Безусловный довод против канторовой гипотезы

Ватолин Дм.

Для аксиом, влекущих отрицание канторовой гипотезы, в качестве предела по ультрафильтру находится линия, требуемая в одной из аксиом

§1. Основные определения

Пусть $\mathfrak{int}(S)$ означает внутренность, $\mathfrak{cl}(S)$ – замыкание, $\mathfrak{d}S$ – границу множества S. $T \setminus S$ обозначает дополнение множества S в множество T. $\mathfrak{d}S = \mathfrak{cl}(S) \setminus \mathfrak{int}(S)$. На линии $\mathfrak{int}(S)$ – объединение всех открытых интервалов $\subset S$, на плоскости – открытых кругов $\subset S$. $\mathfrak{card}(S)$ означает мощность множества S. $\mathfrak{f}\{S\}$ означает образ множества S при отображении $\mathfrak{f}$.

Пусть транзитивное отношение $\prec$ задаёт частичный порядок на множестве S так, что $p \prec q$ влечёт $p \neq q$. Тогда, S назовём «счётно разделимым по отношению $\prec$», если верно:

Каковы бы ни были не пустые и не более чем счётные множества $M \subset S$ и $L \subset S$ такие, что для каждого $p \in M$ и каждого $q \in L$ верно $p \prec q$, найдётся элемент r такой, что $\forall p' \in M\ \forall q' \in L$ верно $p' \prec r \prec q'$.

Множество S назовём «счётно безграничным по отношению $\prec$», если:

Каково бы ни было $M \subset S$, $M \neq \emptyset$, $\mathfrak{card}\, M \leq \aleph_0$, найдутся $p \in S$ и $q \in S$ такие, что $\forall m \in M$ верно $p \prec m \prec q$.

Если вместо «не более чем счётности» множеств M и L потребовать их конечности, то получим определения «конечной разделимости» и «конечной безграничности» для S. Множество рациональных чисел, к примеру, конечно разделимо и безгранично.

Если ν и η – ординалы, то $\nu < \eta$ равносильно $\nu \in \eta$. Множество всех не более чем счётных ординалов отождествим с ординалом ω_1. Множество всех конечных ординалов, т.е. всех натуральных чисел, отождествим с ординалом $\omega = \omega_0$. В последовательности «длины η» (или «типа η») её элементы пусть «нумеруются» всеми ординалами $< \eta$, и только такими ординалами. Пусть элементы f_ν с «номерами» $\nu \in \eta$ для последовательности выбираются в множестве, где действует транзитивное отношение $\prec$. Тогда, последовательность «строго убывает» («строго возрастает»), если $\nu < \mu$ влечёт $f_\nu \succ f_\mu$ ($f_\nu \prec f_\mu$).

Пусть $\mathfrak{T}_1$ – множество всех последовательностей длины ω_1, значения которых нули и единицы. Элементы $\in \mathfrak{T}_1$ упорядочим лексикографически. Последовательность $\in \mathfrak{T}_1$, состоящую только из единиц, обозначим 1, она есть максимальный элемент в $\mathfrak{T}_1$. Минимальный элемент $0 \in \mathfrak{T}_1$ – последовательность нулей. Элементы $\in \mathfrak{T}_1$ называем «точками», они же – бесконечные «записи», отождествляемые с точками.

Элементы $X \in \mathfrak{T}_1$ и $Y \in \mathfrak{T}_1$ отождествим, определим эквивалентными, как разные «записи» одной точки, и пишем $X = Y$, если – по лексикографическому сравнению – между X и Y не найдётся никакого другого элемента $\in \mathfrak{T}_1$. Если тогда же, в лексикографическом сравнении X меньше Y, то X назовём «меньшей записью», Y – «большей» – для точки, которую обозначают данные записи. К примеру, всё это верно, когда $X(0) = 0$, для всех ординалов $\nu > 0$ верно $X(\nu) = 1$, и $Y(0) = 1$, и для всех $\nu \in \omega_1$, $\nu > 0$ верно $Y(\nu) = 0$.

Открытым (замкнутым, полуоткрытым справа, слева) интервалом $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{T}_1$ с концами в точках $A \in \mathfrak{T}_1$ и $B \in \mathfrak{T}_1$ назовём множество всех точек $X \in \mathfrak{T}_1$, для которых $A < X < B$ ($A \leqslant X \leqslant B$, $A \leqslant X < B$, $A < X \leqslant B$).

