

# Eléments sur les quaternions

A.Balan

April 7, 2018

On désigne par  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{H}$  les corps des réels, complexes et quaternions.

## 1 Les espaces vectoriels quaternioniques

### 1.1 Définition

On appelle espace vectoriel quaternionique le produit tensoriel suivant :

$$\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E$$

avec  $\mathbf{H}$  le corps des quaternions et  $E$  un espace vectoriel réel. On a alors une multiplication à gauche et à droite par les quaternions :

$$q(q' \otimes x) = qq' \otimes x \quad (q' \otimes x)q = q'q \otimes x$$

Un espace vectoriel quaternionique possède une multiplication à droite et à gauche.

### 1.2 Somme de deux espaces vectoriels sur $\mathbf{H}$

Soient  $E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E'$ ,  $F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} F'$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{H}$  ; dès lors, on peut faire leur somme direct :

$$E \oplus F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} (E' \oplus F')$$

Il s'agit du produit cartésien qui possède une multiplication à droite et à gauche par les quaternions :

$$q(e \oplus f) = qe \oplus qf \quad (e \oplus f)q = eq \oplus fq$$

### 1.3 Le produit tensoriel de deux espaces sur $\mathbf{H}$

Etant donnés deux espaces vectoriels quaternioniques, on peut réaliser leur produit tensoriels :

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E' & F &= \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} F' \\ E \otimes_{\mathbf{H}} F &= (\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{H}} \mathbf{H}) \otimes_{\mathbf{R}} E \otimes_{\mathbf{R}} F \end{aligned}$$

Comme par multiplication on a  $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{H}} \mathbf{H} = \mathbf{H}$ , le produit tensoriel est aussi :

$$E \otimes_{\mathbf{H}} F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E \otimes_{\mathbf{R}} F$$

$$eq \otimes f = e \otimes qf$$

C'est un espace vectoriel quaternionique.

$$q(e \otimes f) = qe \otimes f \quad (e \otimes f)q = e \otimes fq$$

## 2 Les algèbres de Clifford quaternioniques

### 2.1 Les formes quadratiques quaternioniques

On se donne un espace vectoriel quaternionique,  $E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E'$  et une forme bilinéaire symétrique  $\tilde{g}$  sur  $E'$  (ce qui est équivalent à une forme quadratique  $\tilde{Q}$ ).

La forme bilinéaire sur  $E$  est donné par les produits scalaires suivants :

$$g(q \otimes x, q' \otimes y) = qq' \tilde{g}(x, y)$$

Elle est non symétrique et vérifie :

$$g(qe, f) = qg(e, f) \quad g(e, fq) = g(e, f)q \quad g(eq, f) = g(e, qf)$$

$$Q(e) = g(e, e) \quad Q(q \otimes x) = q^2 \tilde{Q}(x)$$

Dans la base qui diagonalise  $\tilde{Q}$ ,  $Q$  est aussi diagonalisable.

Remarque : on peut aussi définir une forme hermitienne quaternionique en prenant  $q\tilde{q}'$  dans la définition.

### 2.2 L'algèbre de Clifford quaternionique

On considère la somme directe des produits tensoriels d'un espace vectoriel  $E$  par lui-même :

$$T(E) = \mathbf{H} \oplus E \oplus (E \otimes_{\mathbf{H}} E) \oplus \dots$$

et on quotiente par les relations suivantes :

$$e \otimes f + f \otimes e = -g(e, f) - g(f, e)$$

On a :

$$\text{Clif}_{\mathbf{H}}(E, Q) = T(E) / \sim = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \text{Clif}_{\mathbf{R}}(E', \tilde{Q})$$

Et aussi, pour un vecteur  $e$  :

$$e^2 = -Q(e)$$

### 3 L'algèbre linéaire quaternionique

#### 3.1 Les endomorphismes

On se donne deux espaces vectoriels quaternioniques  $E = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} E'$  et  $F = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} F'$ . Un morphisme  $f$  de  $E$  dans  $F$  est une application linéaire à droite de  $E$  dans  $F$  :

$$f(eq) = f(e)q$$

Un endomorphisme  $f \in \text{End}(E)$  de  $E$  est un morphisme de  $E$  dans  $E$ . Un automorphisme  $f \in \text{Aut}(E)$  de  $E$  est un endomorphisme inversible à gauche et à droite.

#### 3.2 Les matrices quaternioniques

Si on se donne une base de  $E$ , les endomorphismes de  $E$  sont alors assimilables à des matrices à coefficients dans  $\mathbf{H}$ . En effet un vecteur  $e = q \otimes x$  s'écrit aussi  $e = (1 \otimes x)q$  et on se place sur une base  $e_i = 1 \otimes x_i$ . Le produit des matrices correspond à la composition des endomorphismes. On a :

$$\text{End}(E) \cong M_n(\mathbf{H})$$

$$\text{Aut}(E) \cong \text{Gl}_n(\mathbf{H})$$

### 4 Les fibrés quaternioniques

On se donne une variété de base  $M$ , un fibré vectoriel  $E$  sur  $M$  est constructible par des cocycles de Čech. On a un recouvrement de  $M$ ,  $\cup_i U_i$  et sur chaque intersection  $U_i \cap U_j$ , on se donne  $g_{ij} \in \text{Gl}_n(\mathbf{H})$  tel que  $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ . Un fibré vectoriel quaternionique possède une multiplication à droite par un quaternion.

### 5 Les connexions quaternioniques

Les connexions quaternioniques sont données par des connexions sur les fibrés  $E$  qui conservent la structure quaternionique ; c'est-à-dire que :

$$\nabla(sq) = \nabla(s)q$$

pour toute section  $s$  et tout quaternion  $q$ . De plus pour toute fonction quaternionique  $q$ , on a aussi :

$$\nabla_X(sq) = sX(q) + \nabla_X(s)q$$

(on a appliqué un vecteur  $X$  à une fonction  $q$ ).

## 6 Définition du groupe $Spin^H(n)$

On appelle groupe spinoriel quaternionique le groupe suivant :

$$Spin^H(n) = Spin(n) \times_{\{1,-1\}} SU(2)$$

On identifie  $(-g, -q)$  avec  $(g, q)$ .

### 6.1 L'algèbre de Clifford quaternionique

On considère l'algèbre de Clifford quaternionique :

$$Cliff_n(\mathbf{H}) = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} Cliff_n$$

Dès lors, on peut voir le groupe spinoriel quaternionique plongé dans l'algèbre de Clifford quand on considère les éléments de norme 1. On prend le produit pair de vecteurs de norme 1,  $e = q \otimes x$ ,  $|q| = 1$  et  $|x| = 1$ .

### 6.2 Représentation spinorielle

Les algèbres de Clifford possèdent la propriété suivante [F] :

$$Cliff_{n+2}^{\mathbf{C}} = Cliff_n^{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} M_2(\mathbf{C})$$

Le produit tensoriel de l'algèbre de Clifford avec les endomorphismes de rang 2 des quaternions. On construit ainsi une représentation du groupe spinoriel quaternionique  $Spin^H(n)$  dans  $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^{2^n}$ . Il s'agit du produit tensoriel de deux représentations, pour  $Spin(n)$  et pour  $SU(2)$ .

## References

- [F] T.Friedrich, "Dirac operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.