Краткое доказательство гипотезы Коллатца

Султан К.С.

Абстракт: В статье приводиться краткое доказательство гипотезы Коллатца. Доказано, что вычисление функции Коллатца $C(n)$ на основе чисел вида $6m \pm 1,\ m \in \mathbb{N}$ эквивалентно вычислению на основе любых положительных целых чисел. Далее доказано, что если на основе элементов множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и 1 провести обратное вычисление по формуле $((6n \pm 1) \cdot 2^q - 1)/3$, то каждому числу вида $6n \pm 1$ и 1 будут соответствовать бесконечное число целых чисел вида $3t, 6m - 1$ и $6m + 1$. Затем показано, что если построить граф чисел, путем соединения равных чисел $6n \pm 1$ и $6m \pm 1$, являющихся соответственно элементами множества G и числами-предшественниками, то образуется фрактальный граф-дерево. Фрактальный граф-дерево, каждая вершина которого соответствует числам вида $6m \pm 1$, является доказательством гипотезы Коллатца, так как любая его вершина связана с конечной вершиной, связанной с единицей.

Ключевые слова: гипотеза Коллатца, проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, доказательство.
MSC CLASSIFICATION CODE: 11D04

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Коллатца, известная также как проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, является одной из нерешенных проблем математики. Можно отметить следующие работы посвященные проблеме $3n + 1$ [1, 2, 3].

Функция Коллатца $C(n)$ определяется на натуральных числах следующим образом:

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & \text{если} \quad n - \text{четное}, \\ 3n + 1, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}. \end{cases} \tag{1}$$

Для объяснения гипотезы Коллатца, берем любое натуральное число n, если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем $3n + 1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее. Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число n ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

2. СТАРТОВОЕ ЧИСЛО

Теорема 1. Вычисление функции Коллатца $C(n)$ на основе чисел вида $6m \mp 1$ эквивалентно вычислению $C(n)$ на основе любых положительных целых чисел.

Теорема 1 основывается на следующей закономерности:

Если вычисление функции Коллатца проводить по формуле

$$C = (3n \cdot 3 + 1)/2^q, \text{ где } n, q \in N, \qquad (2)$$

до получения целого числа, то в зависимости от типа числа n получится следующие результаты для функции Коллаца $C(n)$:

1) Если n – четное, то $C(n)$ – нечетное или 1;
2) Если n – нечетное число кратное 3, то $C(n)$ – нечетное число имеющий вид $6m \mp 1$или 1;
3) Если n – нечетное число вида $6m \mp 1$, то $C(n)$ – нечетное имеющий вид $6n \mp 1$ или 1.

Доказательство Теоремы 1.

1) Очевидно, что если вычисление функции Коллатца начать с четных чисел, то получится нечетное число или 1.
2) Если вычисление функции Коллатца начать с нечетных чисел кратных 3, то получится число имеющий вид $6m \mp 1$или 1.

   Это объясняется следующим образом. Если нечетные числа вида $3t$ умножить на 3 и прибавить 1, то очевидно, что получиться числа имеющий вид $3s + 1$. При этом если число имеющий вид $3s + 1$ является нечетным, то, безусловно, оно будет числом вида $6m + 1$. А если число вида $3s + 1$ является четным числом, то, при делении на 2 (один или несколько раз) до получения нечетного числа, образуется число вида $6m \mp 1$ или 1, так как число вида $3s + 1$ не делиться на 3.

3) Понятно, что все числа вида $6m+1$ и $6m-1$ являются нечетными числами вида $3t+1$ или $3t-1$, так как не являются числами кратными 3. Если умножить такие числа на 3 и прибавить 1, то естественно получиться четные числа вида $3s+1$. А при делении четных чисел вида $3s+1$ на два (один или несколько раз) до получения нечетного числа, то полученные нечетные числа будут иметь вид $6n \mp 1$ или 1, так как числа вида $3s+1$ не делятся на 3.

