The *n* X *n* X *n* Dots Problem:
An Improved "Outside the Box" Upper Bound

Marco Ripà[1], Valerio Bencini[2]

[1] **Economics – Institutions and Finance – Roma Tre University, Rome, Italy. e-mail:** *marcokrt1984@yahoo.it*

[2] **Scientific High School G. Galilei, Erba, Italy. e-mail:** *valerio.bencini@gmail.com*

Abstract: In this paper we describe two new patterns, in order to improve the upper bound for the Ripà's *n* X *n* X *n* points problem, saving a few lines for many values of *n*. The new upper bound, for any n≥6, becomes h_u(n)=int((3/2*n^2)+int(n/4)-int((n-1)/4)+int((n+1)/4)-int((n+2)/4)+n-2, where int(x)=floor(x).

Keywords: topology, inside the box, nine dots, straight line, outside the box, upper bound, graph theory, three-dimensional, segment, point.

AMS Classification: Primary 91A44; Secondary 37F20, 91A46.

1. Presentazione del problema

Il problema ***n* X *n* X *n*** è una estensione del noto *Nine Dots Puzzle* risalente al 1914 [1], formalizzata da Ripà e Remirez nel 2013 [2].

Ci si chiede qual è il minimo numero di segmenti di una spezzata che sono necessari per unire *n* X *n* X *n* punti (adimensionali), disposti in una griglia regolare tridimensionale. I punti sono equidistanti tra loro e sono allineati secondo le tre dimensioni spaziali, in modo tale da essere racchiudibili in un cubo di dimensione *(n-1)* X *(n-1)* X *(n-1)*, ponendo come unitaria la distanza minima fra due punti.

Gli schemi risolutivi presentati in questo articolo non si propongono di evitare di travalicare i confini del cubo immaginario summenzionato, bensì hanno il solo fine di abbassare, per molti n≥6, il limite massimo dimostrato in precenza [3].

2. Descrizione dello schema risolutivo

Immaginando di dividere la griglia cubica $n \times n \times n$ in n piani identici, aiutiamoci visivamente con il disegno mostrato in *Figura 1* e l'ausilio dei quattro colori rosso, blu, verde e giallo per distinguere gli altrettanti gruppi di linee implicati.

2.1 - Andiamo a tracciare sul primo piano (esterno) q **segmenti rossi** come riportato nei due schemi fissi mostrati in *Figura 6* e in *Figura 7*: quale schema usare nello specifico verrà chiarito più avanti.

Raggiungiamo quindi il piano seguente tramite il primo **segmento verde** mostrato in *Figura 1* e tracciamo altri q **segmenti rossi** come indicato in *Figura 2*, ma questa volta al contrario (procedendo a ritroso rispetto al percorso seguito nel caso del piano di partenza). Ripetiamo iterativamente la stessa procedura fino al completamento del pattern nell'n-esimo piano (opposto al piano di partenza).

Indicando con p il numero di punti collegati per mezzo dei q **segmenti rossi** su un dato piano, notiamo che rimangono ancora da unire n^2-p punti per ciascuno degli n piani (il perché siano proprio di n^2-p punti appare lapalissiano, essendo n^2 i punti che compongono ciascuna griglia prima di eliminarne p tramite i q segmenti rossi); le *Figure 3*, *4* e *5* sottolineano visivamente quanto poc'anzi osservato. Il numero dei punti residui è dunque lo stesso per ogni piano e si tratta di punti "allineati" tra loro, come mostrato in *Figura 1* e in *Figura 5*.

2.2 - Dal punto terminale dell'ultimo segmento tracciato sul piano opposto a quello di partenza, si traccia quindi il **segmento blu** verso il primo di questi n^2-p punti dello stesso piano (*Figura 4*) e poi se ne traccia uno **giallo** a collegare altri $n-1$ punti residui; ci si sposta nuovamente sul piano come mostrato in *Figura 5* e si ripete la procedura fino a completamento, rimbalzando tra i due piani esterni con i **segmenti gialli** e posizionandosi opportunamente sul medesimo piano con i **segmenti blu** (*Figura 5*).

