Generalisani Lorentzov model i još ponešto

Z. B. Vosika

1. Uvod

Prvo će se zapisati jednačina Lorentzovog modela i prateće jednačine a onda njegova generalizacija za ne – Markovljeve procese i odgovarajuća opšta jednačina za dielektričnu permitivnost. Zatim se prelazi na Kvantnu Langevinovu jednačinu sa spoljnjm klasičnim električnim poljem, iz koje se izvodi generalisani Lorentzov model. Onda sledi primena.

2. Lorentzova jednačina i njena generalizacija

Osnovna jednačina je drugi Newtonov zakon za *1d* – slučaj, na datom mestu u materijalu (elektron vezan za atom, masa elektrona m, na koji deluje sila trenja $m\gamma\frac{dy}{dt}$ (γ je konstanta relaksacije ovog trenja, $\tau = 1/\gamma$ je karakteristično vreme relaksacije) i elastična sila od strane atoma $m\omega_0^2 y$, na koji deluje spoljna električna sila $qE_y(t)$, gde je $q = -e$, e – elementarno naelektrisanje ili $q < 0$, ali konstantna veličina):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + m\gamma\frac{dy}{dt} + m\omega_0^2 y = qE_y(t). \tag{1}$$

U homogenom slučaju, za ovaj jednočestični model dielektrika, važe dve formule za vektor (elektronske) indukovane polarizacije : $P = nqy$ (n – koncentracija, smatraće se da je konstantna veličina), i $P = \varepsilon_0\chi_e E_y(t)$ za harmonijsko električno polje i odziv i $P(t) = \varepsilon_0\int_0^t dt'\chi_e(t-t')E_y(t')$ u opštem slučaju (ε_0 - dielektrična konstanta vakuuma, χ_e - električna susceptibilnost). Sa fizičkog stanovišta posmatrano, radi se o indukcionoj polarizaciji. Važi i $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \chi_e$ (relativna dielektrična permitivnost sredine jednaka je količniku dielektrične permitivnost sredine i dielektrične konstante vakuuma). Tada je ($P = P(t)$ i $E_y = E_y(t)$)

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \gamma\frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P = \varepsilon_0\omega_p^2 E_y. \tag{2}$$

Ovde je plazmena frekvencija $\omega_p^2 = n \cdot q^2/(m \cdot \varepsilon_0)$. Jednačina (2) predstavlja konstitutivnu relaciju za navedeni dielektrik. Materijalne konstante su $\gamma, \omega_0, \omega_p$. Koristiće se specijalna Laplaceova transformacija. Za neku vremensku funkciju $\phi(t)$ Laplaceova transformacija je, po definiciji, $(\mathscr{L}(\phi(t)))(s) = \phi_L(s) := \int_0^\infty dt \cdot \phi(t) \cdot exp(-s \cdot t)$. U odnosu na n – ti izvod ($n \in \mathbb{N}$) biće $(\mathscr{L}(\phi^{(n)}(t)))(s) = s^n \cdot \phi_L(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\phi^{(k)}(0)$. Posmatraće se slučaj: $s = i\omega$ (specijalna Laplaceova transformacija). U tom sluąju je $(\mathscr{L}(\phi(t)))(i\omega) := \phi_L(\omega)$. Za njenu primenu na

$P(t) = \varepsilon_0 \int_0^t dt' \chi_e(t-t') E_y(t')$ važi $P_L(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) E_{Ly}(\omega)$. Kada je $P(0) = 0$ i $P^{(1)}(0) = 0$ iz (2) se dobija

$$P_L(s)|_{s=i\omega} = P_L(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E_{Ly}(\omega). \tag{3}$$

Na osnovu navedenog, uz relacije $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = n_r(\omega) - i \cdot n_i(\omega)$ ($P_L(\omega) = (\varepsilon_r(\omega) - 1)\varepsilon_0 E_{Ly}(\omega)$) dobijaju poznate relacije za indekse prelamanja:

$$n_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{4}$$

i

$$n_i(\omega) = \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{5}$$

Moguće je razmotriti i obratan proces - proces dobijanja konstitutivne relacije (2) iz (3). Opet mora biti $P(0) = 0$ i $P^{(1)}(0) = 0$ i $P_L(\omega) = (\varepsilon_r(\omega) - 1)\varepsilon_0 E_{Ly}(\omega)$. Međutim, kada se dobije, (2) (kao, uostalom i (1)) se onda može rešavati za proizvoljne početne uslove. Ona ne sadrži početne uslove. Opštiji slučaj jednačine (2) je