Из вышесказанного следует, что Теорема 1 доказано.

2. ОБРАТНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Определение 1. Числа, из которых при вычислении функции Коллатца получится рассматриваемое число, называется числами-предшественниками.

Чисел-предшественников для любого элемента множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числа 1 можно установить путем проведения обратного вычисления. Для этих целей можно использовать следующие формулы

$$r_g = (g \cdot 2^q - 1)/3\,, r_1 = (1 \cdot 2^q - 1)/3\,, \text{ где } g = 6n \mp 1, n\ N. \qquad (3)$$

Из Теоремы 1 следует, что при обратном вычислении функции Коллатца каждому элементу множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числу 1 сопоставляется элементы соответственно множеств

$$R_g = \{v, r | v = 3t;\ r = 6m \mp 1;\ t, m \in N\}, \qquad (4)$$

$$R_1 = \{v_1, r_1 | v_1 = 3t;\ r_1 = 6m \mp 1, t, m \in N\}, \qquad (5)$$

При этом каждое множество R_g, сопоставляемые определенному элементу g множества G и числу 1 являются не пересекающимся. Иными словами, элементы множества R_g сопоставляемые одному элементу g множества G не будет повторяться в других множествах. Это доказывается следующим образом: Пусть два элемента принадлежащие двум множествам R_i и R_j будут равны, тогда получим следующее равенство

$$(g_1 \cdot 2^{q_1} - 1)/3 = (g_2 \cdot 2^{g_2} - 1)/3 \quad \text{или} \quad g_1/g_2 = 2^{g_2}/2^{q_1}.$$

Последнее равенство не имеет решение в целых числах, так как правая часть равенства равна четному числу или 1 (если $q_1 \leq q_2$), а левая часть равенства равна нечетному или нецелому числу, так как g_1 и g_2 являются нечетным числами, причем $g_1 \neq g_2$.

Отметим, что если из множеств R_g и R_1 отделить элементы соответствующие числам вида $6m \mp 1$ и объединить их в одно множество, то получим следующее множество $K = \{k | k = 6m \mp 1, m \in N\}$. Это означает, что множества G и K состоят из одинаковых чисел, т.е. состоят из одних и тех же элементов. При этом возникает следующий вопрос:

Действительно ли все числа-предшественники содержатся во множестве K?

Если один и более элементов множества K не являются числа-предшественниками, то это означает, что графы корневые вершины которых соответствует этим элементам не могут соединятся с общим графом.

Теорема 2. Все элементы множества $K = \{k | k = 6m \mp 1, m \in N\}$ *являются числами-предшественниками элементов множества* $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ *и числа 1.*

Теорема 2 доказываются следующим образом: Пусть один или более элементы множества K не являются числами-предшественниками, тогда при вычислении функции Коллатца на основе этих элементов не должны получиться числа имеющие вид $6n \mp 1$ и число 1, это противоречит Теореме 1. Теорема 2 доказана.

Если вышесказанное представить графический, то получим бесконечно много графов соответствующему каждому элементу множества G и числу 1, каждый из которых похож на букет шаров, привязанной на один шар. Схема графов числа 1 и числа вида $6n \mp 1$ с шестью числами показаны на рисунке 1.

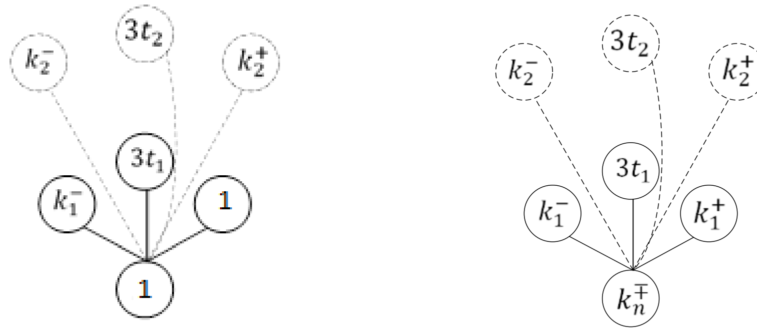

Рисунок 1. Граф соответствующее одному элементу множества G

Примечание: $k^- = 6m - 1, k^+ = 6m + 1,\ k^{\mp} = 6n \mp 1.$

На самом деле каждому элементу множества G и числу 1 сопоставляется бесконечно много чисел вида $3t$ и $6m \mp 1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ

Поскольку каждое число вида $6m \mp 1$, соответствующее верхним вершинам каждого графа элементов множества G и числа 1, равно определенному элементу множества G, то все графы можно объединить в один общий граф путем соединения равных чисел. Объединение графов производиться следующим образом:

Сначала определяются числа вида $6m \mp 1$ соответствующие верхним вершинам графа числа 1, затем выбираются графы элементов множества G, корневые вершины которых равны верхним вершинам графа 1. После этого на верхние вершины графа числа 1 устанавливаются выбранные графы элементов множества G, путем соединения равных чисел, соответствующих верхним вершинам графа 1 и корневым вершинами графов выбранных элементов множества G. Далее на верхние вершины графов, установленных на графе числа 1, устанавливаются другие графы других элементов множества G, путем подбора равных чисел. Далее, повторяя такую процедуру получим один объемный бесконечно растущий фрактальный граф-дерево, каждая вершина которого будет иметь связь с числом 1.

На рисунке 2 показан пример объединения двух плоских графов, соответствующих элементам 5 и 13 множества G.

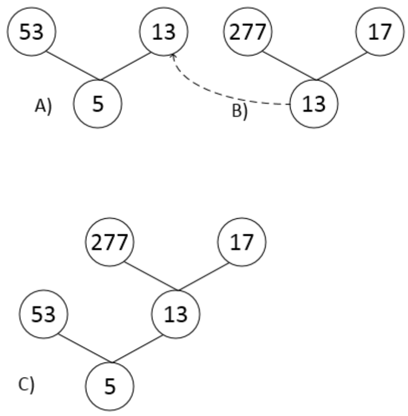

Рисунок 2. Пример объединения двух графов

Отметим, что числа кратные 3 не участвуют в формировании общего графа, хотя каждый граф, включая граф числа 1, содержит таких чисел. Тем не менее для полноты картины их тоже можно показать на общем графе. Общий граф-дерево включающие чисел кратных 3 будет иметь вид, как это показано на рисунке 3.

Из графа-дерева, показанного на рисунке 3, следует, что каждая вершина имеет свое число кратное 3. Вместе с тем, числа кратные 3, как показано на рисунке 3, не оказывают влияния на формирования структуры графа. Если начать вычисление с чисел кратных 3, то путь стыкуются с вершиной, соответствующей числу вида $6n \mp 1$, а далее путь будет продолжена по структуре графа. Данная структура соответствует утверждению о том, что при вычислении функции Коллатца на основе чисел кратных 3 получиться числа вида $6n \mp 1$.