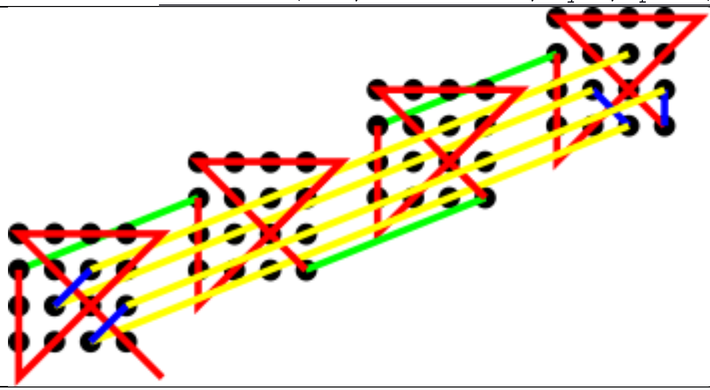
FIGURA 1. ESEMPIO (n=4, Pattern 2, q=4, p=12)

numero *segmenti rossi*: q segmenti del *pattern 2* × n piani
numero *segmenti verdi*: $n-1$ segmenti per collegare n piani
numero *segmenti blu*: n^2-p segmenti per collegare n^2-p punti a due a due
numero *segmenti gialli*: n^2-p segmenti per collegare n^2-p punti del primo piano con n^2-p punti dell'n-esimo piano, passando per n punti con ogni segmento
Segmenti utilizzati: h = $q \times n + n-1 + n^2-p + n^2-p = 4 \times 4 + 4-1 + 4^2-12 + 4^2-12 =$ **27**

FIGURA 2. Caso *6* X *6* X *6*, schema base del primo piano secondo il pattern 1 (riportato in *Figura 6*):

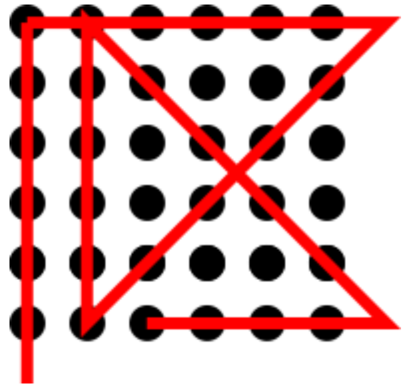


FIGURA 3. Segmenti rossi e *n-1* segmenti verdi di collegamento su ogni piano:

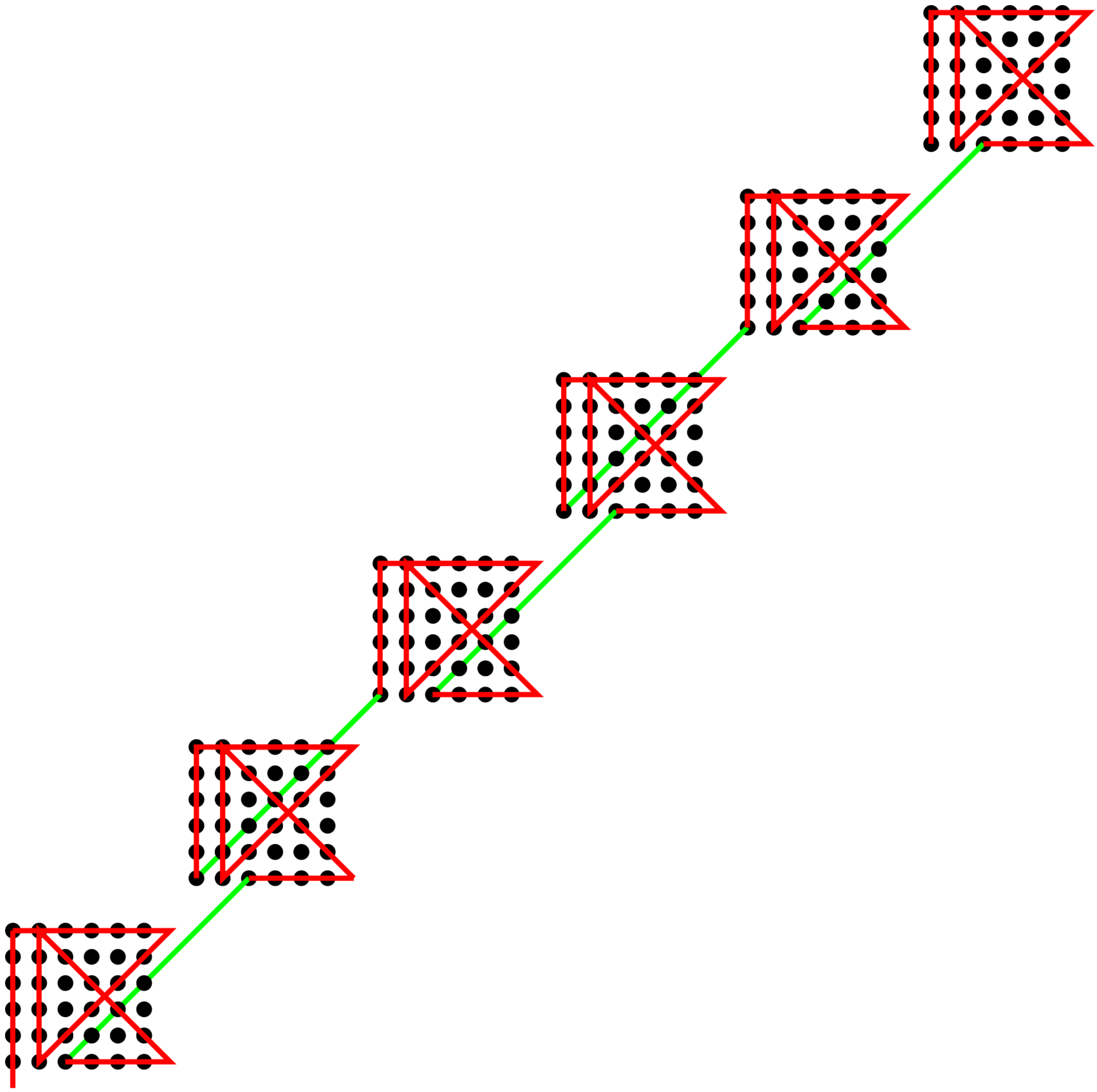


FIGURA 4. Segmento blu di collegamento, giacente sul piano opposto a quello di partenza:

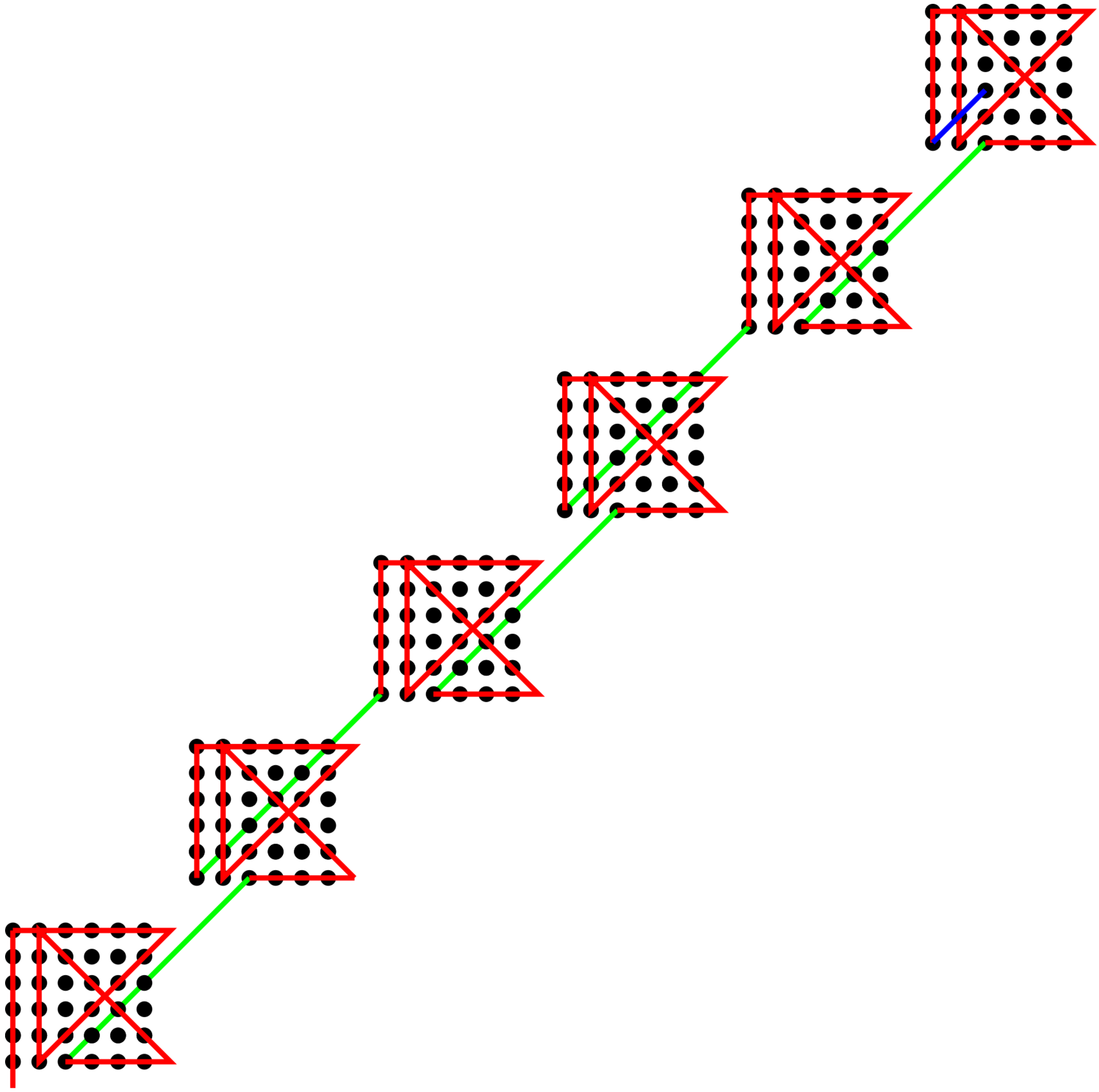
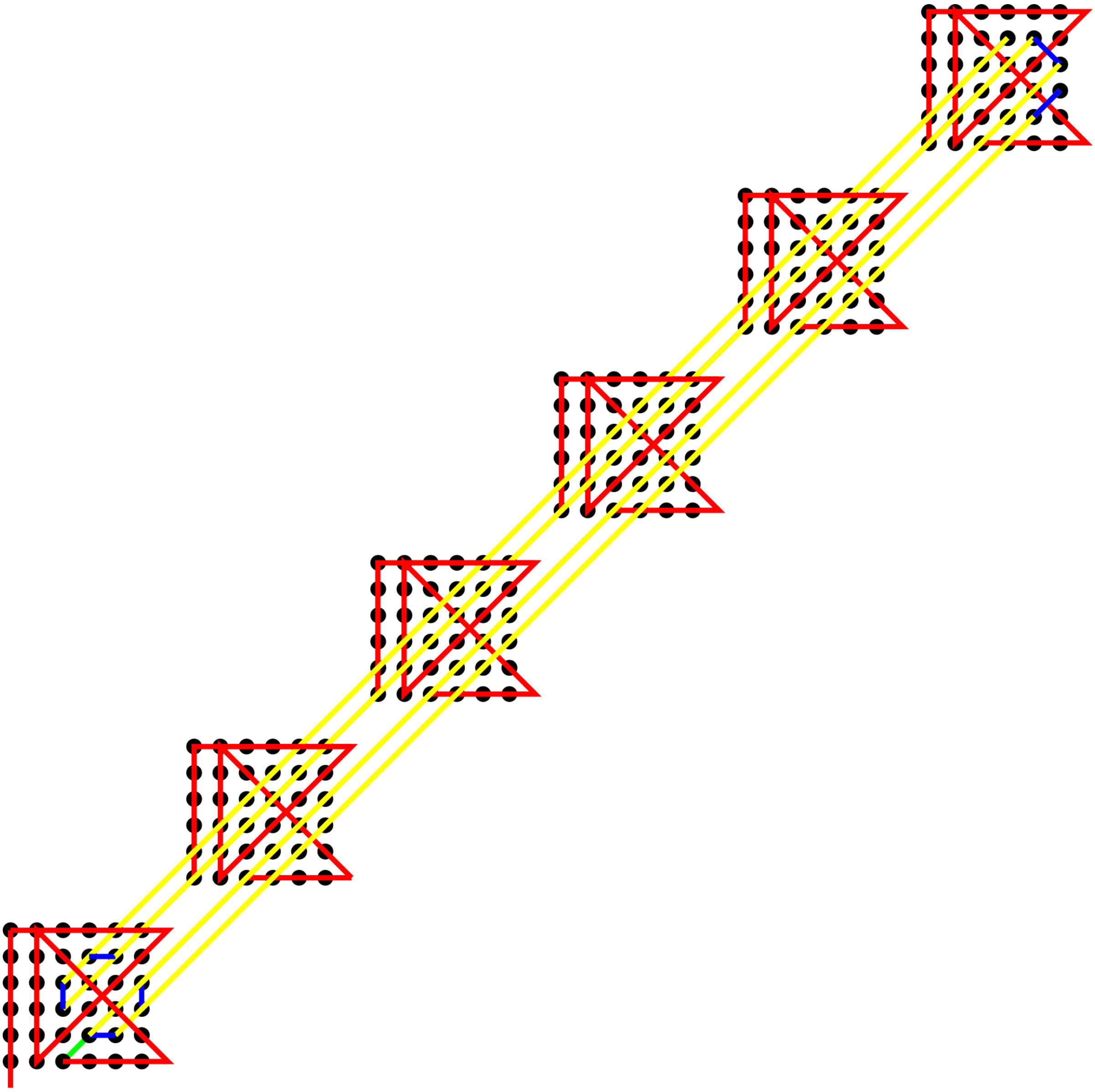
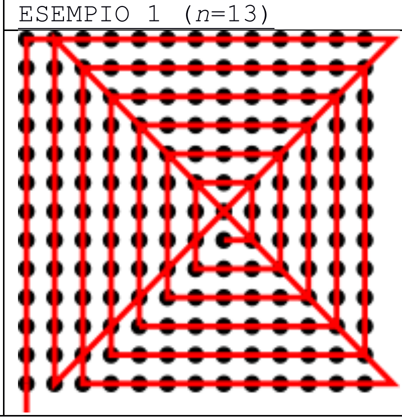
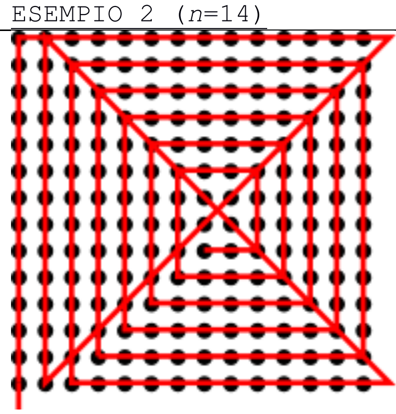