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \int_0^t dt' \gamma(t-t') \frac{dP(t)}{dt}|_{t=t'} + \omega_0^2 P = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_y(t). \tag{6}$$

Ovo je jednačina generalisanog Lorentzovog modela. Pritom, podrazumeva se da i ovde važi $P(t) = \varepsilon_0 \int_0^t dt' \chi_e(t-t') E_y(t')$ čija je specijalna Laplaceova transformacija $P_L(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) E_{Ly}(\omega)$, te je $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e(\omega)$. Relacija $\gamma(t)$ naziva se funkcija relaksacije. U prethodnoj jednačini, kada je $\gamma(t-t') = 2\gamma \cdot \delta(t-t')$ ($\gamma = const$), tada se ona transformiše u (2). Njena specijalna Laplaceova transformacija, kada je $P(0) = 0$ i $P^{(1)}(0) = 0$ dovodi do jednačine

$$P_L(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma_L(\omega)\omega} E_{Ly}(\omega), \tag{7}$$

odakle je

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma_L(\omega)\omega}. \tag{8}$$

Prethodna relacija je jedna od osnovnih.

3. Naelektrisani QLHO zaronjen u fononski heat-bath u spoljnem električnom polju

Opšta Lorentz-ova jednačina izvešće se iz kvantne Langevinove jednačine za kretanje QLHO koji interaguje sa fononima (tj. sa toplotnom kadom, heat-bath) i na njega deluje spoljnje klasično električno polje. U tom smislu, cilj ovog odeljka je da se dođe do relacije, koja se zaniva na radu G. W. Ford, J. T. Lewis, R. F. O'Connell, **Quantum Langevin Equation**, Physical Rewiev A, volume 37, number 11 i knjiga Ulrich Weiss, *Quantum*

Dissipative Systems, (2nd edition), Series in Modern Condensed Matter Physics – Vol. 10, 1999,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + m \cdot \int_{-\infty}^{t} dt' \gamma(t-t') \frac{dy(t)}{dt}|_{t=t'} + V'(y) = \xi(t) + f_y(t), \tag{9}$$

gde je $f_y(t) = qE_y(t)$ sila spoljnjeg električnog polja na naelektrisanu česticu (c-broj), $\xi(t)$ slučajna sila u Heisenbergovoj slici a $V'(y)$ sila interakcije koja ograničava kretanje naelektrisane čestice, ovde, za linearni harmonijski oscilator, $V'(y) = ky$. Donja integralna granica po vremenskoj promenljivi će se ograničiti ubuduće nulom. Prethodna jednačina predstavlja drugačiji zapis kvantne Langevinove jednačine u navedenom radu. Prelaskom na opis stanja, ovoj jednačini bi trebao da odgovara sledeći mikroskopski kvantni hamiltonijan modela nezavisnih oscilatora u okviru razmatranja *linearne disipacije* za translatorno invarijantan sistem

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(y) - f_y(t)y + \sum_j (\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 (q_j - \frac{c_j}{m_j \omega_j^2} y)^2). \tag{10}$$

Nelinearna disipacija u slučaju separabilne interakcije opisuje se smenom $G_{lin,j} = c_j y \to G_j(y) = c_j G(y)$ (c_j je konstanta sprezanja). I dalje je na snazi translatorna invarijantnost.