Множество $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}_1$ «всюду плотно в $\mathfrak{T}_1$», если на каждом открытом интервале $\subset \mathfrak{T}_1$ найдутся точки множества $\mathfrak{S}$. Множество $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}_1$ «нигде не плотно в $\mathfrak{T}_1$», если на любом интервале $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}_1$ найдётся интервал $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$, не содержащий точек $\in \mathfrak{S}$.

Канторовой континуум-гипотезе эквивалентна

Гипотеза I. Существует множество S, каждый элемент которого $\subset \omega_1$, и S счётно разделимо и счётно безгранично по отношению $\subset$.

Гипотеза II. Найдётся всюду плотное в $\mathfrak{T}_1$ множество мощности $\aleph_1$.

Гипотезы I и II слишком логичны, и кажется, должны быть истинными в каком-то «естественном мире множеств». Но также естественно выглядят предположения, приводимые далее.

§2. Аксиомы, из которых извлекается отрицание континуум-гипотезы

Пусть сектор D – пересечение открытого единичного евклидового круга с прямым углом, содержащим свою вершину O в центре круга, и $\mathrm{int}(D) = D$. И пусть, дуга окружности $C \subset \mathfrak{d}D$ содержит свои концы X и Y на сторонах такого прямого угла.

Обозначим через C_r дугу $\subset D$, концы которой X_r и Y_r не принадлежат C_r, находятся на отрезках OX и OY соответственно, а сама дуга C_r включена в окружность радиуса $r = \mathrm{const} < 1$, описанную из центра O. На каждой дуге C_r и на дуге C введём линейный порядок: если точки P и Q обе находятся на дуге C_r, или обе находятся на дуге C, то говорим, что «P левее Q» («Q правее P»), и обозначаем $P < Q$, если угол XOQ < угол XOP. Сектор D есть объединение всех таких дуг C_r ненулевой длины, для которых $r < 1$.

С линией $\in \boldsymbol{\mathfrak{H}}$ отождествим каждое точечное множество $k \subset \mathrm{int}\, D$, для которого:

- $\mathrm{k} = \mathfrak{f}\{\mathfrak{T}\}$, где $\mathfrak{T}$ – множество всех действительных чисел, меньших единицы и больших нуля, $\mathfrak{f}$ – непрерывное отображение, переводящее разные числа действительной прямой в разные точки плоскости

- когда $\mathrm{t} \in \mathfrak{T}$ устремелено к 0, точка $\mathfrak{f}(\mathrm{t})$ устремлена к точке O, когда t устремлено к единице, точка $\mathfrak{f}(\mathrm{t})$ неограниченно приближается к дуге C

- для каждого положительного $\mathrm{r} < 1$ множество $\mathrm{k} \cap \mathrm{C_r}$ состоит из одной дуги, возможно сводящейся к одной точке.

Точка Q находится «правее» («левее») линии $\mathrm{p} \in \mathfrak{H}$, если Q находится на некоторой дуге $\mathrm{C_r}$ и каждая точка множества $\mathrm{p} \cap \mathrm{C_r}$ лежит левее (правее) точки Q на этой дуге.

Тогда, для q и $\mathrm{p} \in \mathfrak{H}$, пишем $\mathrm{q} \ll \mathrm{p}$, если для всех достаточно больших $\mathrm{r} < 1$ каждая точка $\mathrm{q} \cap \mathrm{C_r}$ находится левее p, или каждая точка $\mathrm{p} \cap \mathrm{C_r}$ правее q. Тогда, говорим, что «q завершается левее p», или «p завершается правее q». И так же для q и $\mathrm{p} \in \mathfrak{H}$ пишем $\mathrm{q} \asymp \mathrm{p}$, т.е. q и p «эквивалентны», когда для всех достаточно больших $\mathrm{r} < 1$ множества $\mathrm{q} \cap \mathrm{C_r}$ и $\mathrm{p} \cap \mathrm{C_r}$ совпадают. Если верно, что $\mathrm{q} \asymp \mathrm{p} \vee \mathrm{q} \ll \mathrm{p} \vee \mathrm{p} \ll \mathrm{q}$, то q и p назовём «сравнимыми».

Следующие две теоремы суть теоремы канонической теории множеств, не зависящие от принятия или отрицания континуум-гипотезы:

Теорема I. Множество $\mathfrak{H}$ счётно разделимо и счётно безгранично по отношению $\ll$.

Теорема II. Существует счётно разделимое и счётно безграничное по отношению $\ll$ множество $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$ такое, что каждые два элемента $\in \mathfrak{G}$ сравнимы, мощность множества $\mathfrak{G}$ равна $2^{\aleph_0}$, длина монотонных последовательностей, элементы которых взяты в $\mathfrak{G}$, не превышает ω_1.