FIGURA 5. Segmenti gialli che attraversano *n* punti ciascuno e segmenti blu di collegamento sui due piani esterni e opposti:



3. Pattern

Pattern 1:

FIGURA 6.	ESEMPIO 1 (n=13)	ESEMPIO 2 (n=14)
		

Per disegnare il *Pattern 1*, si parte dal punto in basso a sinistra, si sale fino al punto in alto a sinistra, si oltrepassa di un'unità il punto all'estrema destra, si scende in diagonale fino a raggiungere il punto in basso a sinistra e così via, seguendo lo schema in alto.

Raggruppiamo ora i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli che sono già stati attraversati dai segmenti precedenti:

Numero segmento (*q*)	**Numero punti** (se ***n=2m-1***, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)	**Numero punti** (se ***n=2m***, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)
1	n	n
2	n-1	n-1
3	n-1	n-1
4	n-2	n-2
5	n-3	n-2
6	n-2	n-2
7	n-4	n-4
8	n-4	n-4
9	n-4	n-4
10	n-4	n-4
11	n-6	n-6
12	n-6	n-6
13	n-6	n-6
14	n-6	n-6
15	n-8	n-8
16	n-8	n-8
17	n-8	n-8
18	n-8	n-8
…	…	…

Sommando progressivamente (a cascata) i valori della variabile "numero punti", di cui sopra, si ottiene:

p (se **n=2m-1**, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)	***p*** (se ***n=2m***, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)
n	n
2n-1	2n-1
3n-2	3n-2
4n-4	4n-4
5n-7	5n-6
6n-9	6n-8
7n-13	7n-12
8n-17	8n-16
9n-21	9n-20
10n-25	10n-24
11n-31	11n-30
12n-37	12n-36
13n-43	13n-42
14n-49	14n-48
15n-57	15n-56
16n-65	16n-64
17n-73	17n-72
18n-81	18n-80
…	…