Tada važe jednačine

$$[y, p] = i\hbar, [q_j, p_k] = i\hbar \delta_{jk}, \tag{11}$$

dok ostale adekvatne relacije imaju za rezultat nulu. Heisenbergove jednačine kretanja su, redom,

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = [y, H]/i\hbar = p/m, \tag{12}$$

te

$$\dot{p} = [p, H]/i\hbar = -V'(y) + f_y(t) + G'(y) \sum_j c_j q_j - \sum_j \frac{c_j}{m_j \omega_j^2} G(y) G'(y) \tag{13}$$

i

$$\dot{q}_j = [q_j, H]/i\hbar = p_j/m_j \tag{14}$$

a takođe

$$\dot{p}_j = [p_j, H]/i\hbar = -m_j \omega_j^2 (q_j - \frac{c_j}{m_j \omega_j^2} G(y)). \tag{15}$$

Jasno je da je $V'(y) = \partial V/\partial y$ i $G'(y) = \partial G/\partial y$. Ako se eliminišu impulsne promenljive biće

$$m\ddot{y} + V'(y) + \sum_j \frac{c_j}{m_j \omega_j^2} G(y) G'(y) = f_y(t) + G'(y) \sum_j c_j q_j, \tag{16}$$

$$m_j \ddot{q}_j + m_j \omega_j^2 q_j = c_j G(y). \tag{17}$$

Jednačina (15) je nehomogena diferencijalna jednačina po q_j, čije je opšte rešenje, za $t \geq 0$

$$q_j(t) = q_j^h(t) + \frac{c_j}{m_j\omega_j^2}\int_0^t dt' sin[\omega_j(t-t')]G(y(t')), \tag{18}$$

s tim da je $q_j^h(t)$ rešenje homogene jednačine od (17), kada je $G(y(t)) \equiv 0$. Ono je dato izrazom

$$q_j^h(t) = q_j^{(0)}cos(\omega_j t) + p_j^{(0)}\frac{sin(\omega_j t)}{m_j\omega_j}, \tag{19}$$

gde su $q_j^{(0)}$ i $p_j^{(0)}$ operatori koji ne zavise od vremena. Da bi pod integralom bila zavisnost od brzine, vrši se parcijalna integracija i dobija

$$q_j(t) = q_j^h(t) + A_j(t) + B_j(t) \tag{20}$$

gde su

$$A_j(t) = \frac{c_j}{m_j\omega_j^2}[G(y(t)) - cos(\omega_j t)G(y(0))] \tag{21}$$

i

$$B_j(t) = -\frac{c_j}{m_j\omega_j^2}\int_0^t dt' cos[\omega_j(t-t')]G'(y(t'))\dot{y}(t'). \tag{22}$$

Ukupna jednačina - osnovni zakon dinamike je

$$\begin{aligned} & m\ddot{y} + mG'(y(t))\int_0^t dt'\gamma(t-t')G'(y(t'))\dot{y}(t') + V'(y) = \\ & -mG'(y(t))\gamma(t)G(y(0)) + G'(y(t))F(t). \end{aligned} \tag{23}$$

Ovde je

$$\gamma(t) = \frac{1}{m}\sum_j \frac{c_j^2}{m_j\omega_j^2}cos(\omega_j t)\Theta(t), \tag{24}$$

gde je $\Theta(t)$ Heaviside step funkcija, i uvodi se slučajna sila $F(t)$

$$F(t) = \sum_j c_j q_j^h(t). \tag{25}$$

U stanju termodinamičke ravnoteže za neku temperaturu T za $t \geq 0$, neka je $G(y) = 0$. Tada je hamiltonijan haet-batha

$$H_B = \sum_j(\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2}m_j\omega_j^2 q_j^2). \tag{26}$$

Ako je definicija srednje-očekivane vrednosti operatora $\hat{O}$ po heat-bathu: $< \hat{O} >' = Tr(\hat{O} \cdot exp(-H_B/k_BT))/Tr(exp(-H_B/k_BT)) = Tr(\hat{O} \cdot \rho')$ (ρ' je matrica gustine), tada je

$$< q_j q_k >' = \frac{\hbar}{2m_j\omega_j} coth(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT})\delta_{jk}, \tag{27}$$

$$< p_j p_k >' = \frac{\hbar m_j\omega_j}{2} coth(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT})\delta_{jk}, \tag{28}$$

$$< q_j p_k >' = - < p_j q_k >' = \frac{1}{2} i\hbar\delta_{jk}. \tag{29}$$

Još jednostavnije (ekvivalentno je) je usrednjenje po $H_B^{(0)}$, za koji važi $p_j \to p_j^{(0)}$ i $q_j \to q_j^{(0)}$, odnosno, $\rho' \to \rho'^{(0)}$ a ne po H_B. Za anti-komutator opearatora $\{F(t), F(t')\} = F(t)F(t') + F(t')F(t)$ je očekivana vrednost

$$< \{F(t), F(t')\} >' = \sum_j m_j\omega_j^3 coth(\frac{\hbar\omega_j}{2k_BT}) cos(\omega_j(t-t')). \tag{30}$$

