n\geq 2}$ est strictement croissante. La plus petite valeur possible est pour n=2

$$V_2=\frac{5}{2\ln 3}=2{,}2755980...>1$$

donc

$$\forall n>2\ \ \frac{2n+1}{\ln(n+1)^2}>2{,}2755980...>1$$

ce qui implique

$$\forall n>2\ \ 1<\frac{2n+1}{\ln(n+1)^2}<\int_{n^2}^{(n^2+1)}\frac{dt}{\ln t}$$

On vient de prouver que $\forall n \geq 2\ \ \pi((n+1)^2)-\pi(n^2)>1$ et en rajoutant le cas exclu (le nombre 1) on obtient $\forall n \geq 1\ \ \pi((n+1)^2)-\pi(n^2) \geq 1$

*** La conjecture est démontrée !**