

양자역학에 의한 자속 양자화 증명

Proof of magnetic flux quantization by quantum mechanics

강 대 현

Daehyeon Kang

전라북도 진안군 진안읍 군상리 768

전자우편 : samplemoon@korea.kr

초록

양자역학에 의한 자기선속 양자화 증명

현재, 파동함수의 위상인자가 단일성을 갖는다는 추정에 의해 자기선속의 양자값을 계산하고 있는데 이는 양자론적 논리가 결여되어 보인다.

그리하여 이 논문에서 이 문제에 양자역학 논리를 엄격하게 적용해서 자속양자 단위값을 도출하였는데 그 결과는 $(hc/2e)$ 이다.

패러데이의 전자기유도법칙과 고전양자론으로부터 얻어진 것과 정확히 일치한다.

abstract

Proof of magnetic flux quantization by quantum mechanics

At present, By the requirement that the phase factor of the wave function has unity, Quantum values of magnetic flux are calculated, which seems to lack quantum logic.

Thus, in this paper, we apply the quantum mechanics logic strictly to this problem, The unit value is derived and the result is $(hc/2e)$.

It is exactly the same as that obtained by Faraday's law of electromagnetic induction and classical quantum theory.

1. 머리말

필자는 앞서 페러데이의 전자기유도법칙이나 카노니컬 운동량 방정식에 고전양자론을 이용하여 초전도체의 고리구멍을 통과하는 자속양자 단위값이 $(hc/2e)$ 인 것은 전자 2개가 짝을 지어 운동하는 것이 아니라 전자 1개의 운동에 의한 것임을 보여주었다.[1]

그러나 이는 어디까지나 고전양자론과 고전역학에서 얻어진 결과이지 양자역학적 논리를 이용해서 얻어진 것은 아니다.

현재 양자역학에서 자속양자값은 다음과 같이 유추하고 있다.

$$\frac{(p + \frac{e}{c}A)^2}{2m}\psi + V\psi = E\psi \quad \frac{p^2}{2m}\psi_0 + V\psi_0 = E\psi_0 \quad (1)$$

(1)식의 2개의 방정식에서 다음 식을 이끌어낼 수 있다.[2]

$$\psi = \psi_0 \exp\left(-\frac{ie \int A \cdot ds}{\hbar c}\right) \quad (2)$$

(2)식에서 위상인자 $\exp(-\frac{ie\Phi}{\hbar c})$ 가 닫힌 경로 안에 자기장이 0인 경우 $1=\exp(-\frac{ie0}{\hbar c})$ 을 갖게 되는데 자속이 유한한 값을 가지는 경우에도 위상인자가 1이 되어야한다는 필요성을(single valued) 파동함수를 놓고 주장하는 것이다.[3]

이렇게 하면 자속양자 단위값은 (hc/e) 로 나온다는 것이다.

그런데 이것은 어디까지나 추측이나 주장이고 양자역학 논리가 빈약해보인다. 물리학은 엄격한 수학적 논리로 발전해왔다.

2. 본 문

양자역학에서 자기선속을 찾아보면 벡터포텐셜 A가 포함된 슈뢰딩거방정식이 있다. 먼저 벡터포텐셜A와 관련된 양자상태를 시간독립 슈뢰딩거방정식으로 표시를 한다.

$$\frac{(p + \frac{e}{c}A)^2}{2m} \psi + V\psi = E\psi \quad (3)$$

(A는 벡터포텐셜, V는 포텐셜, E는 전자의에너지준위, m 전자질량, e 전하량)

그러면 (3)식과 (3)식의 A=0을 놓아 2개의 슈뢰딩거방정식을 만든다.

$$\frac{(p + \frac{e}{c}A)^2}{2m} \psi + V\psi = E\psi \quad \frac{p^2}{2m} \psi_0 + V\psi_0 = E\psi_0 \quad (4)$$

(4)식의 2개의 방정식에서 다음 식을 이끌어낼 수 있다.[2]

$$\psi = \psi_0 \exp\left(-\frac{ie \int A \cdot ds}{\hbar c}\right) \quad (5)$$

(5)식에 복소수 켈레를 만들어 보면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\psi^* = \psi_0^* \exp\left(+\frac{ie \int A \cdot ds}{\hbar c}\right) \quad (6)$$

(5),(6)식에서 $\int A \cdot ds = \Phi$ 로 하고 두 식을 곱하여 쓴다.

$$\psi^* \psi = \psi_o^* \psi_o \exp(-\frac{ie\Phi}{\hbar c}) \exp(+\frac{ie\Phi}{\hbar c}) \quad (7)$$

(7)식에서 자속항 Φ 가 사라져 자속양자화에 관한 어떤 내용도 얻을 수 없다.

이러한 결과는 많은 이들이 시도해보았을 것이고 양자역학에선 방법이 없다고 단정짓기에 충분한 내용이며 그래서 파동함수에서 위상인자의 단일성(single valued, unity)이란 말을 사용하여 나름대로 자기선속 양자화를 설명하려 하지않았나싶다.