U slučaju komutatora $[F(t), F(t')] = F(t)F(t') - F(t')F(t)$ očekivana vrednost je

$$< [F(t), F(t')] >' = -i \sum_j \hbar m_j\omega_j^3 sin(\omega_j(t-t')). \tag{31}$$

Konačan korak je Fourier-ova jednostrana transformacija od $\gamma(t)$

$$\gamma_F(\omega) = \int_0^\infty dt \cdot e^{i\omega t} \cdot \gamma(t) = \frac{i}{2m} \sum_j m_j\omega_j^2 [\frac{1}{\omega - \omega_j} + \frac{1}{\omega + \omega_j}]. \tag{32}$$

Koristeći poznatu relaciju $1/(x + i0) = P(1/x) - i\pi\delta(x)$ dobija se

$$Re(\gamma_F(\omega + i0)) = \frac{\pi}{2m} \sum_j \frac{c_j^2}{m_j\omega_j^2} [\delta(\omega - \omega_j) + \delta(\omega + \omega_j)]. \tag{33}$$

Za poslednju jednačinu drugi član desne strane se odbacuje (ne razmatraju se negativne frekvencije). Očigledno je

$$< [F(t) >' = 0, < F(t)F(t') >' = mk_BT\gamma(t-t'). \tag{34}$$

Vraćajući se na linearnu disipaciju $G(y) = y$, Langevin-ova jednačina se piše u obliku

$$m\ddot{y} + V'(y) + m\int_0^t dt'\gamma(t-t')\dot{y}(t') + V'(y) = f_y(t) + F(t) - m\gamma(t)y(0). \tag{35}$$

Eleminacija poslednjeg člana prethodne jednačine vrši se smenom

$$\xi(t) = F(t) - m\gamma(t)y(0). \tag{36}$$

i redefinisanjem matrice gustine

$$\rho = Z^{-1} \cdot exp[-\frac{1}{k_BT} \sum_j (\frac{p_j^{(0)2}}{2m_j} + \frac{1}{2} m_j\omega_j^2 (q_j^{(0)} - \frac{c_j}{m_j\omega_j^2} y^{(0)})^2)]. \tag{37}$$

Očekivana vrednost operatora onda je $<\hat{O}>= Tr(\hat{O}\cdot\rho)$. Tada je

$$<[\xi(t)>=0, <\xi(t)\xi(t')>=mk_BT\gamma(t-t'). \tag{38}$$

Dobija se jednačina (9). Kada $\hbar\to 0$, za $t\geq 0$, uz Ehrenfestovu teoremu za srednju vrednost operatora za poslednje usrednjavanje dobiće se jednačina (svaki član je usrednjen)

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+m\cdot\int_0^t dt'\gamma(t-t')\frac{dy(t)}{dt}|_{t=t'}+V'(y)=f_y(t), \tag{39}$$

odnosno (6).

4. Neka fenomenološka modelovanja

Kada $N\to\infty$ za (9) je, drugačije zapisana (35) je

$$\gamma_F(\omega)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[-i\frac{\omega}{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j^2}{m_j\omega_j^2}\Big(\frac{1}{\omega_j^2-\omega^2-i\cdot\epsilon\cdot sgn(\omega)}\Big)\Big]. \tag{40}$$

Ako se definiše spektralna gustina

$$J(\omega):=\frac{\pi}{2}\sum_j\frac{c_j^2}{m_j}\delta(\omega-\omega_j) \tag{41}$$

u kontinualnom limesu (39) je

$$\gamma_F(\omega)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{-i\omega}{m}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega'\frac{J(\omega')}{\omega'}\Big(\frac{1}{\omega'^2-\omega^2-i\cdot\epsilon\cdot sgn(\omega)}\Big). \tag{42}$$