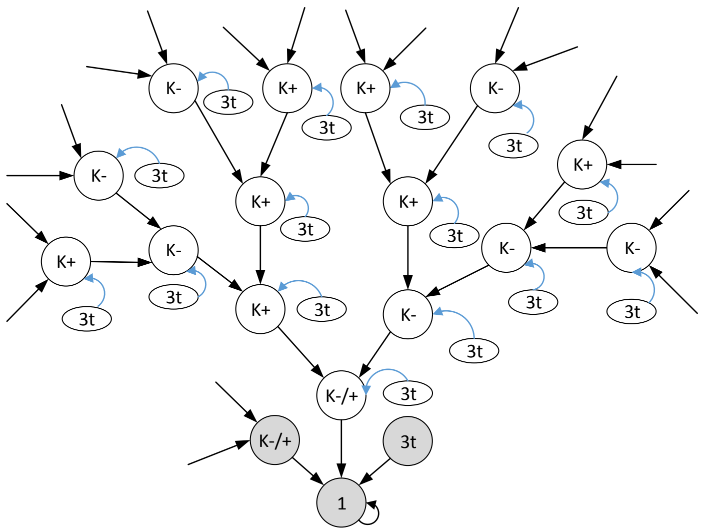

Рисунок 3. Ориентированный граф-дерево, включающий чисел кратных 3

На рисунке 3 две нижние закрашенные вершины со знаками $K -/+$ и $3t$, которые связаны с вершиной 1, символизируют, что чисел вида $6n \mp 1$ и чисел кратных 3, которые при вычислении функции Коллатца будут равны степени двойки, бесконечно много. При этом такие числа вида $6n \mp 1$ формируют свои ветви в графе-дереве.

Стрелка, исходящая из вершины 1 и направленная туда же (петля) показывает, что если вычисление функции Коллатца начать с числа 1, то получиться 1.

Если на общем графе-дереве показать и четные числа $(2t)$, то получим граф показанный на рисунке 4.

Отметим, что графы, показанные на рисунках 3 и 4 построены на основе первых трех чисел-предшественников элементов множества G и числа 1, поэтому они являются плоскими. Фактически общий граф-дерево являются трехмерным, так как каждому элементу множества G и числа 1 соответствуют бесконечно много чисел-предшественников.

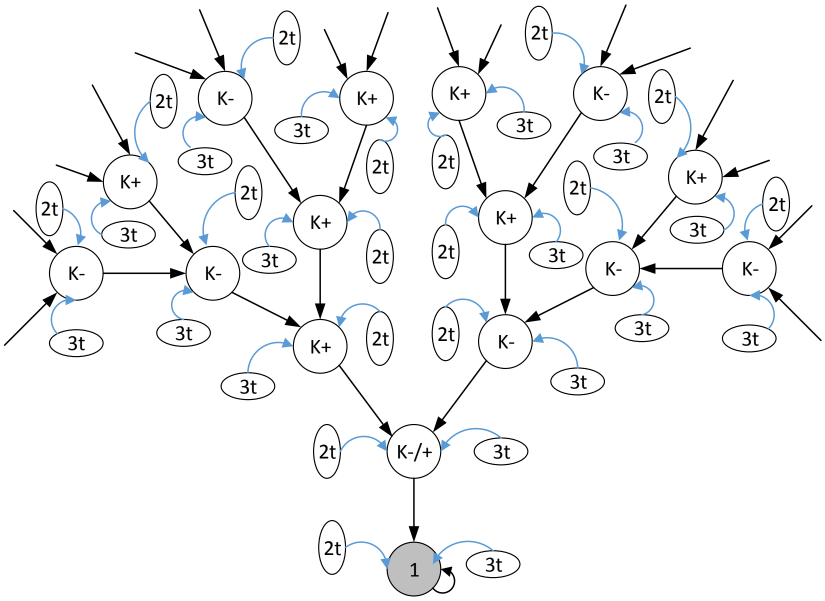

Рисунок 4. Фрактальный граф-дерево с четными и нечетными числами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, доказано, что если все элементы множества $G = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числа 1, и соответствующих им чисел-предшественников объединить в виде графа, то образуются общий фрактальный граф-дерево, каждая вершина которого связана с конечной вершиной, связанной с единицей. Отсюда следует, что гипотеза Коллатца верна, и она доказана.

Ссылки

[1] L. Collatz, On the motivation and origin of the (3n + 1) – Problem, J. Qufu Normal University, Natural Science Edition, 12(3) (1986) 9–11.

[2] J. C. Lagarias, The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem, American Mathematical Society, 2010.

[3] Terens Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values. arXiv:1909.03562 [math.PR]