

L' attraction des nombres par la force Syracusienne

6 Décembre 2018

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

9 Allée capitaine Jean Bernard Bossu, 21240, Talant

FRANCE

Abstract : I show here that if $x \in \mathbb{N}^*$ then $1 \in \mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ where $\mathcal{O}_S(x)$ is the orbit of the function S defined on \mathbb{R}^+ by $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, and I deduce the proof of the Syracuse conjecture.

Résumé : Je démontre que si $x \in \mathbb{N}^*$ alors $1 \in \mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ où $\mathcal{O}_S(x)$ est l'orbite de la fonction S définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, et j'en déduis une preuve de la conjecture de Syracuse.

Keywords : la conjecture de Syracuse, Syracuse, conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque, problème $3x+1$.

The Subject Classification Codes : 11A99 - 46G99 - 26A09- 26A42

Introduction, notations et définitions :

La conjecture de Syracuse, introduite par Lothar Collatz et ouverte depuis 1928 ([2], [4], [1]) est encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque ou problème $3x+1$.

Le but de cet article est de démontrer cette belle conjecture dont Paul Erdos a dit [3] " les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes " .

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante :

$$u_0 = N, \text{ et pour tout entier } n \geq 0, u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Je définis la fonction S définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$.

$\mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'**orbite** de x sous l'action de S .

D'abord dans le corollaire 2 je démontre que l'orbite de tout nombre non nul est fini si il ne passe pas par le nombre 1. Puis dans le corollaire 3 je démontre que le seul cycle qui puisse exister sous l'action de la force syracausienne est le cycle $\{1, 2\}$ (classiquement c'est cycle $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Et on conclut que tout nombre non nul (assimilé à un corps), sous l'action de l'attraction de la force Syracusienne, finira par tomber sur 1 dans le vaste océan des nombres.

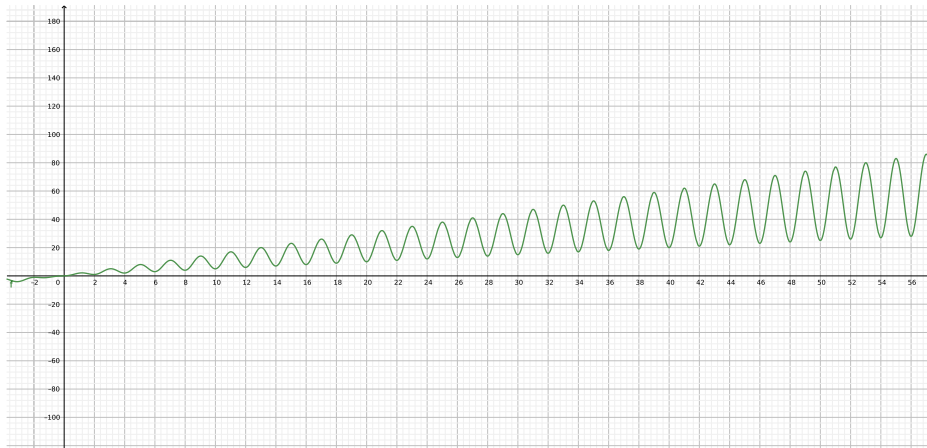


FIGURE 1 – Courbe de Sghiar-Syracuse

Théorème 1 (Conjecture de Syracuse). *Pour tout entier $u_0 = N > 0$, il existe un indice n tel que $u_n = 1$.*

La preuve de ce théorème 1 va résulter de cette proposition 1 :

Proposition 1 (Théorème de Sghiar-Syracure). *Soit S la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \in \mathcal{O}_S(x)$*

Lemme 1. *Si S est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})\sin^2(x\frac{\pi}{2})$, alors $S(x) = x - \frac{x}{2}\cos(x\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(x\pi)$*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

□

Lemme 2. $\int_0^{S^n(x)} S(t)dt = \frac{1}{2}(S^n(x))^2 + \frac{1}{4}S^n(x) - \frac{1}{4\pi}\sin(\pi S^n(x)) - \frac{1}{2\pi}S^n(x)\sin(\pi S^n(x)) + \frac{1}{2\pi^2}\cos(\pi S^n(x)) - \frac{1}{2\pi}$

Démonstration. D'après le lemme 1, on a : $S(t) = t - \frac{t}{2}\cos(t\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(t\pi)$, donc $\int_0^{S^n(x)} S(t)dt = \int_0^{S^n(x)} (t - \frac{t}{2}\cos(t\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(t\pi))dt$ et le résultat s'en déduit par intégration.

