Верификация аксиом, разрешающих задачу о мощности континуума

Ватолин Дм.

Аксиомы выводятся как теоремы канонической теории множеств.

§1. Аксиомы, из которых находится, что мощность континуума действительных чисел существенно больше первого несчётного алефа

Пусть $\mathfrak{int}(S)$ означает внутренность, $\mathfrak{d}S$ – границу множества S. $\mathfrak{card}(S)$ означает мощность S. $\mathfrak{f}\wr S \wr$ означает образ множества S при отображении $\mathfrak{f}$.

Пусть транзитивное отношение $\prec$ задаёт частичный порядок на множестве S так, что $p \prec q$ влечёт $p \neq q$. Тогда, S назовём «счётно разделимым по отношению $\prec$», если верно:

Каковы бы ни были не пустые и не более чем счётные множества $M \subset S$ и $L \subset S$ такие, что для каждого $p \in M$ и каждого $q \in L$ верно $p \prec q$, найдётся элемент $r \in S$ такой, что $\forall p' \in M\ \forall q' \in L$ верно $p' \prec r \prec q'$.

Множество S назовём «счётно безграничным по отношению $\prec$», если:

Каково бы ни было $M \subset S$, $M \neq \emptyset$, $\mathfrak{card}(M) \leqslant \aleph_0$, найдутся $p \in S$ и $q \in S$ такие, что $\forall m \in M$ верно $p \prec m \prec q$.

Если вместо «не более чем счётности» множеств M и L потребовать их конечности, то получим определения «конечной разделимости» и «конечной безграничности» для S. Множество рациональных чисел, к примеру, конечно разделимо и безгранично.

Если ν и η – ординалы, то $\nu < \eta$ равносильно $\nu \in \eta$. Множество всех не более чем счётных ординалов отождествим с ординалом ω_1. Множество всех конечных ординалов, т.е. всех натуральных чисел, отождествим с ординалом $\omega = \omega_0$. В последовательности «длины η» (или «типа η») её элементы пусть «нумеруются» всеми ординалами $< \eta$, и только такими ординалами. Пусть элементы f_ν с «номерами» $\nu \in \eta$ для последовательности выбираются в множестве, где действует транзитивное отношение $\prec$. Тогда, последовательность «строго убывает» («строго возрастает»), если $\nu < \mu$ влечёт $f_\nu \succ f_\mu$ ($f_\nu \prec f_\mu$).

Пусть «гиперинтервал» $\mathfrak{I}_1$ – множество всех обычных, канонических последовательностей длины ω_1, элементами которых берутся нули и единицы. Последовательности $\in \mathfrak{I}_1$ упорядочим лексикографически. Последовательность, состоящую только из единиц, обозначим 1, она есть максимальный элемент $\in \mathfrak{I}_1$. Минимальный элемент $0 \in \mathfrak{I}_1$ – последовательность нулей. Элементы $\in \mathfrak{I}_1$ называем «точками», они же – бесконечные «записи», отождествляемые с точками.

Элементы $X \in \mathfrak{T}_1$ и $Y \in \mathfrak{T}_1$ отождествим, определим эквивалентными, как разные «записи» одной точки, и пишем $X = Y$, если – по лексикографическому сравнению – между X и Y не найдётся никакого другого элемента $\in \mathfrak{T}_1$. Если тогда же, в лексикографическом сравнении X меньше Y, то X назовём «меньшей записью», Y – «большей» – для точки, которую обозначают данные записи. К примеру, всё это верно, когда $X(0) = 0$, для всех ординалов $\nu > 0$ верно $X(\nu) = 1$, и $Y(0) = 1$, и для всех $\nu \in \omega_1$, $\nu > 0$ верно $Y(\nu) = 0$.

Открытым (замкнутым, полуоткрытым справа, слева) интервалом $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{T}_1$ с концами в точках $A \in \mathfrak{T}_1$ и $B \in \mathfrak{T}_1$ назовём множество всех точек $X \in \mathfrak{T}_1$, для которых $A < X < B$ ($A \leqslant X \leqslant B$, $A \leqslant X < B$, $A < X \leqslant B$).

Множество $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}_1$ «всюду плотно в $\mathfrak{T}_1$», если на любом интервале $\subset \mathfrak{T}_1$ найдутся точки множества $\mathfrak{S}$. Множество $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}_1$ «нигде не плотно в $\mathfrak{T}_1$», если на любом интервале $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}_1$ найдётся интервал $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$, не содержащий точек $\in \mathfrak{S}$.

Теоремами здесь называются доказуемые утверждения. Тогда для $\mathfrak{T}_1$ проверяема следующая теорема канонической теории множеств

Теорема I. Существует такое множество $\mathfrak{B}_1$, которое счётно разделимо, всюду плотно в $\mathfrak{T}_1$ и имеет мощность континуума действительных чисел.

Канторовой континуум-гипотезе эквивалентны

Гипотеза I. Существует множество S, каждый элемент которого $\subset \omega_1$, и S счётно разделимо и счётно безгранично по отношению $\subset$.

Гипотеза II. Существует множество мощности $\aleph_1$, всюду плотное в $\mathfrak{T}_1$.

Пусть сектор D – пересечение открытого единичного евклидова круга с прямым углом, содержащим свою вершину O в центре круга, и $\mathrm{int}(D) = D$. И пусть, дуга окружности $C \subset \mathfrak{d}D$ содержит свои концы X и Y на сторонах такого прямого угла.

Обозначим через C_r дугу $\subset D$, концы которой X_r и Y_r не принадлежат C_r, находятся на отрезках OX и OY соответственно, а сама дуга C_r включена в окружность радиуса $r = \mathrm{const} < 1$, описанную из центра O. На каждой дуге C_r и на дуге C введём линейный порядок: если точки P и Q обе находятся на дуге C_r, или обе находятся на дуге C, то говорим, что «P левее Q» («Q правее P»), и обозначаем $P < Q$, если угол XOQ < угол XOP. Сектор D есть объединение всех таких дуг C_r ненулевой длины, для которых $r < 1$.

С линией $\in \mathbf{H}$ отождествим каждую линию $k \subset \mathrm{int}\,D$, выходящую из точки O и завершающуюся на дуге C (в частности, в точке на C) так, что для каждого положительного $r < 1$ множество $k \cap C_r$ состоит из одной точки.

Тогда, для q и p ∈ $\mathfrak{H}$, пишем $q \ll p$, если для всех достаточно больших $r < 1$ точка $q \cap C_r$ находится левее точки $p \cap C_r$, или точка $p \cap C_r$ правее $q \cap C_r$. Тогда, говорим, что «q завершается левее p», или «p завершается правее q». И так же для q и p ∈ $\mathfrak{H}$ пишем $q \asymp p$, т.е. q и p «эквивалентны», когда для всех достаточно больших $r < 1$ точки $q \cap C_r$ и $p \cap C_r$ совпадают. Если верно, что $q \asymp p \vee q \ll p \vee p \ll q$, то q и p назовём «сравнимыми».

Следующие две теоремы суть теоремы канонической теории множеств:

Теорема II. Множество $\mathfrak{H}$ счётно разделимо и счётно безгранично по отношению $\ll$.