Realni deo $\gamma_F(\omega)$, $\gamma'_F(\omega)$ (imaginarni je jednak $\gamma''_F(\omega)$) jednak je

$$Re(\gamma_F(\omega+i0))=\gamma'_F(\omega)=\frac{J(\omega)}{m\omega}. \tag{43}$$

Ako je $\gamma_L(s)$ Laplaceova transformacija od $\gamma(t)$ važe relacije

$$\gamma_L(s)=\gamma_F(\omega=is), \gamma_F(\omega)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\gamma_L(s=i\omega+\epsilon). \tag{44}$$

Za $\gamma_L(s)$ onda važi

$$\gamma_L(s)=\frac{s}{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j^2}{m_j\omega_j^2}\Big(\frac{1}{\omega_j^2+s^2}\Big)=\frac{s}{m}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega'\frac{J(\omega')}{\omega'}\frac{1}{\omega'^2+s^2}. \tag{45}$$

Važne se međusobne relacije između $\gamma(t)$ i $J(\omega)$

$$\gamma(t)=\Theta(t)\frac{1}{m}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\frac{J(\omega)}{\omega}cos(\omega t) \tag{46}$$

i

$$J(\omega)=m\cdot\omega\cdot\int_0^\infty dt\gamma(t)cos(\omega t). \tag{47}$$

Vidi se da je

$$J(\omega) = \lim_{\epsilon \to 0^+} m\omega \frac{\gamma_L(\epsilon + i\omega) + \gamma_L(\epsilon - i\omega)}{2}. \tag{48}$$

U Ohm-skom limesu je $\gamma_F = \gamma$, $J(\omega) = m\gamma\omega = \eta\omega$ a $\gamma(t) = 2\gamma\delta(t)$. Kada se vrši Drude-ova regularizacija $\gamma(t)$, uvodi se karakteristična Drude-ova frekvencija ω_D i vreme relaksacije τ_D koji su u relaciji $\omega_D = 1/\tau_D$. Tada je

$$\gamma(t) = \gamma\Theta(t) exp(-\omega_D t) \tag{49}$$

pa je

$$\gamma_F(\omega) = \frac{\gamma}{1 - i\omega/\omega_D}, \gamma_L(s) = \frac{\gamma}{1 + s/\omega_D}. \tag{50}$$

Spektralna gustina je onda

$$J(\omega) = \frac{m\gamma\omega}{1 + \omega^2/\omega_D^2}. \tag{51}$$

Postoje razna fenomenološka modelovanja za $J(\omega)$, počev od stepenog $J(\omega) \sim \omega^{\varsigma}$, u nekom intervalu frekvencija $\omega \in (0, \omega_c)$ (ω_c je frekvencija odsecanja-cutoff). Još postoji jedna karakteristična frekvencija - fononoska frekvencija ω_{ph}. Njima odgovaraju temperature $T_c = \hbar\omega_c/k_B$ i $T_{ph} = \hbar\omega_{ph}/k_B$. Temperatura materijala na taj način određuje konkretnu empirijsku zavisnost $J(\omega)$. Međutim, moguće je da se spektralna zavisnost, na primer, razlaže se na nisko i visokofrekventni deo $J(\omega) = J_{lf}(\omega) + J_{hf}(\omega)$, preko neke funkcije odsecajuće funkcije $f(\omega/\omega_c)$: $J_{lf}(\omega) = J(\omega) f(\omega/\omega_c)$ i $J_{hf}(\omega) = J(\omega)(1 - f(\omega/\omega_c))$. Takođe moguće su različite zavisnosti za $\gamma_L(s)$.