□

Corollaire 1. $\lim_{S^n(x) \rightarrow +\infty} \int_0^{S^n(x)} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt = \frac{1}{2}$

Lemme 3. *Si $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times (2\mathbb{N} + 1)$, avec $a \not\leq b$, alors on a :*

i- $S(a) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a, b[$ si a est pair.

ii- $S(a+1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a+1, b[$ si a est impair.

Démonstration. On a : $\frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2}$. Donc $\frac{a}{2} \leq \frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2} \leq \frac{3b+1}{2}$, soit $S(a) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a, b[$ si a est pair.

Et $\forall t \in]a+1, b[$ on a : $\frac{a+1}{2} \leq \frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2} \leq \frac{3b+1}{2}$, soit $S(a+1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a+1, b[$ si a est impair. (Voir Figure 1)

□

Lemme 4. *Si $S^n(x) \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq \frac{1}{32}$ pour $S^{m-1}(x)$ impair.*

Démonstration. En utilisant le lemme 3 deux cas se présentent :

Cas 1 : Si $S(S^{m-1}(x) - 1)$ est pair :

$$\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2}.$$

Or $S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1) = S^{m-1}(x) + \frac{1}{2} \geq S^{m-1}(x)$ et $\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2} \frac{S^{m-1}(x)-1}{(S^m(x))^2}$, et par suite $(S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)}\right)^2 (1 - \frac{1}{S^{m-1}(x)}) \geq \frac{1}{8} \left(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)}\right)^2$ car $S^{m-1}(x) \geq 2$ puisque $S^{m-1}(x) \neq 1$.

Et comme $S^{m-1}(x)$ est impair, alors $S^m(x) = \frac{3S^{m-1}(x)+1}{2}$. Et par suite $\frac{1}{8}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2 \geq \frac{1}{8}(\frac{2}{3+\frac{1}{S^{m-1}(x)}})^2 \geq \frac{1}{32}$.

Cas 2 : Si $S(S^{m-1}(x) - 1)$ est impair :

$\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2}$.
Or $S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1) = S^{m-1}(x) + \frac{1}{2} \geq S^{m-1}(x)$ et $\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2} \frac{S(S^{m-1}(x)-1)+1}{(S^m(x))^2} \geq \frac{1}{2} \frac{S(S^{m-1}(x)-1)}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2} \frac{3(S^{m-1}(x)-1)+1}{(S^m(x))^2}$, et par suite $(S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2} \geq \frac{3}{4} (\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2 (1 - \frac{1}{S^{m-1}(x)}) \geq \frac{3}{8} (\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2$ car $S^{m-1}(x) \geq 2$ puisque $S^{m-1}(x) \neq 1$.

Et comme $S^{m-1}(x)$ est impair, alors $S^m(x) = \frac{3S^{m-1}(x)+1}{2}$. Et par suite $\frac{3}{8}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2 \geq \frac{3}{8}(\frac{2}{3+\frac{1}{S^{m-1}(x)}})^2 \geq \frac{3}{32}$.