Теорема III. Существует счётно разделимое и счётно безграничное по отношению $\ll$ множество $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$ такое, что каждые два элемента $\in \mathfrak{G}$ сравнимы, мощность множества $\mathfrak{G}$ равна $2^{\aleph_0}$, длина монотонных последовательностей, элементы которых взяты в $\mathfrak{G}$, не превышает ω_1.

Используя счётную разделимость множества $\mathfrak{H}$, можно строить трансфинитные, длины ω_1, строго возрастающие и строго убывающие последовательности линий $\in \mathfrak{H}$. Отсюда в качестве гипотезы находится.

Аксиома I. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – произвольные непустые подмножества $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{card}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = \aleph_1$, и каждые два элемента из множества $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ сравнимы. Пусть так же каждая линия множества $\mathfrak{A}$ завершается на дуге C левее каждой линии множества $\mathfrak{B}$. Тогда, существует линия $h \in \mathfrak{H}$, которая завершается на C правее каждой линии множества $\mathfrak{A}$ и левее каждой линии множества $\mathfrak{B}$.

Для нарушения континуум-гипотезы уже достаточно того, что длина трансфинитных последовательностей линий $\in \mathfrak{H}$ не больше ω_1. Действительно, мощность множества $\mathfrak{H}$ равна $2^{\aleph_0}$, т. к. $\mathfrak{H}$ задано непрерывными функциями, которых всего $2^{\aleph_0}$. С другой стороны, количество сечений в множестве $\mathfrak{H}$ не меньше чем $2^{\aleph_1}$. Каждому сечению по аксиоме I соответствует некоторая линия $h \in \mathfrak{H}$. Поэтому, мощность множества $\mathfrak{H}$ равна $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$. Более детальные доказательства по этому поводу даны в [1].

Аксиома II. Для произвольного $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}$ такого, что $\mathfrak{card}\, \mathfrak{A} = \aleph_1$, и когда все элементы из $\mathfrak{A}$ сравнимы между собой, найдётся линия $h \in \mathfrak{H}$, которая завершается на дуге C правее каждой линии множества $\mathfrak{A}$.

Из аксиомы II отрицание континуум-гипотезы извлекаемо более явно. Второй аксиоме эквивалентны следующие три утверждения:

Утверждение I. Для произвольных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, когда $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{card}\,\mathfrak{A} = \aleph_1$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{card}\,\mathfrak{B} = \aleph_0$, таких, что каждая линия $\in \mathfrak{A}$ завершается на дуге C левее каждой линии $\in \mathfrak{B}$, найдётся линия $h \in \mathfrak{H}$, для которой $q \ll h \ll p$ при любых $q \in \mathfrak{A}$ и $p \in \mathfrak{B}$.

Утверждение II. Пусть произвольное $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}$ таково, что $\mathfrak{card}\,\mathfrak{A} = \aleph_1$, и существует $q \in \mathfrak{H}$ так, что для каждой $p \in \mathfrak{A}$ верно $p \ll q$. Тогда, существует линия $h \in \mathfrak{H}$, для которой, каков бы ни был $p \in \mathfrak{A}$, верно $p \ll h \ll q$.

Утверждение III. Пусть S и $S(n, m)$ вполне упорядоченные множества, $n, m \in \omega, \forall n\, S(n, m+1) \supseteq S(n, m)$, $S = \bigcup_{m\in\omega} S(n, m)$, $\mathfrak{card}\, S = \mathfrak{card}\, S(n, m) = \aleph_1$. Тогда, существует возрастающая функция f такая, что для каждой $P \in S$, при всех достаточно больших $n \in \omega$ (зависящих от P), $S(n, f(n)) \ni P$.

Весьма просто аксиомы расширяемы так, что в них увеличивается длина трансфинитных последовательностей. Из расширения аксиомы I выводимы:

Утверждение IV. Каков бы ни был ординал α, $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_0} > \aleph_\alpha$.

Утверждение V. Мощность множества действительных чисел больше мощности любого вполне упорядоченного множества.

§2. Теоремы логики, на которые опирается окончательное доказательство

Пусть $\mathfrak{F}$ – фиксированный ультрафильтр над $\Omega = \omega$, не содержащий конечных множеств $\subset \Omega$, $\mathcal{T}$ – теория. В качестве $\mathcal{T}$, в конечном итоге, выберем «каноническую теорию множеств». Последнее пусть означает, что теория $\mathcal{T}$ содержит аксиомы, эквивалентные аксиомам $\mathcal{ZFC}$, но имеет и константы ω, ω_1, и другие обычные константы. Средствами теории $\mathcal{T}$ определим теорию $\mathcal{S}$ известным способом теории ультрапроизведений, которому придан вид, подходящий для дальнейших доказательств: Предметы теории $\mathcal{S}$, названные «$\mathcal{S}$-предметами», суть – произвольные функции, определённые на множестве Ω, т.е. последовательности, значения которых предметы теории $\mathcal{T}$, именуемые «$\mathcal{T}$-предметами». Когда $\mathcal{T}$ – каноническая теория множеств, предметы теории $\mathcal{T}$ – обычные множества, они названы «$\mathcal{T}$-множествами». Тогда, $\mathcal{S}$-предметы – последовательности $\mathcal{T}$-множеств – назовём «$\mathcal{S}$-множествами». Переменные и константы, принимающие значения $\mathcal{T}$-предметов, назовём «$\mathcal{T}$-переменными» и «$\mathcal{T}$-константами». Переменные и константы, принимающие значения только $\mathcal{S}$-предметов, назовём «$\mathcal{S}$-переменными» и «$\mathcal{S}$-константами». Допустим запись $\phi \in \mathcal{T}$, $\phi \in \mathcal{S}$, $t \in \mathcal{T}$ или $t \in \mathcal{S}$ для форул ϕ и предметов t теорий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$.

Пусть, α – атомарная формула теории $\mathcal{T}$, зависящая от $N \in \omega$ свободных переменных t_1, …, t_N, принимающих значения $\mathcal{T}$-предметов, и от $M \in \omega$ $\mathcal{T}$-констант c_1, …, c_M. Т.е. формула α имеет вид $\alpha(t_1, \dots, t_N, c_1, \dots, c_M)$. Формулу $\alpha^{\mathcal{S}}$ трактуем атомарной формулой $\in \mathcal{S}$, «соответствующей» формуле α и имеющей вид $\alpha^{\mathcal{S}}(t_1^{\mathcal{S}}, \dots, t_N^{\mathcal{S}}, c_1^{\mathcal{S}}, \dots, c_M^{\mathcal{S}})$, если $\alpha^{\mathcal{S}}$ имеет вид

$$(\exists S \in \mathfrak{F})\ (\forall n \in S)\ \alpha^{\mathcal{S}}(t_1^{\mathcal{S}}(n), \dots, t_N^{\mathcal{S}}(n), c_1^{\mathcal{S}}(n), \dots, c_M^{\mathcal{S}}(n)),$$

где переменные $t_1^{\mathcal{S}}$, …, $t_N^{\mathcal{S}}$ принимают значения $\mathcal{S}$-предметов, и для каждого $m \in M$ верно $c_m^{\mathcal{S}}(n) = c_m$ каков бы ни был $n \in \Omega$. Т.е. символ $t_j^{\mathcal{S}}$ или $c_j^{\mathcal{S}}$ обозначает функцию, и $t_j^{\mathcal{S}}(n)$ или $c_j^{\mathcal{S}}(n)$ – значение функции для $n \in \Omega$. Символы, или переменные $t_j^{\mathcal{S}}$ и t_j и константы $c_j^{\mathcal{S}}$ и c_j, названы «соответствующими».