그러나, 페러데이 전자기 유도법칙에서 고전양자론이 해낸 증명을 양자역학이 못 한다기 보다는 분명히 존재하는데 아직 찾아내지 못했다고 보는 게 온당하다.

이제 어떤 문제인지를 알았으므로 (7)식과 같은 상황을 피해야 한다.

1개의 양자상태를 표시하는 파동함수 ψ 는 짝인 켈레복소수 파동함수 ψ^* 가 존재하는데.

양자역학은 또 다른 파동함수 $\Psi = \psi + \psi^*$ 와 $\Psi_o = \psi_o + \psi_o^*$ 를 만들 수 있게 허용한다.

그리고 막스보른이 처음 제안한 규칙따라 Ψ 와 Ψ_o 는 규격화 과정을 거쳐서 만들어진 파동함수라고 하고 다시 표시하면 이러하다.

$$\frac{(p + \frac{e}{c}A)^2}{2m} \Psi + V\Psi = E\Psi \quad \frac{p^2}{2m} \Psi_o + V\Psi_o = E\Psi_o \quad (8)$$

물론 이 파동함수는 $\Psi = \Psi^*$, $\Psi_o = \Psi_o^*$ 라는 특징을 갖게 되며 (4)식에서 (5)식을 얻은 것과 같은 방식으로 아래 방정식을 얻는다.

$$\Psi = \Psi_o \exp(-\frac{ie \int A \cdot ds}{\hbar c}) \quad (9)$$

위의 (9)식을 양변을 제곱해본다.

$$\Psi\Psi = \Psi_o\Psi_o \exp(-\frac{2ie \int A \cdot ds}{\hbar c}) \quad (10)$$

여기서 (9)식에서 (10)식으로 넘어갈 때 절대로 $\Psi\Psi^*$ 이런 식으로 하지않는 것이 아주 중요하다. 그럴 경우 (7)식과 같은 무의미한 경우가 된다. Ψ 와 Ψ_o 는 각각의 양자상태를 뜻하는 파동함수로 위상인자와 독립되어 있는 것으로 생각하고 처리하는 것이다. 위상인자는 어디까지나 각각의 양자상태를 표시하는 파동함수에 의해 2차적으로 결정된다고 보는 것이다. 그러니까 (9)식을 그대로 가져다가 제곱을 하는 것이다. 사실은 이렇게 사용하기 위해 동일한 양자상태를 표시하는 또 다른 파동함수를 만든 것이다.

(10)식의 양변을 모든 공간에 걸쳐 적분한다.

$$\int \Psi \Psi \, dx^3 = \int \Psi_0 \Psi_0 \, dx^3 \exp\left(-\frac{2ie\Phi}{\hbar c}\right) \quad (11)$$

초전도 고리의 어느 경로를 취하든 감싸는 자속의 양이 같으므로 벡터A에 대한 선적분은 파동함수 곱의 모든공간에 걸친 적분에 대해 상수가 되므로 전개하면 이렇하다.

$$1 = \exp\left(-\frac{2ie\Phi}{\hbar c}\right) \quad (12)$$

$$\therefore \Phi = \frac{n\hbar c}{2e} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (13)$$

이제 완벽하게 양자역학 논리로 자속양자 값이 $(\hbar c/2e)$ 의 정수값임을 보여주었다.

3. 마치는 말

필자가 자속양자화에 관심을 가진 시기는 1990년 경으로 기억하고 있다.

당시에 보았던 자속양자화 증명이 이상하다고 생각했다. 그래서 이때부터 제대로 된 증명을 해보고자 시작했으나.

카노니컬운동량($p = mv + (e/c)A$)공식이나 페러데이법칙(전기장 $E = -\frac{d\Phi}{dt}$)에서 자속 양자화가 유도된다는 것을 안 것은 많은 시간이 흐른 뒤였다. 어쨌거나 시간이 오래 걸렸지만 마침내 마침표를 찍게 되었다.

인생은 짧고 물리는 너무 길다고 해야하나 그런생각이 든다. 자연현상에 대해 알아야 하는 내용이 너무 많았고 왜 이걸 내가 하고 있지? 하는 의문이 들때도 아주 많았다. 누군가 물리학에 관심을 가지려한다면 정말 말리고 싶다.

이건 아무리해도 쌀이 나오는 것도 아니고 돈이 생기는 것도 아니니 말이다.

대신 돈 별로 안들고 심심하지는 않았다는 점이 위안이기는 했다.

참고문헌

[1] [viXra:1305.0172](https://arxiv.org/abs/1305.0172)

[2] Stephen Gasiorowicz, *Quantum Physics* (Wiley, Minnesota, 1974), p.218-219

[3] Stephen Gasiorowicz, *Quantum Physics* (Wiley, Minnesota, 1974) p.220