D'où le résultat. □

Remarque 1. En prolongeant \mathbb{R} à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et en posant :

$a(+\infty) = +\infty$, $a \times +\infty = a(+\infty)$, $a(+\infty) + b(+\infty) = (a+b)(+\infty)$, $\frac{a(+\infty)}{c(+\infty)} = \frac{a}{c}$,
, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$: avec ces notations, $+\infty$ est considéré comme un nombre réel et on peut effectuer dans $\overline{\mathbb{R}}$ le même calcul que dans \mathbb{R} : Par exemple : $\frac{1}{2} = \int_0^x \frac{t}{x^2} dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t}{x^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^2} \times \int_0^x t dt) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^2}) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t dt = \frac{1}{(+\infty)^2} \times \int_0^{+\infty} t dt = \frac{1}{(+\infty)^2} \times \frac{1}{2} (+\infty)^2 = \frac{1}{2}$.

En utilisant la remarque 1, on va montrer le corollaire 2 suivant :

Corollaire 2. Si $x \in \mathbb{N}^*$, et si $1 \notin \mathcal{O}_S(x)$, alors $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) < +\infty$.

Démonstration. En effet, si $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) = +\infty$ alors l'ensemble $I = \{m \in \mathbb{N}, S^{m-1}(x) \text{ est impair}\}$ est fini car sinon en utilisant le corollaire 1 et la remarque 1 on a : $\frac{1}{2} = \lim_{S^n(x) \rightarrow +\infty} \int_0^{S^n(x)} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt = \lim_{S^n(x) \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt \geq \sum_{m \in I} (\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt) \geq \sum_{m \in I, S^m(x) \geq S^n(x)} (\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt) \geq 32 \int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq 1$ (d'après le lemme 4), ce qui est absurde, et il s'en suit que $P = \{m \in \mathbb{N}, S^{m-1}(x) \text{ est pair}\}$ est fini. Donc $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) \neq +\infty$, ce qui est absurde. □

Lemme 5. Si $S^n(x) = x$ alors $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe un unique couple (A_{n-i}, B_{n-i}) tel que $S^{n-i}(x) = A_{n-i}x + B_{n-i}$ avec $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$, $A_n = 1$ et $B_n = 0$. Et les A_{n-i} sont minimales.

De plus si $\exists i \in \{1, \dots, n-2\}$ tel que $S^{n-i}(x) = 2S^{n-\{i-1\}}(x) = 2(A_{n-\{i-1\}}x + B_{n-\{i-1\}})$, alors $B_1 + 1 \not\leq A_1$.

Enfin $(A_1, B_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

Démonstration. - On a $A_n = 1, B_n = 0$, et $B_n + 1 \leq A_n$. Montrons le résultat par récurrence.

Si $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$ avec $S^{n-i}(x) = A_{n-i}x + B_{n-i}$, alors, comme

$S^{n-i}(x) = S(S^{n-\{i+1\}})(x)$, on a :

Soit $S^{n-\{i+1\}}(x) = 2(A_{n-i}x + B_{n-i}) = 2A_{n-i}x + 2B_{n-i} = 2S^{n-i}(x)$ avec $2B_{n-i} + 1 \not\leq 2A_{n-i}$

Soit $S^{n-\{i+1\}}(x) = \frac{2(A_{n-i}x+B_{n-i})-1}{3} = \frac{2A_{n-i}}{3}x + \frac{2B_{n-i}-1}{3}$ avec $\frac{2B_{n-i}-1}{3} + 1 \leq \frac{2A_{n-i}}{3}$

Dans le premier cas :

$$A_{n-\{i+1\}} = 2A_{n-i} \text{ et } B_{n-\{i+1\}} = 2B_{n-i}$$

Et dans le deuxième cas :

$$A_{n-\{i+1\}} = \frac{2A_{n-i}}{3} \text{ et } B_{n-\{i+1\}} = \frac{2B_{n-i}-1}{3}$$

- L'unicité se déduit de la minimalité

- $S^1(x) = A_1x + B_1 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Donc $B_1 = (\frac{3}{2} - A_1)x + \frac{1}{2}$.