Формулу $\psi^{\mathcal{S}}$ определим формулой теории $\in \mathcal{S}$, если найдётся формула $\psi \in \mathcal{T}$ такая, что $\psi^{\mathcal{S}}$ получена заменой в ψ атомарных подформул формулы ψ на соответствующие атомарные формулы теории $\in \mathcal{S}$, и заменой символов $\mathcal{T}$-переменных, в кванторах и атомарных подформулах и символов $\mathcal{T}$-констант в атомарных подформулах на соответствующие символы $\mathcal{S}$-переменных и $\mathcal{S}$-констант. Т.е. переменные в кванторах после замены ограничены строго $\mathcal{S}$-множествами. Формулы $\psi^{\mathcal{S}}$ и ψ также названы «соответствующими» друг другу. Если ψ – аксиома теории $\mathcal{T}$, то $\psi^{\mathcal{S}}$ – аксиома теории $\mathcal{S}$.

Также часто будем уточнять какие предметы мы имеем ввиду, называя их «$\mathcal{S}$-числами», «$\mathcal{S}$-линиями», «$\mathcal{T}$-функциями» и т. п. Пусть для предмета $X \in \mathcal{T}$ одноместный предикат $P \in \mathcal{T}$ истинен, и для примера, $P(X)$ означает «X есть число», и тогда X именуется «$\mathcal{T}$-числом». И тогда, любой предмет $Y \in \mathcal{S}$, для которого верен соответствующий предикат, т.е. верно $P^{\mathcal{S}}(Y)$, именуется «$\mathcal{S}$-числом». Таким же способом именуем предмет по некой характеристике и в других случаях, когда «X есть ординал», «X есть номер» и т.п.

В том или ином виде, из теории ультрапроизведений (см. [2]) известна:

Теорема IV. Формула $\psi \in \mathcal{T}$ верна тогда и только тогда, когда верна соответствующая формула $\psi^{\mathcal{S}}$. Формула $\psi^{\mathcal{S}}$ доказуема средствами $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда ψ доказуема средствами $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}$ – каноническая теория множеств, то средствами $\mathcal{T}$ доказуемо, что ψ верна тогда и только тогда, когда верна $\psi^{\mathcal{S}}$.

Докажем, что верна следующая

Теорема V. Когда $\mathcal{T}$ – каноническая теория множеств, формула $\psi \in \mathcal{T}$ доказуема средствами $\mathcal{T}$, если соответствующая формула $\psi^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ доказуема средствами $\mathcal{T}$.

Доказательство. Рассуждая в $\mathcal{T}$, предположим ψ ложна. Тогда, формула ˥ψ истинна. Тогда, по теореме IV истинна $˥ψ^{\mathcal{S}}$. Но так как по условию, средствами $\mathcal{T}$ доказуема $ψ^{\mathcal{S}}$, а следовательно $ψ^{\mathcal{S}}$ истинна, то предположение приводит к противоречию. Следовательно, ψ истинна. Это доказательство формулы ψ средствами $\mathcal{T}$.

В случае, когда $\mathcal{T}$ не является канонической теорией множеств, можно также извлечь доказательство ψ из доказательства $ψ^{\mathcal{S}}$ в теории $\mathcal{M}$, которая опишет обе теории $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$, и докажет теорему подобную теореме IV. Отказ от доказательства только потому, что оно дано в теории $\mathcal{M}$, непоследователен, поскольку, означает отказ от связи между теориями $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$, описываемой $\mathcal{M}$.

Мы будем использовать теорему V как логический приём, средствами канонической теории множеств $\mathcal{T}$ доказывая $\mathcal{S}$-теоремы, и извлекая из них верность соответствующих $\mathcal{T}$-теорем.

Теория $\mathcal{T}$ по сути интерпретирует саму себя в виде теории $\mathcal{S}$, и теория $\mathcal{T}$ не может извлечь из $\mathcal{S}$ больше информации, чем может извлечь $\mathcal{S}$ из себя. В частности, пусть $\mathcal{T}$ – теория арифметики. Так как $\mathcal{S}$ не опишет и не докажет больше фактов чем $\mathcal{T}$, то $\mathcal{S}$ можно назвать «канонической арифметикой», трактуемой метатеорией $\mathcal{T}$. Если теорема V, верна для $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T}$ – в качестве метатеории – в доказательствах именно $\mathcal{S}$-формул не докажет больше фактов, чем $\mathcal{S}$. Если $\mathcal{T}$ привлечёт формулы $\notin \mathcal{S}$, то не факт, что теория $\mathcal{S}' = \mathcal{S} +$ «новые формулы» опишет какую-нибудь «арифметику». К примеру, если теория $\mathcal{S}'$ говорит «о бесконечно больших натуральных числах», то «аксиома индукции новой арифметики» ложна. Если признак «быть бесконечно большим», и значит – «быть конечным», не определим в $\mathcal{S}'$, то о «новой арифметике», с подобного рода числами, речь не идёт.

Теоремы, подобные теоремам IV и V, доказуемы и в случаях, когда вместо формулы $ψ^{\mathcal{S}}$ стоит формула, полученная из ψ заменой только части переменных формулы ψ на $\mathcal{S}$-переменные так, что $ψ^{\mathcal{S}}$ содержит «перемешанные $\mathcal{S}$- и $\mathcal{T}$-кванторы».

Отметим также, что всякий раз, когда доказано существование каких-то $\mathcal{S}$-множеств средствами ли теории $\mathcal{S}$, или средствами $\mathcal{T}$, можно применить к найденным $\mathcal{S}$-множествам аксиомы или теоремы теории $\mathcal{S}$, как будто бы это обычные аксиомы и теоремы, применённые к обычным множествам. Иными словами, можно считать, что говорящий на языке теории $\mathcal{S}$ «не знает», что говорит об $\mathcal{S}$-множествах. Т.б. считает, что говорит об обычных канторовых, цермеловых канонических множествах, и применяет к ним аксиомы и выводы обычной теории. И только «знающий теорию $\mathcal{T}$ знает», что «говорящий на языке теории $\mathcal{S}$, говорит не о настоящих множествах».