5. Klasična Langevin-ova jednačina i konstitutivna relacija za Havrilliak-Negami-jevu jednačinu za dielektričnu permitivnost i funkciju modulusa

Pretpostaviće se da je $V'(y) = ky = m\omega_0^2$. Za dielektrike je poznata relacija za relativnu permitivnost

$$\varepsilon_{rHN}(\omega) = \varepsilon_r(\infty) + \frac{\varepsilon_r(0) - \varepsilon_r(\infty)}{(1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha)^\beta}, \tag{52}$$

uz uslov $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

Zbog

$$\gamma_L(\omega) = (\frac{1}{i\omega}) \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\varepsilon_r(\omega) - 1) + \omega_p^2}{\varepsilon_r(\omega) - 1} \tag{53}$$

je

$$\gamma_{L\varepsilon HN}(\omega) = (\frac{1}{i\omega}) \Big(\omega^2 - \omega_0^2 + \\ + \frac{\omega_p^2((1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha)^\beta}{\varepsilon_r(0) + \varepsilon_r(\infty)((1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha)^\beta - 1) - (1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha)^\beta} \Big). \tag{54}$$

Pod uslovom da je $my(0) = q(\varepsilon_r(\infty) - 1)E_y(0)/\omega_p^2 = 0$ važi

$$\begin{aligned}&m\omega_p^2(1+\tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta y(t) = \\ &q[\varepsilon_r(0) + \varepsilon_r(\infty)((1+\tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta - 1) - (1+\tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta]E_y(t).\end{aligned} \tag{55}$$

Oznaka ${}_0^C D_{dt}^\alpha$ opisuje obični Caputov frakcioni izvod stepena α po vremenu, u odnosu na nulti početni trenutak. Konstanta τ_ε predstavlja vreme relaksacije dipolnog momenta. Kada je $\beta = 1$, pojaviće se i vreme relaksacije jačine električnog polja. Ako se pređe na vektor polarizacije u jednočestičnoj aproksimaciji, onda je

$$\begin{aligned}&(1+\tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta P(t) = \\ &\varepsilon_0[\varepsilon_r(0) + \varepsilon_r(\infty)((1+\tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta - 1) - (1+\tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta]E_y(t).\end{aligned} \tag{56}$$

Prethodna jednačina je konstitutivna relacija za Havrilliak-Negami-jev dielektrik sa indukcionim mehanizmom polarizacije u okviru aproksimacije linearne, homogene, izotropne sredine. Ako se uvede funkcija relativnog modulusa $M_r(\omega) = 1/\varepsilon_r(\omega)$, odgovarajuća Havrilliak-Negami-jeva jednačina je

$$M_{rHN}(\omega) = M_r(\infty) + \frac{M_r(0) - M_r(\infty)}{(1 + (i\omega\tau_M)^\alpha)^\beta} \tag{57}$$

a konstitutivna relacija će biti

$$\begin{aligned}&(1+\tau_M^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta E_y(t) = \\ &\frac{1}{\varepsilon_0}[M_r(0) + M_r(\infty)((1+\tau_M^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta - 1) - (1+\tau_M^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta]P(t).\end{aligned} \tag{58}$$

Analogija u zapisu jednačina je vidljiva. Ovaj dielektrik je inverzan prethodnom.

6. Klasična Langevin-ova jednačina i konstitutivna relacija za Havrilliak-Negami-jevu jednačinu za specifičan otpor i provodljivost

Prvo će se zapisati karakteristične relacije za provodnike u jednočestičnoj aproksimacji. Gustina električne struje definiše se na sledeći način: $j = j(t) = nqv = nq\dot{y}$ $(v = v(t))$, a opšta konstitutivna relacija $j(t) = \int_0^\infty dt' \cdot \sigma(t-t') \cdot E_y(t')$ ($\sigma(t)$ je specifična električna provodljivost). Specijalna Laplaceova transformacija prethodne relacije daje rezultat: $j_L(\omega) = \sigma(\omega)E_{Ly}(\omega)$. Po definiciji je specifičan električni otpor $\varrho(\omega) = 1/\sigma(\omega)$. Iz (39) sledi

$$\sigma(\omega) = \frac{i\omega\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_L(\omega)}. \tag{59}$$

Neka važi Havrilliak-Negami-jeva jednačina za provodljivost

$$\sigma_{HN}(\omega) = \sigma(\infty) + \frac{\sigma(0) - \sigma(\infty)}{(1 + (i\omega\tau_\sigma)^\alpha)^\beta}. \tag{60}$$

Tada je

$$\gamma_L(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{i\omega} + \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 (1 + (i\omega\tau_\sigma)^\alpha)^\beta}{\sigma(0) + \sigma(\infty)((1 + (i\omega\tau_\sigma)^\alpha)^\beta - 1)}. \tag{61}$$