Or $B_1 + 1 \leq A_1 \implies (\frac{3}{2} - A_1)x + \frac{3}{2} \leq A_1 \implies \frac{3}{2} \leq A_1$, donc $(A_1, B_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ par minimalité. □

Corollaire 3. Si $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ alors $S^n(x) \neq x, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration. 1 cas : Si $n \geq 3$

Si $S^n(x) = x$ alors du lemme 5, si $\exists i \in \{1, \dots, n-2\}$ tel que $S^{n-i}(x) = 2S^{n-\{i-1\}}(x) = 2(A_{n-\{i-1\}}x + B_{n-\{i-1\}})$, alors $B_1 + 1 \not\leq A_1$, or si x est impair, on a $B_1 = \frac{1}{2}$ et $A_1 = \frac{3}{2}$ (car $S(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$), mais on n'a pas : $B_1 + 1 \not\leq A_1$.

Et si x est pair alors $B_1 = 0$ et $A_1 = \frac{1}{2}$ (car $S(x) = \frac{x}{2}$), mais on n'a pas : $B_1 + 1 \not\leq A_1$

Donc $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $S^{n-i}(x) = \frac{2(A_{n-i}x+B_{n-i})-1}{3}$ avec $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$.

Mais dans ce cas la récurrence impose que $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $B_{n-i} \leq 0$ et $A_{n-i} \not\leq \frac{2}{3}$ pour $i \geq 2$.

Pour $i = 1$, on aura : $S^{n-1}(x) \leq x$ et $S^{n-1}(x) = \frac{2x-1}{3}$. En poursuivant comme dans la preuve du lemme 5 on aura $S^1(x) = A_1x + B_1$ avec $B_1 + 1 \not\leq A_1$. Or

du lemme 5 $S^1(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ mais on a pas $B_1 + 1 \lesseqgtr A_1$.

On conclut donc que dans ce cas on ne peut pas avoir $S^n(x) = x$.

2 cas : Si $n \leq 2$

Dans ce cas $S^n(x) = x \implies x \in \{0, 1, 2\}$

□

Preuve de la proposition 1 :

Démonstration. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \in \mathcal{O}_S(x)$: En effet le résultat est évident pour $x \in \{1, 2\}$.

Si $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ alors du corollaire 2 si $1 \notin \mathcal{O}_S(x)$, alors $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) < +\infty$.

Donc il existe un $y \in \mathcal{O}_S(x)$, tel que $S^n(y) = y$ avec $y \in \mathbb{N}^*$, or du corollaire 3 $y \in \{0, 1, 2\}$ donc $y \in \{1, 2\}$, et $1 \in \mathcal{O}_S(y)$. Et par suite $1 \in \mathcal{O}_S(x)$.

□

Conclusion :

Les difficultés rencontrés pour démontrer la conjecture de Syracuse, en dépit de l'application acharnée de méthodes mathématiques puissantes par des esprits brillants a conduit certains chercheurs à se demander si la conjecture de Syracuse est un problème indécidable. D'autres, comme Paul Erdos qui a dit de la dite conjecture [3] " les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ", pensaient que la preuve de cette conjecture ne rentre pas dans les trajectoires mathématiques.

J'ai prouvé dans cet article que, comme les nombres qui ne peuvent pas s'échapper à la force Syracusienne et finiront par tomber sur le nombre 1, la preuve de la conjecture Syracusienne elle aussi ne peut s'échapper à la force des mathématiques contrairement à ce que a dit Paul Erdos et d'autres [3] .

Remerciements :

Je tiens à remercier tout ceux qui ont contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

- [1] R. E. Crandall. On the “ $3x + 1$ ” problem. *Math. Comp.*, 32 :1281–1292, 1978.
- [2] Jean-Paul Delahaye. La conjecture de syracuse. *Pour la science*, <http://crystal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/053.pdf>, (247), Mai 1998.
- [3] R. K. Guy. Don’t try to solve these problems! *Amer. Math. Monthly*, 90 :35–41, 1983.
- [4] Alain Favre Luc-Olivier Pochon. La suite de syracuse, un monde de conjectures. *Hal.archives-ouvertes.fr* , <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181>, Sep 2017.