Обычное отношение принадлежности, обозначаемое «∈», назовём «$\mathcal{T}$-принадлежностью», обозначив «$\in^{\mathcal{T}}$». Соответствующее отношение «$\mathcal{S}$-принадлежности», обозначенное «$\in^{\mathcal{S}}$», толкуем так:

$$\mathrm{u} \in^{\mathcal{S}} \mathrm{v} \Leftrightarrow (\exists \mathrm{S} \in \mathfrak{F})\ (\forall \mathrm{n} \in \mathrm{S})\ \mathrm{u}(\mathrm{n}) \in^{\mathcal{T}} \mathrm{v}(\mathrm{n}).$$

Отношение равенства «=» назовём «$\mathcal{T}$-эквивалентностью» и обозначим «$=^\mathcal{T}$». Отношение «$=^\mathcal{S}$», которое соответствует отношению «$=^\mathcal{T}$», назовём «$\mathcal{S}$-эквивалентностью». Для последней верны утверждения $\in \mathcal{S}$, соответствующие аксиомам равенства $\in \mathcal{T}$. Отношения неравенства обозначим $>^\mathcal{S}$, $<^\mathcal{S}$, $>^\mathcal{T}$ и $<^\mathcal{T}$ соответственно, где $>^\mathcal{T}$ и $<^\mathcal{T}$ обозначают то же, что и отношения $>$ и $<$. Подобное же верно для отношений $\supset^\mathcal{S}$, $\subset^\mathcal{S}$, $\supset^\mathcal{T}$ и $\subset^\mathcal{T}$, операторов $\bigcap^\mathcal{S}$, $\bigcup^\mathcal{S}$ и т.п.

§3. Особенности преобразования теории $\mathcal{T}$ в теорию $\mathcal{S}$

Полезно посмотреть как преобразуются предметы и утверждения теории $\mathcal{T}$ в предметы и утверждения теории $\mathcal{S}$ в некоторых случаях.

Множество ω преобразуется в $\omega^\mathcal{S}$, т.е. в последовательность множеств $\omega^\mathcal{S}(n)$, каждый элемент которой совпадает с множеством ω, т.е. $\omega = \omega^\mathcal{S}(n)$, для каждого $n \in \Omega$. «Натуральным числом теории $\mathcal{S}$» будет каждая функция N, всюду определённая на Ω со значениями в $\omega^\mathcal{S}(n)$, либо $\mathcal{S}$-эквивалентная такой функции. Так как $\Omega \in \mathfrak{F}$, то $(\forall n \in \Omega)\ N(n) \in^\mathcal{T} \omega^\mathcal{S}(n)$, т.е. $N \in^\mathcal{S} \omega^\mathcal{S}$.

Что означает в теории $\mathcal{S}$ утверждение о том, что «множество U счётно»? В отношениях $\in \mathcal{T}$ оно означает, что для некоторого $A \in \mathfrak{F}$, для всех тех чисел n, которые принадлежат A, найдётся биекция, отображающая $U(n)$ на $\omega^\mathcal{S}(n)$, т.е. на ω. Иными словами, «U счётно» по утверждению теории $\mathcal{S}$, если «$U(n)$ счётно для каждого $n \in A$» по утверждению теории $\mathcal{T}$.

Необходимо не путать $\mathcal{T}$-множество $\mathcal{S}$-чисел $\in^\mathcal{S} \omega^\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}$-множество $\omega^\mathcal{S}$. В самом деле, несчётное $\mathcal{T}$-множество ρ тех «натуральных $\mathcal{S}$-чисел» N, для которых $N \in^\mathcal{T} \rho \Leftrightarrow N \in^\mathcal{S} \omega^\mathcal{S}$, не совпадает с последовательностью $\omega^\mathcal{S}$, которая есть «счётное множество» в трактовке теории $\mathcal{S}$.

Утверждение $\in \mathcal{S}$ о том, что «множество U имеет первую несчётную мощность», в расшифровке теории $\mathcal{T}$ означает, что найдётся $A \in \mathfrak{F}$ так, что для всех $n \in A$, найдётся биекция между $U(n)$ и $\omega_1 = \omega_1^\mathcal{S}(n)$. $\mathcal{S}$-ординалами $\in^\mathcal{S} \omega_1^\mathcal{S}$ определим все функции со значениями в ω_1, определённые на Ω. Если $\mathcal{S}$-формула доказуема относительно $\omega_1^\mathcal{S}$ средствами $\mathcal{T}$, и в частности, средствами $\mathcal{S}$, то по теореме V соответствующая $\mathcal{T}$-формула доказуема в $\mathcal{T}$ для ω_1.

Пусть множество действительных чисел $\mathfrak{R}$ – константа теории $\mathcal{T}$. Тогда, «действительное число теории $\mathcal{S}$», т.б. «$\mathcal{S}$-действительное число» – каждая функция r, со значениями $r(n)$ в области обычных действительных чисел, зависящая от аргумента $n \in \Omega$, либо $\mathcal{S}$-эквивалентная ей. «$\mathcal{S}$-действительные числа» по теории $\mathcal{T}$ составляют гиперконтинуум $\mathbf{R}$, подобный множеству $\mathbf{H}$, т.е. $\mathbf{R}$ – $\mathcal{T}$-множество всех $\mathcal{S}$-действительных чисел $\in^\mathcal{T} \mathbf{R}$. Но множество $\mathbf{R}$ не является предметом теории $\mathcal{S}$ – $\mathcal{S}$-множество $\mathfrak{R}^\mathcal{S}$, которому $\mathcal{S}$-принадлежат «действительные числа теории $\mathcal{S}$» не совпадает с $\mathbf{R}$. Заметим, что $\mathbf{R}$ счётно разделимо и все его элементы сравнимы по теории $\mathcal{T}$.

Пусть r – «действительное число теории $\mathcal{S}$». Построим «строго убывающую счётную» $\mathcal{S}$-последовательность $\mathcal{S}$-действительных чисел, «сходящуюся» к $\mathcal{S}$-числу r в трактовке теории $\mathcal{S}$. В самом деле, пусть $\mathcal{S}$-числа r_M пронумерованы конечными по трактовке теории $\mathcal{T}$ номерами M, и для каждого натурального n верно $r_M(n) > r_{M+1}(n)$ и $r(n) = \mathrm{Lim}_{M\to\omega} r_M(n)$. «Действительное число» q войдёт в искомую $\mathcal{S}$-последовательность под «номером» $N \in^{\mathcal{S}} \omega^{\mathcal{S}}$, если значениями функции q будут обычные действительные числа $q(n) = r_{N(n)}(n)$. Для произвольного «действительного» $t >^{\mathcal{S}} r$ найдётся такой «номер» $N \in^{\mathcal{S}} \omega^{\mathcal{S}}$ «действительного» q из $\mathcal{S}$-последовательности «действительных чисел», что $t >^{\mathcal{S}} q >^{\mathcal{S}} r$. В трактовке теории $\mathcal{S}$ «любая монотонная ограниченная последовательность действительных чисел имеет предел».

Пользуясь счётной разделимостью $\mathbf{R}$, можно указать несчётное «$\mathcal{T}$-множество $\mathcal{S}$-отрезков», обозначенное Θ и такое, что каждые два отрезка из Θ «не пересекаются» по трактовке $\mathcal{S}$. Но последнее не означает, что найдётся хотя бы одно $\mathcal{S}$-множество, $\mathcal{S}$-содержащее исключительно отрезки $\in^{\mathcal{T}} \Theta$. В $\mathcal{S}$-множество Ξ, которое образуют отрезки множества Θ, войдут некоторые другие отрезки так, что в итоге, по теории $\mathcal{S}$, «в множестве Ξ не найдётся никакого несчётного подмножества попарно не пересекающихся отрезков».