Используя счётную разделимость множества $\mathfrak{H}$, можно строить трансфинитные, длины ω_1, строго возрастающие и строго убывающие последовательности линий $\in \mathfrak{H}$. Отсюда в качестве гипотезы находится.

Аксиома I. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – произвольные непустые подмножества $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{card}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = \aleph_1$, и каждые два элемента из множества $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ сравнимы. Пусть так же каждая линия множества $\mathfrak{A}$ завершается на дуге C левее каждой линии множества $\mathfrak{B}$. Тогда, существует линия $\mathrm{h} \in \mathfrak{H}$, которая завершается на C правее каждой линии множества $\mathfrak{A}$ и левее каждой линии множества $\mathfrak{B}$.

Для нарушения континуум-гипотезы уже достаточно того, что длина трансфинитных последовательностей линий $\in \mathbf{H}$ не больше ω_1. Действительно, мощность множества $\mathbf{H}$ равна $2^{\aleph_0}$, т. к. $\mathbf{H}$ задано непрерывными функциями, которых всего $2^{\aleph_0}$. С другой стороны, количество сечений в множестве $\mathbf{H}$ не меньше чем $2^{\aleph_1}$. Каждому сечению по аксиоме I соответствует некоторая линия $h \in \mathbf{H}$. Поэтому, мощность множества $\mathbf{H}$ равна $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$. Более детальные доказательства в отношении множества, похожего на множество $\mathbf{H}$, данного здесь, по этому поводу даны в [1].

Аксиома II. Для произвольного $\mathbf{A} \subset \mathbf{H}$ такого, что $\mathfrak{card}\,\mathbf{A} = \aleph_1$, и когда все элементы из $\mathbf{A}$ сравнимы между собой, найдётся линия $h \in \mathbf{H}$, которая завершается на дуге C правее каждой линии множества $\mathbf{A}$.

Из аксиомы II отрицание континуум-гипотезы извлекаемо более явно. Второй аксиоме эквивалентны следующие три теоремы:

Теорема III. Для произвольных множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, когда $\mathbf{A} \subset \mathbf{H}$, $\mathfrak{card}\,\mathbf{A} = \aleph_1$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{H}$, $\mathfrak{card}\,\mathbf{B} = \aleph_0$, таких, что каждая линия $\in \mathbf{A}$ завершается на дуге C левее каждой линии $\in \mathbf{B}$, найдётся линия $h \in \mathbf{H}$, для которой $q \ll h \ll p$ при любых $q \in \mathbf{A}$ и $p \in \mathbf{B}$.

Теорема IV. Пусть произвольное $\mathbf{A} \subset \mathbf{H}$ таково, что $\mathfrak{card}\,\mathbf{A} = \aleph_1$, и существует $q \in \mathbf{H}$ так, что для каждой $p \in \mathbf{A}$ верно $p \ll q$. Тогда, существует линия $h \in \mathbf{H}$, для которой, каков бы ни был $p \in \mathbf{A}$, верно $p \ll h \ll q$.

Теорема V. Пусть S и $S(n, m)$ суть вполне упорядоченные множества, $n, m \in \omega, \forall n\, S(n, m + 1) \supseteq S(n, m)$, $S = \bigcup_{m \in \omega} S(n, m)$, $\mathfrak{card}\, S = \mathfrak{card}\, S(n, m) = \aleph_1$. Тогда, существует возрастающая функция f такая, что для каждой $P \in S$, при всех достаточно больших $n \in \omega$ (зависящих от P), $S(n, f(n)) \ni P$.

Весьма просто аксиомы расширяемы так, что в них увеличивается длина трансфинитных последовательностей. Из расширения аксиомы I выводимы теоремы:

Теорема VI. Каков бы ни был ординал α, $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_0} > \aleph_\alpha$.