Raggruppiamo i valori di p in maniera tale da metterne in risalto la progressione:

p (se $n=2m-1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)	p (se $n=2m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$)
n	n 3n-2 5n-6 7n-12 9n-20 11n-30 13n-42 15n-56 17n-72 …
2n-1	2n-1
3n-2	4n-4 8n-16 12n-36 16n-64 …
4n-4	6n-8 10n-24 14n-48 18n-80 …
5n-7 7n-13 9n-21 11n-31 13n-43 15n-57 17n-73 …	-
6n-9 10n-25 14n-49 18n-81 …	-
8n-17 12n-37 16n-65 …	-

Si nota che p è scritto nella forma $q\times n-a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$. Troviamo i valori di a sulla base della precedente tabella:

Se $n=2m-1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$, si ha che:

- Se $q=1$, $p = n$
- Se $q=2$, $p = 2n-1$
- Se $q=3$, $p = 3n-2$
- Se $q=4$, $p = 4n-4$
- Se $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1; 2\}$, $p = q\times n-(q^2+3)/4$
- Se $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q\times n-q^2/4$
- Se $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$, $p = q\times n-(q^2+4)/4$

Se $n=2m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$, si ha che:

- Se $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q\times n-(q^2-1)/4$
- Se $q=2$, $p = 2n-1$
- Se $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q\times n-q^2/4$
- Se $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q\times n-(q^2-4)/4$

Sapendo che n^2-p corrisponde al numero di punti di un *pattern* che restano ancora da congiungere dopo aver tracciato q linee, definiamo $h:=h(q,n)$ come $q\times n + n-1 + 2\times(n^2-p)$, al variare di q e n nei naturali.

Posto $\boldsymbol{n:=2m-1}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, risulta che:

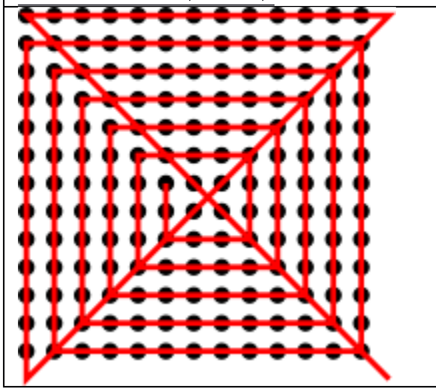
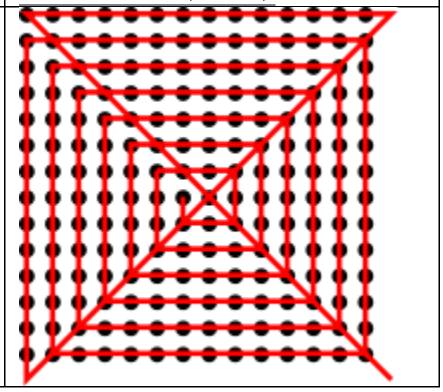
- *Se* $q=1$, $h = q\times n + n-1 + 2\times(n^2-n)$
- *Se* $q=2$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$
- *Se* $q=3$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(3n-2)]$
- *Se* $q=4$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(4n-4)]$
- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1;\ 2\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)/4]\}$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+4)/4]\}$

Posto $\boldsymbol{n:=2m}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, risulta che:

- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)/4]\}$
- *Se* $q=2$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)/4]\}$

Ripetiamo dunque le medesime considerazioni con riferimento al *Pattern 2*, mostarto di seguito.

Pattern 2:

FIGURA 7.	ESEMPIO 1 (*n*=13)	ESEMPIO 1 (*n*=13)
		

Per disegnare il *Pattern 2*, si parte dal punto in basso a destra, si sale in diagonale fino al punto in alto a sinistra, si procede verso destra fino a oltrepassare di un'unità il punto più estremo della griglia, si scende in diagonale in basso a sinistra e si continua così, seguendo lo schema riportato sopra.

Raggruppiamo i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli che sono già stati attraversati dai segmenti precedenti, in perfetta analogia al caso speculare descritto prima.