$\mathcal{S}$-конечное $\mathcal{S}$-множество U (с точностью до $\mathcal{S}$-эквивалентной последовательности) это последовательность, элемент которой $U(n)$ – конечное множество для каждого $n \in \Omega$. Если количество элементов в множестве $U(n)$ растёт достаточно быстро с ростом n, то по теории $\mathcal{T}$ мощность $\mathcal{T}$-множества всех элементов, которые $\in^{\mathcal{S}}$ U имеет мощность континуума.

§4. Теорема сопоставления и схема основного доказательства

Произвольные множества, элементы которых суть линии $\in \mathbf{H}$, назовём «конфигурациями». Пусть $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ – конфигурации, Б – биекция, непрерывная всюду в D, переводящая каждую дугу C_r на себя, т.е. $Б\wr C_r\wr = C_r$ для $r < 1$, и для каждой линии $\gamma \in \mathbf{I}$ найдётся линия $\zeta \in \mathbf{J}$ так, что $Б\wr\gamma\wr = \zeta$, и для каждой $\zeta \in \mathbf{J}$ найдётся $\gamma \in \mathbf{I}$ так, что $Б\wr\gamma\wr = \zeta$. Тогда, Б назовём «предсопоставлением» конфигураций $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$. Когда б – сужение отображения Б на точечное множество $\bigcup_{\gamma\in\mathbf{I}}\gamma$, б назовём «сопоставлением» конфигураций $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$, или говорим, что $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ «сопоставлены посредством б». Говорим, что «линии γ и ζ сопоставлены посредством б», или подобное, если $б\wr\gamma\wr = \zeta$. Пустое множество трактуем как «пустое сопоставление».

Теорема (сопоставления) VI. Пусть $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$ и $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}$ – произвольные конфигурации, Υ – множество сопоставлений. И пусть:

а) если каждое из отображений $\varrho \in \Upsilon$ и $\varrho' \in \Upsilon$ сопоставляет линию $q \in \mathbf{K}$ линиям $\varrho\wr q\wr$ и $\varrho'\wr q\wr$ из множества $\mathbf{M}$, то $\varrho\wr q\wr = \varrho'\wr q\wr$;

б) если каждое из отображений $\varrho \in \Upsilon$ и $\varrho' \in \Upsilon$ таково, что $\varrho\wr q\wr = p$ и $\varrho'\wr q'\wr = p$, где $p \in \mathbf{M}$, то $q = q' \in \mathbf{K}$;

в) для произвольной линии $p \in \mathbf{M}$ найдётся $\varrho \in \Upsilon$, сопоставляющее p некоторой линии $q \in \mathbf{K}$, и для каждой $q' \in \mathbf{K}$ найдётся $\varrho' \in \Upsilon$, сопоставляющее q' некоторой $p' \in \mathbf{K}$.

Тогда найдётся отображение Ф, сопоставляющее конфигурации $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$.

Доказательство теоремы: $\Phi = \bigcup_{\varrho \in \Upsilon} \varrho$. Ч.т.д.

Пусть линии b_χ и q_χ суть элементы множеств M_L и M_R соответственно, где χ принимает всевозможные значения ординалов $\in \omega_1$, b_χ и q_χ – такие элементы из $\mathbf{H}$, что $\alpha \in \beta \in \omega_1 \Rightarrow b_\alpha \ll b_\beta \ll q_\beta \ll q_\alpha$. Пусть, как бы ни был фиксирован $\chi \in \omega_1$, $b_\chi^{\mathcal{S}}$ и $q_\chi^{\mathcal{S}}$ – последовательности длины ω, элементы которых суть линии $b_\chi^{\mathcal{S}}(n)$ и $q_\chi^{\mathcal{S}}(n)$ такие, что для всех $n \in \omega = \Omega$ верно $b_\chi^{\mathcal{S}}(n) = b_\chi$ и $q_\chi^{\mathcal{S}}(n) = q_\chi$. Множествам M_L и M_R соответствуют $\mathcal{S}$-константы $M_L^{\mathcal{S}}$ и $M_R^{\mathcal{S}}$.

Схема основного доказательства такова: Мы докажем существование двух множеств $J_L \subset M_L$ и $J_R \subset M_R$, в отношении каждого из которых доказуема теорема сопоставления. При этом, для каждых $b \in M_L$ и $q \in M_R$ найдутся такие $b' \in J_L$ и $q' \in J_R$, для которых окажется $b \ll b' \ll q' \ll q$. Посредством одного сопоставления Ф конфигурациям J_L и J_R будут сопоставлены некие конфигурации I_L и I_R соответственно. Для I_L и I_R заведомо будет известно,что найдётся такая линия k, для которой каковы бы ни были $b \in I_L$ и $q \in I_R$ оказывается, что $b \ll k \ll q$. Поскольку, сопоставление Ф можно трактовать как «действие по отождествлению линий», то отсюда, доказуемо существование такой h, для которой при любых $b \in M_L$ и $q \in M_R$ оказывается $b \ll h \ll q$. Чем и будет проверена аксиома I. Чтобы всё это доказать для $\mathcal{T}$-множеств, используем теорему V, средствами $\mathcal{T}$ доказав всё подобное для $\mathcal{S}$-множеств, связанных с перечисленными $\mathcal{T}$-множествами только посредством констант $M_L^{\mathcal{S}}$ и $M_R^{\mathcal{S}}$.

§5. $\mathcal{S}$-сопоставления, приводящие к разрешению канторовой задачи

Чтобы построить $\mathcal{S}$-множество $\mathcal{S}$-сопоставлений, подходящее под условие «$\mathcal{S}$-теоремы $\mathcal{S}$-сопоставления», подобное множеству Υ, отталкиваемся от трансфинитного $\mathcal{T}$-набора $\mathcal{S}$-сопоставлений, средствами теории $\mathcal{T}$ нумерованных ординалами $\in \omega_1$. Эти $\mathcal{S}$-сопоставления обозначены далее ϕ_α, где $\alpha \in \omega_1$.

Пусть для некоторого ординала $\mu \in \omega_1$:

- Для каждого $\alpha \in \mu$ построены $\mathcal{T}$-множества $K_{L\alpha}$ и $K_{R\alpha}$, элементы которых суть $\mathcal{S}$-линии b_χ^f и q_χ^f соответственно при каждом $\chi \leqslant \alpha$. Каков бы ни был $\chi \leqslant \alpha$, для всех $n \in \Omega$ линии $b_\chi^f(n)$ и $q_\chi^f(n)$ взяты как элементы $\mathbf{H}$.
- Каковы бы ни были ординалы $\chi \in \mu$ и $\xi \in \chi$, для каждого $n \in \Omega$ верно $b_\xi^f(n) \ll b_\chi^f(n) \ll k^f(n) \ll q_\chi^f(n) \ll q_\xi^f(n)$, где k^f – $\mathcal{S}$-линия, фиксированная для всех дальнейших доказательств.