Uz relacije

$$\sigma(0) = \frac{nq^2\tau_\sigma}{m}, \sigma(\infty) = \frac{nq^2\tau'_\sigma}{m} \tag{62}$$

je

$$m(1 + \tau_\sigma^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta v(t) = q(\tau_\sigma + \tau'_\sigma((1 + \tau_\varepsilon^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta - 1))E_y(t). \tag{63}$$

Konstitutivna relacija je

$$(1 + \tau_\sigma^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta j(t) = (\sigma(0) + \sigma(\infty)((1 + \tau_\sigma^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta - 1))E_y(t). \tag{64}$$

Zapravo, $\tau_\sigma = \tau_v$ je karakteristično vreme relaksacije brzine čestice, dok je $\tau'_\sigma = \tau_E$ vreme relaksacije električnog polja u materijalu.

Na kraju, neka postoji i Havrilliak-Negami-jeva jednačina za specifičan električan otpor

$$\varrho_{HN}(\omega) = \varrho(\infty) + \frac{\varrho(0) - \varrho(\infty)}{(1 + (i\omega\tau_\varrho)^\alpha)^\beta}. \tag{65}$$

Sigurno važe relacije $\sigma(0) \cdot \varrho(0) = 1$ i $\sigma(\infty) \cdot \varrho(\infty) = 1$. Zato je $\tau_\varrho = \tau_\sigma$ i $\tau'_\varrho = \tau'_\sigma$. Konstitutivna relacija je

$$(\varrho(0) + \varrho(\infty)((1 + \tau_\varrho^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta - 1))j(t) = (1 + \tau_\varrho^\alpha \cdot {}_0^C D_{dt}^\alpha)^\beta E_y(t). \tag{66}$$

I ovde su vidljive analogije u zapisu jednačina.

7. Generalisani Ohm-ov zakon

U knjizi Uchaikina 2013. formulisan je generalisani Ohm-ov zakon. Na ovom mestu daće se njegovo proširenje. Poznate su relacije za ovaj zakon u globalnoj formi, za električna kola $i = u/R$, $i = C\dot{u}$ i $i = \int_{-\infty}^{t} dt' \cdot u(t')/L$. Na ovom mestu uvodi se generalisani Caputov izvod od odgovarajuće funkcije $\phi(t)$: ${}_{-\infty}^{GC}D_{dt}^\alpha \phi(t) := {}_{-\infty}^{C}D_{dt}^\alpha \phi(t)$ za $\alpha \in [0,1]$ i ${}_{-\infty}^{GC}D_{dt}^{-\alpha} \phi(t) := {}_{-\infty}^{RL}I_t^\alpha \phi(t)$ za $\alpha \in [0,1]$ (oznakom RL opisuje se poznati frakcioni Riemann -Liouville integral). Tada se može definisati sledeća konstitutivna relacija za generalisani Ohm-ov zakon $i(t) = K_\alpha \cdot {}_{-\infty}^{GC}D_{dt}^\alpha u(t)$. U odnosu na Uchaikinovu definiciju, to je proširenje na negativne stepene $\alpha \in [-1, 0]$. Zato je neophodno da se razmotri i Havrilliak-Negami-jeva jednačina za magnetnu permeabilnost i odgovarajuće konstitutivne relacije. Pošto važe relacije $\sigma(\omega) = i\omega\varepsilon(\omega)$ i $(c/v(\omega))^2 = \varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)$, za datu frekvenciju, ako se poznaje fazna brzina $v(\omega)$ i ma koja relacija od $\varepsilon_r(\omega)$, $\mu_r(\omega)$ ili $\sigma(\omega)$, mogu se dobiti ostale dve relacije.

8. Zaključak

Nisu zapisane sve Langevin-ove jednačine. To nije problem, ali nije ni neophodno. Takođe, da se spomene, moguće je razmotriti granične vrednosti parametara α, β, odnosno $0, 1$. Pored toga, moguće je izučiti i procese relaksacije u svim slučajevima. Kada je $\beta = 1$, radi se o Cole ili Cole–Cole ponašanju.