Numero segmento (***q***)	**Numero punti** (se ***n=2m-1***, $\forall m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$)	Numero punti (se ***n=2m***, $\forall m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$)
1	n	n
2	n-1	n-1
3	n-1	n-2
4	n-1	n-1
5	n-3	n-3
6	n-3	n-3
7	n-3	n-3
8	n-3	n-3
9	n-5	n-5
10	n-5	n-5
11	n-5	n-5
12	n-5	n-5
13	n-7	n-7
14	n-7	n-7
15	n-7	n-7
16	n-7	n-7
…	…	…

Effettuando le somme progressive dei valori della tabella precedente, calcoliamo *p*:

p (se ***n=2m-1***, $\forall m \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$)	***p*** (se ***n=2m***, $\forall m \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$)
n	n
2n-1	2n-1
3n-2	3n-3
4n-3	4n-4
5n-6	5n-7
6n-9	6n-10
7n-12	7n-13
8n-15	8n-16
9n-20	9n-21
10n-25	10n-26
11n-30	11n-31
12n-35	12n-36
13n-42	13n-43
14n-49	14n-50
15n-56	15n-57
16n-63	16n-64
…	…

Raggruppiamo i valori di *p* in maniera opportuna:

p (se ***n=2m-1***, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$)	***p*** (se ***n=2m***, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$)
n 3n-2 5n-6 7n-12 9n-20 11n-30 13n-42 15n-56 …	n
2n-1 6n-9 10n-25 14n-49 …	2n-1
4n-3 8n-15 12n-35 16n-63 …	3n-3 5n-7 7n-13 9n-21 11n-31 13n-43 15n-57 …
-	4n-4 8n-16 12n-36 16n-64 …
-	6n-10 10n-26 14n-50 …

Si nota che *p* è scritto nella forma $q \times n - a$, $\forall a \in \mathbb{N}$, e troviamo i valori di *a* sulla base della precedente tabella:

Se ***n=2m-1***, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$, si ha che:

- *Se* $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q \times n-(q^2-1)/4$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $p = q \times n-q^2/4$
- *Se* $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q \times n-(q^2-4)/4$

Se ***n=2m***, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$, si ha che:

- *Se* $q=1$, $p = n$
- *Se* $q=2$, $p = 2n-1$
- *Se* $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1\}$, $p = q \times n-(q^2+3)/4$
- *Se* $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q \times n-q^2/4$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p = q \times n-(q^2+4)/4$

Esprimiamo *h* nella forma $q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-p)$.

Si calcola, quindi, *h* come $q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-p)$, al variare di q, al variare di *n*.

Posto $\boldsymbol{n=2m-1}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, risulta che:

- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)/4]\}$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)/4]\}$

Posto $\boldsymbol{n=2m}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, risulta che:

- *Se* $q=1$, $h = q\times n + n-1 + 2\times(n^2-n)$
- *Se* $q=2$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$
- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)/4]\}$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+4)/4]\}$

4. Formalizzazione del nuovo upper bound

Richiamando i valori di h ottenuti in precedenza per il *Pattern 1* e per il *Pattern 2*, proponiamoci di condensare i vari casi in un'unica formula compatta.

Pattern 1:

Ponendo $\boldsymbol{n=2m-1}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, sappiamo che:

- *Se* $q=1$, $h = q\times n + n-1 + 2\times(n^2-n)$
- *Se* $q=2$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$
- *Se* $q=3$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(3n-2)]$
- *Se* $q=4$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(4n-4)]$
- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1;\ 2\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)/4]\}$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+4)/4]\}$

Ponendo $\boldsymbol{n=2m}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, sappiamo che:

- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)/4]\}$
- *Se* $q=2$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)/4]\}$

Pattern 2:

Ponendo $\boldsymbol{n=2m-1}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, sappiamo che:

- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-1)/4]\}$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2-4)/4]\}$

Ponendo $\boldsymbol{n=2m}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, sappiamo che:

- *Se* $q=1$, $h = q\times n + n-1 + 2\times(n^2-n)$
- *Se* $q=2$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(2n-1)]$
- *Se* $q=2r-1$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+3)/4]\}$
- *Se* $q=4r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q\times n-q^2/4)]$
- *Se* $q=4r+2$, $\forall\, r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $h = q\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q\times n-(q^2+4)/4]\}$

Definiamo a questo punto $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ottimale}}$ come il miglior valore di *q* tale che *h* abbia il minor valore possibile.