- Для каждого ординала $\alpha \in \mu$ построено $\mathcal{S}$-сопоставление ϕ_α. Т.е. для каждого $n \in \Omega$, n-ым элементом-значением последовательности ϕ_α будет некоторое $\mathcal{T}$-сопоставление $\phi_{\alpha n}$, возможно пустое.
- Каковы бы ни были ординалы $\alpha \in \mu$ и $\chi \leqslant \alpha$, если для некоторого $m \in \Omega$ (зависящего от χ и α) верно $\phi_{\alpha m}\wr b^f_\chi(m)\wr = b_\chi$ (или $\phi_{\alpha m}\wr q^f_\chi(m)\wr = q_\chi$), то для всех $n \in \Omega$, $n \geqslant m$ верно $\phi_{\alpha n}\wr b^f_\chi(n)\wr = b_\chi$ (и $\phi_{\alpha n}\wr q^f_\chi(n)\wr = q_\chi$ соответственно). Т.е. $\phi_{\alpha n}$, при достаточно больших n, сопоставляет линии $b^f_\chi(n)$ и $q^f_\chi(n)$ линиям b_χ, и q_χ соответственно.

Все перечисленные условия тривиально выполнимы при конечном ординале μ, или когда $\mu = \omega$. Докажем, что найдётся $\mathcal{S}$-сопоставление ϕ_μ, для которого выполнены условия, полученные из перечисленных заменой условий $\alpha \in \mu$ и $\chi \in \mu$, т.е. $\alpha < \mu$ и $\chi < \mu$, на $\alpha \leqslant \mu$ и $\chi \leqslant \mu$.

Для каждого $n \in \Omega$, чтобы выбрать отображение $\phi_{\mu n}$, возьмём произвольное предсопоставление ψ_n, которое пусть удовлетворяет общим условиям для предсопоставлений. Подходящего предсопоставления добиваемся путём непрерывного изменения ψ_n «вдоль дуг C_r». Т.е. пусть ψ_n, ψ'_n, ψ''_n, ψ'''_n … разные варианты отображений, которые мы пробуем, тогда если $\psi_n\wr P\wr$ – точка дуги C_r, то $\psi'_n\wr P\wr$, $\psi''_n\wr P\wr$, $\psi'''_n\wr P\wr$ … – точки дуги C_r. Искомое сопоставление $\phi_{\mu n}$ получаем выделением некоторого конечного множества линий из тех, которые отображает подходящее ψ_n.

Пересчитаем числами $\in \omega$ все элементы множества $\bigcup_{\alpha\in\mu}(K_{L\alpha} \cup K_{R\alpha})$. В таком пересчёте обозначим эти элементы k_m, где $m \in \omega$. По предположению трансфинитной индукции, для каждого $N \in \omega$ найдётся подходящее отображение $\phi_{\alpha n}$ для некоторого $\alpha \in \mu$, зависящее от N, и найдётся $z = z(N) \in \Omega$ так, что каков бы ни был $m < N$, для каждого $n \in \Omega$, $n > z$ отображение $\phi_{\alpha n}$ совместит линию $k_m(n)$ с (сопоставленной ей) линией $p_m \in M$, т.е. окажется $\phi_{\alpha n}\wr k_m(n)\wr = p_m$.

Тогда, пользуясь конечностью набора линий, отображение ψ_n («непрерывной деформацией плёнки сектора D») и номер $z(N)$ (если необходимо, его увеличивая) всегда можно выбрать так, что для каждого $n \in \Omega$:

$$b_\mu \ll \psi_n\wr k^f(n)\wr \ll q_\mu,\ \text{и}$$
$$\text{если } n > z(N)\text{, то, каков бы ни был } m < N\text{: } \psi_n\wr k_m(n)\wr = \phi_{\alpha n}\wr k_m(n)\wr = p_m.$$

Для каждого $n \in \Omega$, переменную линию $b^f_\mu(n) \in \mathbf{H}$ выбираем так, чтобы линия $\psi_n\wr b^f_\mu(n)\wr$ совпала с b_μ. Для тех же $n \in \Omega$ линию $\psi_n\wr q^f_\mu(n)\wr$ выбираем совпадающей с q_μ. Тогда автоматически получаем для каждого $n \in \Omega$, что $b^f_\mu(n) \ll k^f(n) \ll q^f_\mu(n)$.

Искомое сопоставление $\phi_{\mu n}$ получаем сужением предсопоставления ψ_n на точечное множество $\bigcup_{m<N} k_m(n) \cup b_\mu^f(n) \cup q_\mu^f(n)$. Для этого, после выбора $z(N)$ выбираем $z(N+1) > z(N)$, и определяем $\phi_{\mu n} \wr k_m(n) \wr = \phi_{\alpha n} \wr k_m(n) \wr$, $\alpha = \alpha(N)$, для всех $m < N$, только когда $z(N) < n \leqslant z(N+1)$. Тем самым, для всех $n \in \Omega$ таких, что $z(N) < n \leqslant z(N+1)$, $\phi_{\mu n}$ сопоставляет в точности конечное множество линий, состоящее из всех линий $k_m(n)$, когда $m < N$, а также из линий $b_\mu^f(n)$ и $q_\mu^f(n)$. В итоге, $\phi_{\mu n}$ полностью построено. Положим ещё $K_{L\mu} = \bigcup_{\alpha \in \mu} K_{L\alpha} \cup \{b_\mu^f\}$ и $K_{R\mu} = \bigcup_{\alpha \in \mu} K_{R\alpha} \cup \{q_\mu^f\}$. Ч.т.д.

Построенные по трансфинитной индукции $\mathcal{S}$-сопоставления ϕ_α в итоге образуют, как элементы, некоторое несчётное $\mathcal{T}$-множество $\Upsilon_\mathcal{T}$. Из последнего $\mathcal{T}$-множества образуем $\mathcal{S}$-множество $\mathcal{S}$-сопоставлений $\Upsilon_\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$-содержащее, в том числе и каждый элемент из $\Upsilon_\mathcal{T}$. В $\Upsilon_\mathcal{S}$ войдёт каждое $\mathcal{S}$-сопоставление ψ, для которого при хотя бы какой-нибудь зависимости $\alpha = \alpha(n)$, т.е. зависмости ординала α от натурального числа n, окажется $\psi_n = \phi_{\alpha(n)n}$ для всех $n \in \Omega$ (или $\mathcal{S}$-эквивалентные таким $\mathcal{S}$-сопоставлениям), где ψ_n – значения функции ψ.

Пусть $K_{\mathcal{T}L} = \bigcup_{\mu \in \omega_1} K_{L\mu}$, $K_{\mathcal{T}R} = \bigcup_{\mu \in \omega_1} K_{R\mu}$. Элементами этих $\mathcal{T}$-множеств будут только $\mathcal{S}$-линии, но ни $K_{\mathcal{T}L}$, ни $K_{\mathcal{T}R}$ не могут быть предметами теории $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$-множество $K_{\mathcal{S}L}$ пусть $\mathcal{S}$-содержит каждую линию q, для которой для каждого $n \in \Omega$ найдётся такая $p \in^\mathcal{T} K_{\mathcal{T}L}$ (т.е. функция p выбирается в зависимости от того, каков указан n), что положение $q(n)$ совпадёт со значением $p(n)$. И пусть $q \in^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}R}$, если для каждого $n \in \Omega$ верно $q(n) = p(n)$ хотя бы для какой-нибудь функции-линии $p \in^\mathcal{T} K_{\mathcal{T}R}$.