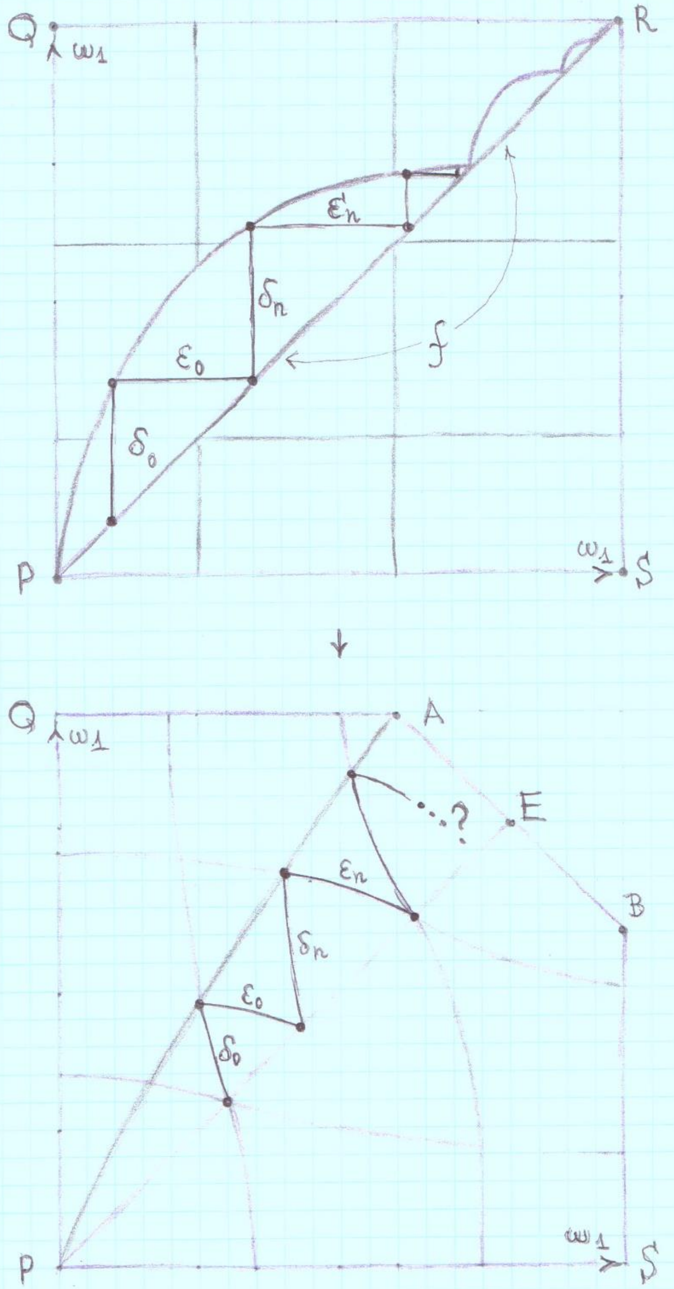
Теорема VII. Мощность множества действительных чисел больше мощности любого вполне упорядоченного множества.

§3. Предположение, дающее дополнительный повод к проверке аксиом

Декартово произведение $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1$ (см. рис. 1) изобразим «квадратом» с вершинами P, Q, R, S, и пусть QR – «верхняя» сторона этого квадрата. Строго возрастающие непрерывные отображения $\mathfrak{T}_1$ на $\mathfrak{T}_1$, т.е. функции, изобразим линиями, соединяющими вершины P и R. Пусть f и g – такие функции, причём, для всех $V \in \mathfrak{T}_1$ верно $f(V) \leqslant g(V)$. Докажем, что каковы бы ни были f и g, для несчётного множества точек $\in \mathfrak{T}_1$ значения функций f и g совпадают.

Действительно, для $X_1 \in \mathfrak{T}_1$, $X_1 \neq 1$, проводим «вертикальный» отрезок δ_1 между точками $P_1 = (X_1, f(X_1))$ и $Q_1 = (X_1, g(X_1))$. Из $Q_1 = (X_1, g(X_1))$ в точку $P_2 = (X_2, f(X_2))$ такую, что $g(X_1) = f(X_2)$ и $X_1 < X_2 \in \mathfrak{T}_1$, проводим «горизонтальный» отрезок ε_1. Из $P_2 = (X_2, f(X_2))$ в точку $Q_2 = (X_2, g(X_2))$ проводим «вертикальный» отрезок δ_2, и т.д. Т.е. «вертикальным» отрезком δ_n соединяем точки $P_n = (X_n, f(X_n))$ и $Q_n = (X_n, g(X_n))$, и проводим «горизонтальный» отрезок ε_n из точки $Q_n = (X_n, g(X_n))$ в точку $P_{n+1} = (X_{n+1}, f(X_{n+1}))$, где $g(X_n) = f(X_{n+1})$, $X_n < X_{n+1} \in \mathfrak{T}_1$. Если невозможно указать бесконечное множество различных точек P_n и Q_n, построенных из хотя бы одной точки P_1, то утверждаемое тривиально. Если же все указанные точки различны, то точка (X, Y), где $X = \lim_n X_n$, $Y = \lim_n f(X_n) = \lim_n g(X_n)$, будет такой, где функции совпадают, т.е. $f(X) = g(X) = Y$. Для любого не более чем счётного $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}_1$, не содержащего последовательность, обозначенную 1, всегда найдётся $Z \in \mathfrak{T}_1$, $Z \neq 1$, больший любого элемента $\in \mathfrak{U}$ (Множество, оставшееся от $\mathfrak{T}_1$ после исключения максимального и минимального элементов $\in \mathfrak{T}_1$, счётно безгранично). Вместо X_n можно построить подобные точки $X'_n > X$ несчётное число раз. Отсюда, точки совпадения функций образуют множество по мощности не меньшее, чем $\aleph_1$.