Per trovare $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ottimale}}$, calcoliamo *h* al variare di *q*, sia nel caso del *Pattern 1* che nel *Pattern 2*:

n	***q***	***h* con il Pattern 1**	***h* con il Pattern 2**
1	1	*1*	*1*
2	1	7	7
	2	7	7
	3	7	7
	4	-	7
3	1	17	17
	2	16	16
	3	15	15
	4	16	*14*
	5	19	-
	6	20	-
4	1	31	31
	2	29	29
	3	*27*	29
	4	*27*	*27*
	5	*27*	29
	6	*27*	31
	7	-	33
	8	-	35
5	1	49	49
	2	46	46
	3	43	43
	4	42	*40*
	5	43	41
	6	42	42
	7	45	43
	8	48	44
	9	51	-
	10	54	-
6	1	71	71
	2	67	67
	3	63	65
	4	61	61
	5	59	61
	6	*57*	61
	7	59	61
	8	61	61
	9	63	65
	10	65	69
	11	-	73
	12	-	77
…	…	…	…

I valori di $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ottimale}}$ risultano, dunque, i seguenti:

Pattern 1:

- *Se* $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n - 1 \lor q_{ott} = n \lor q_{ott} = n + 1 \lor q_{ott} = n + 2$
- *Se* $n=4m+2$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n$

Pattern 2:

- *Se $n=4m-1$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n + 1$*
- *Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n$*
- *Se $n=4m+1$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n - 1$*

Pertanto, i valori di *h* con $\boldsymbol{q_{ottimale}}$ sono di seguito determinati.

Pattern 1:

- *Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n - 1$*
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q_{ott}\times n-(q_{ott}^2-1)/4]\} = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 1}}$
- *Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n$*
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q_{ott}\times n-q_{ott}^2/4)] = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 1}}$
- *Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:*
  $q_{ott} = n + 1$
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q_{ott}\times n-(q_{ott}^2-1)/4]\} = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 1}}$
- *Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:*
  $q_{ott} = n + 2$
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q_{ott}\times n-(q_{ott}^2-4)/4]\} = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 1}}$
- *Se $n=4m+2$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n$*
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q_{ott}\times n-(q_{ott}^2-4)/4]\} = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 3}}$

Pattern 2:

- *Se $n=4m-1$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n + 1$*
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q_{ott}\times n-(q_{ott}^2-4)/4]\} = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 5/2}}$
- *Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n$*
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times[n^2-(q_{ott}\times n-q_{ott}^2/4)] = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 1}}$
- *Se $n=4m+1$, $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $q_{ott} = n - 1$*
  $h = q_{ott}\times n + n-1 + 2\times\{n^2-[q_{ott}\times n-(q_{ott}^2-4)/4]\} = \underline{\mathbf{3/2\times n^2 + n - 5/2}}$

Notiamo a questo punto che è possibile esprimere sinteticamente i risultati di cui sopra utilizzando la funzione *floor(x)*, avente la funzione di sostituire *x* con il più grande intero positivo ≤ *x*.

Nel caso in questione, è evidente che *floor(x)* corrisponderà alla parte intera degli addendi che andranno a comporre la somma algebrica che ci fornirà il valore di *h* al variare di *n*.

Nello specifico, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;\ 1;\ 2\}$,

$$h(q_{ott}) \coloneqq h_u(n) = \left\lfloor\frac{3}{2}\cdot n^2\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor + n - 2$$

Tabella che esprime $h_u(n)$, il limite superiore corrente del problema n X n X n. I valori $h(4)=27$ e $h(5)=40$ non corrispondono al corrente "upper bound" del problema.

n	$h_u(n)$
1	1
2	7
3	14
4	27
5	40
6	57
7	78
8	103
9	128
10	157
11	190
12	227
13	264
14	305
15	350
16	399
17	448
18	501
19	558
20	619
…	…
42	2.685
…	…

Risultati migliori di quelli proposti, trovati da Marco Ripà:

$h(4)$ = 25 (*http://vixra.org/pdf/1707.0298v1.pdf*)

$h(5)$ = 39 (*https://www.youtube.com/watch?v=xtL28RCCBtY*)

Bibliografia

[1] Loyd, S., Cyclopedia of Puzzles. *The Lamb Publishing Company*, 1914, p. 301.

[2] Ripà, M., Ramirez, P., *The Nine Dots Puzzle Extended nxnxn…xn Points*, viXra, 5 Sept. 2013, http://vixra.org/pdf/1307.0021v4.pdf.

[3] Ripà, M., The nxnxn Dots Problem Optimal Solution, viXra, 5 July 2017, http://vixra.org/pdf/1707.0298v1.pdf.