Получаем, для каждой $b \in^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}L}$ верно $b \ll^\mathcal{S} k^f$, и для каждой $b \in^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}R}$ верно $b \gg^\mathcal{S} k^f$. Действительно, по построению линий $\mathcal{S}$-принадлежащих $\mathcal{S}$-множеству $K_{\mathcal{S}L}$, для каждого $n \in \Omega$ верно $b(n) \ll k^f(n)$, какова бы ни была $b \in^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}L}$. Тем самым, найдётся действительное число $\tau(n)$ (т.б. найдётся $\mathcal{S}$-действительное число τ) такое, что для всех действительных чисел $r(n) > \tau(n)$ (т.б. для всех $\mathcal{S}$-действительных $r >^\mathcal{S} \tau$) верно, что точка $C_{r(n)} \cap b(n)$ находится на дуге $C_{r(n)}$ левее точки $C_{r(n)} \cap k^f(n)$. Т.к. $\Omega \in \mathfrak{F}$, то последнее означает, что $b \ll^\mathcal{S} k^f$. Аналогично, когда $b \in^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}R}$.

По $\mathcal{S}$-аксиоме выделения находим, что в $\mathcal{S}$-множестве $K_{\mathcal{S}L}$ найдутся $\mathcal{S}$-сопоставленные $\mathcal{S}$-отображениями $\in^\mathcal{S} \Upsilon_\mathcal{S}$ $\mathcal{S}$-линии, которые суть $\mathcal{S}$-элементы некоторого их $\mathcal{S}$-множества $K_L^f \subseteq^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}L}$. Аналогично, $K_R^f \subseteq^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}R}$ определяем как $\mathcal{S}$-множество $\mathcal{S}$-линий $\in^\mathcal{S} K_{\mathcal{S}R}$ $\mathcal{S}$-сопоставленных $\mathcal{S}$-отображениями $\in^\mathcal{S} \Upsilon_\mathcal{S}$. Определим $K^f = K_R^f \cup^\mathcal{S} K_L^f = K_R^f \cup K_L^f$ (конечное $\mathcal{S}$-объединение совпадёт с обычным). По той же аксиоме, найдутся $\mathcal{S}$-множества $M_L^f \subseteq^\mathcal{S} M_L^\mathcal{S}$ и $M_R^f \subseteq^\mathcal{S} M_R^\mathcal{S}$, элементы которых $\mathcal{S}$-сопоставлены $\mathcal{S}$-отображениями $\in_\mathcal{S} \Upsilon_\mathcal{S}$ $\mathcal{S}$-элементам $\in^\mathcal{S} K_L^f$ и $\in^\mathcal{S} K_R^f$ соответственно. Пусть, $M^f = M_R^f \cup^\mathcal{S} M_L^f = M_R^f \cup M_L^f$.

Пусть $q \in^{\mathcal{S}} K^f$, $p \in^{\mathcal{S}} M^f$, $p' \in^{\mathcal{S}} M^f$, $\phi \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$, $\phi' \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$. Тогда, если $\mathcal{S}$-линия q $\mathcal{S}$-сопоставлена $\mathcal{S}$-линии p посредством ϕ, и ϕ' также $\mathcal{S}$-сопоставляет $\mathcal{S}$-линии q $\mathcal{S}$-линию p', то $p =^{\mathcal{S}} p'$. Действительно, существуют множества $S \in \mathfrak{F}$ и $T \in \mathfrak{F}$, для которых $n \in S \Rightarrow \phi_n \wr q(n) \wr = p(n)$ и $n \in T \Rightarrow \phi'_n \wr q(n) \wr = p'(n)$. Тогда, для каждого $n \in S \cap T$, поскольку $\phi \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$ и $\phi' \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$, для некоторых $A \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$ и $B \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$, $A \neq^{\mathcal{S}} B$, окажется $\phi_n \wr q(n) \wr = \phi_{A(n)n} \wr q(n) \wr$ и $\phi'_n \wr q(n) \wr = \phi_{B(n)n} \wr q(n) \wr$, $q(n) = b(n)$, где $b \in K_L \cup K_R$. Но для $\mathcal{S}$-линии b, по построению сопоставлений ϕ_α, каков бы ни был достаточно большой $\alpha \in \omega_1$ (для того, чтобы значениям b(n) сопоставлялась какая-то одна линия), в частности, когда $\alpha = A(n)$, или же $\alpha = B(n)$, значение множества $\phi_{\alpha n} \wr b(n) \wr$ всегда одинаково. Т.е. $p(n) = p'(n)$. Отсюда, заключаем, что $p =^{\mathcal{S}} p'$.

Аналогично, когда $q \in^{\mathcal{S}} K^f$, $q' \in^{\mathcal{S}} K^f$, $p \in^{\mathcal{S}} M^f$, $\phi \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$, $\phi' \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$, и $\mathcal{S}$-линия q $\mathcal{S}$-сопоставлена $\mathcal{S}$-линии p посредством ϕ, и q' $\mathcal{S}$-сопоставлена $\mathcal{S}$-линии p посредством ϕ'. Тогда находим, что $q =^{\mathcal{S}} q'$.

В итоге выполнены все условия а)-в) $\mathcal{S}$-теоремы $\mathcal{S}$-сопоставления для $\Upsilon_{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{S}$-множеств K^f и M^f. И также получаем $\mathcal{S}$-теорему $\mathcal{S}$-сопоставления и тогда, когда последняя пара множеств заменена на пару K_L^f и M_L^f, или K_R^f и M_R^f.

Заметим, каждый построенный элемент $b_\chi^f \in K_{\mathcal{T}L}$ «нумерован» обычным ординалом $\chi \in \omega_1$ (средствами теории $\mathcal{T}$, в то время как теоретик $\mathcal{S}$ «не знает о наличии нумерации»). По трактовке $\mathcal{S}$ считаем, что $\mathcal{S}$-линия b_χ^f «нумеруется» $\mathcal{S}$-ординалом $\eta =^{\mathcal{S}} \chi^{\mathcal{S}} \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$, когда для каждого $n \in \Omega$ верно $\eta(n) = \chi$. Отсюда, каждую $\mathcal{S}$-линию $\in^{\mathcal{S}} K_{\mathcal{S}L}$ «нумеруем» $\mathcal{S}$-ординалом $A \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$ таким, что для каждого $n \in \Omega$ ординал A(n) есть обычный ординал $\in \omega_1$. Для произвольной функции со значениями в ординалах $\in \omega_1$, т.е. для произвольного «$\mathcal{S}$-номера» $A \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$, найдётся $\mathcal{S}$-элемент $\in^{\mathcal{S}} K_{\mathcal{S}L}$, имеющий «номер» A. Такой элемент обозначим $\mathfrak{k}_{LA}$. Для $\mathfrak{k}_{LA}$, и для всякого $n \in \Omega$ верно $\mathfrak{k}_{LA}(n) = b_{A(n)}^f(n)$, и каков бы ни был $n \in \Omega$, $\mathcal{S}$-линия $b_{A(n)}^f$ $\mathcal{T}$-принадлежит $\mathcal{T}$-множеству $K_{\mathcal{T}L}$. Аналогично «$\mathcal{S}$-нумеруем» $\mathcal{S}$-элементы $\mathcal{S}$-множеств $K_{\mathcal{S}R}$, $M_L^{\mathcal{S}}$, $M_R^{\mathcal{S}}$ и $\Upsilon_{\mathcal{S}}$, обозначая элемент «под номером» $A \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$ как $\mathfrak{k}_{RA}$, $\mathfrak{m}_{LA}$, $\mathfrak{m}_{RA}$ и φ_A соответственно.

Докажем, что каков бы ни был $\mathcal{S}$-ординал $A \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$, найдётся $\mathcal{S}$-ординал $B \in^{\mathcal{S}} \omega_1^{\mathcal{S}}$ такой, что $B \geqslant A$, и $\mathcal{S}$-линии $\mathfrak{m}_{LB} \in^{\mathcal{S}} M_L^f$ и $\mathfrak{m}_{RB} \in^{\mathcal{S}} M_R^f$ $\mathcal{S}$-сопоставлены посредством $\mathcal{S}$-сопоставления $\varphi_B \in^{\mathcal{S}} \Upsilon_{\mathcal{S}}$ неким $\mathcal{S}$-линиям $\mathfrak{k}_{LB} \in^{\mathcal{S}} K_L^f$ и $\mathfrak{k}_{RB} \in^{\mathcal{S}} K_R^f$ соответственно. Действительно, какова бы ни была функция A, найдётся минимальный ординал $\mu \in \omega_1$ такой, что каков бы ни был $n \in \Omega$, оказывается $\mu > A(n)$. Определим $B(n) = \mu$ – каков бы ни был $n \in \Omega$. Для такого B в качестве сопоставляемых $\mathcal{S}$-линиям $\mathfrak{k}_{LB}$ и $\mathfrak{k}_{RB}$ соответственно посредством φ_B были определены линии $\mathfrak{m}_{LB} = b_\mu^{\mathcal{S}}$ и $\mathfrak{m}_{RB} = q_\mu^{\mathcal{S}}$. Т.е. для каждого n: $\mathfrak{m}_{LB}(n) = b_\mu$ и $\mathfrak{m}_{RB}(n) = q_\mu$. Ч.т.д.

В итоге, $\mathcal{S}$-конфигурации $\mathrm{K}_\mathrm{L}^\mathrm{f}$ и $\mathrm{M}_\mathrm{L}^\mathrm{f}$, $\mathrm{K}_\mathrm{R}^\mathrm{f}$ и $\mathrm{M}_\mathrm{R}^\mathrm{f}$ по теореме, соответствующей теореме VI, $\mathcal{S}$-сопоставлены неким $\mathcal{S}$-сопоставлением $\Phi_\mathcal{S}$. Это выводим средствами $\mathcal{S}$ из факта $\in \mathcal{S}$, трактуемого теорией $\mathcal{S}$ как факт обычной теории множеств, т.б. из $\mathcal{S}$-факта выполнения условий $\mathcal{S}$-теоремы сопоставлений, доказанного средствами $\mathcal{T}$ через проведённое построение. Т.к. доказано, что $\mathcal{S}$-линия k^f такова, что $\mathfrak{b} \ll^\mathcal{S} \mathrm{k}^\mathrm{f} \ll^\mathcal{S} \mathfrak{q}$ – какими бы ни были $\mathfrak{b} \in^\mathcal{S} \mathrm{K}_\mathrm{L}^\mathrm{f}$ и $\mathfrak{q} \in^\mathcal{S} \mathrm{K}_\mathrm{R}^\mathrm{f}$, то по $\mathcal{S}$-сопоставлению $\Phi_\mathcal{S}$ (трактуемому средствами $\mathcal{S}$ как обычное сопоставление) найдётся такая $\mathcal{S}$-линия h^f, для которой $\mathfrak{b} \ll^\mathcal{S} \mathrm{h}^\mathrm{f} \ll^\mathcal{S} \mathfrak{q}$ – какими бы ни были $\mathfrak{b} \in^\mathcal{S} \mathrm{M}_\mathrm{L}^\mathrm{f}$ и $\mathfrak{q} \in^\mathcal{S} \mathrm{M}_\mathrm{R}^\mathrm{f}$. А значит, $\mathfrak{b} \ll^\mathcal{S} \mathrm{h}^\mathrm{f} \ll^\mathcal{S} \mathfrak{q}$ – для любых $\mathfrak{b} \in^\mathcal{S} \mathrm{M}_\mathrm{L}^\mathcal{S}$ и $\mathfrak{q} \in^\mathcal{S} \mathrm{M}_\mathrm{R}^\mathcal{S}$. Т.е. последнее выводим, пользуясь теорией $\mathcal{S}$ как обычной теорией множеств, т.е. без расшифровки атомарных формул теории $\mathcal{S}$.

Если установлена $\mathcal{S}$-теорема о существовании некоего $\mathcal{S}$-предмета $\mathfrak{s}$, то, пользуясь теоремой V, можно гарантировать существование $\mathcal{T}$-предмета $\mathfrak{t}$, удовлетворяющего соответствующей $\mathcal{T}$-теореме. В этом смысле, $\mathcal{S}$-множествам $\mathrm{K}_\mathrm{L}^\mathrm{f}$ и $\mathrm{K}_\mathrm{R}^\mathrm{f}$ соответствуют $\mathcal{T}$-множества I_L и I_R, а $\mathcal{S}$-множествам $\mathrm{M}_\mathrm{L}^\mathrm{f}$ и $\mathrm{M}_\mathrm{R}^\mathrm{f}$ – $\mathcal{T}$-множества J_L и J_R, отмеченные в пояснении к схеме доказательств в §4. $\mathcal{S}$-линиям k^f и h^f соответствуют некие $\mathcal{T}$-линии k и h. $\mathcal{S}$-сопоставлению $\Phi_\mathcal{S}$ соответствует некое $\mathcal{T}$-сопоставление Φ. Поскольку же пара множеств M_R и M_L выбрана произвольно, находим, что аксиома I верна. Истиность аксиомы II находим похожим же способом.

§6. Заключительные замечания

Гипотезы I и II нельзя, по-видимому, окончательно отбрасывать, они могут быть верны в некотором «естественном мире множеств». Основания к такому предположению – «экспериментальные счётные множества», «не существующие» по канонической логике, но существующие по «интуитивным геометрическим доводам». Если «обычная логика множеств не срабатывает» в случае такого рода «экспериментальных множеств», то почему она должна работать в «другом мире множеств»?

Один из способов, который предполагается использовать для «взаимоувязывания миров множеств без противоречий», таков: Конкретную мысль ψ мы приучены через доктрины «однозначно» выражать «строгой» формулой ϕ. Но может ли найтись другая формула φ, которая также выразит мысль ψ, и нет критерия предпочтения выбирать ли ϕ или φ? Обе формулы окажутся правильными, безупречными. При одном «способе чтения мыслей» мы найдём доказательство какой-то теоремы, при другом – «отрицание той же теоремы», или «невозможность доказательства». Но противоречия будут отсутствовать потому, что «отрицания» будут взяты в виде «других формул», а не в виде обычного отрицания. И конечно, из найденного доказательства извлекаем уже совершенно точно, что отношения между некоторыми утверждениями теории множеств не могут быть сведены к «логической независимости».

Ссылки

1. Ватолин Дм. «Геометрические аксиомы, влекущие отрицание континуум-гипотезы», http://vixra.org/abs/1005.0059
2. Кейслер Г., Чен Ч., Теория моделей, М. Мир, 1977 г, стр. 201.