Преобразуем квадрат PQRS непрерывной метаморфозой в пятиугольник PQABS так, что все точки замыкания квадрата останутся точками пятиугольника, кроме точки R, которая превратится в отрезок AB. Пусть f – это диагональ квадрата. После преобразования квадрата в пятиугольник линия f пусть заканчивается в точке E на отрезке AB, и E отлична от концов этого отрезка. Тогда, проведём линию h так, чтобы h заканчивалась в точке A и нигде не пересекалась бы с линией f, кроме точки P. Без ограничений общности, можно считать, что h соответствует строго возрастающей непрерывной функции в квадрате PQRS. В последнем, геометрическая интуиция вступает в конфликт с логикой. Т.е. «по интуиции» линия h обязана существовать «без прилипания к f», но «по логике» – нет, поскольку тогда, h обязана «прилипнуть к f». Т.е. в канонической теории «линии h не существует». Отбросив «запрет», пробуем строить последовательность отрезков δ_n, уже для f и «интуитивной» h. Тогда каждый конечный, n-ый шаг последовательности выполним, но все вместе эти шаги не выполнимы – находим противоречие, если предположить завершение счётного множества отрезков. Т.е. если найдётся гипотетическая h, то каждое конечное множество отрезков δ_n имеет место быть, но счётное – нет.



Q
ω_1
R
ε_n
δ_n
ε_0
f
δ_0
P
ω_1
S
Q
ω_1
A
...?
E
ε_n
B
δ_n
ε_0
δ_0
P
ω_1
S

рис. 1

В «мире множеств», где нарушена «счётная аксиома выбора», видна подобная «незавершаемая бесконечность». Действительно, для счётного множества множеств всегда можно сделать конечное число выборов и продолжить выбор. Но таким способом невозможно всегда собрать счётную последовательность шагов-выборов, так как такая составит полную функцию выбора. Назовём, поэтому, последовательность «незавершаемой», если:

а) указуема её конечная начальная часть;

б) если указано M начальных элементов последовательности, то всегда можно указать её $M+1$-ый элемент;

в) не существует бесконечного множества «всех элементов последовательности», т.е. предположение о последнем ведёт к противоречию.

Такого рода последовательности не существуют в канонической теории множеств. Но могут ли «рядом с каноническими множествами» находится предметы, которые суть «не-множества» по отношению к первым, но эти же предметы «множества» в другом естественном предметном пространстве? Для линии аксиомы I, не окажется ли «незавершаемой» каждая точечная последовательность, устремлённая по линии к дуге C? Не будет ли эта линия всего лишь «кажимостью, исключённой строгой логикой»?

Нет сомнения, что все рассмотренные линии «существуют в каком-то глубоком смысле». Найденный же «парадокс», видимо, имеет место только в некоторой «логике множеств». Замечу, «гипотеза о незавершаемой бесконечности» не используется в дальнейших доказательствах.

§4. Ключевая лемма

Пусть $\eta \in \omega_1$, и для каждого $\mu \in \eta$:

- линии b_μ и q_μ взяты в множестве $\mathbf{H}$ так, что если $\nu \in \mu$, то $b_\nu \ll b_\mu \ll q_\mu \ll q_\nu$

- множества T_μ и действительные положительные числа $\tau_\mu < 1$ таковы, что T_μ есть множество всех таких линий $p \in \mathbf{H}$, для которых для всех $r < 1$, $r \geqslant \tau_\mu$ верно, что каждая точка множества $p \cap C_r$ находится левее q_μ и правее b_μ

- для произвольного конечного множества M, элементы которого суть ординалы $\in \eta$, $\bigcap_{\mu \in M} T_\mu \neq \emptyset$.

Произведём «пересчёт» всех ординалов $\in \eta$ натуральными числами, в таком пересчёте обозначив n-ый ординал как $\mu(n)$. Тогда, для каждого $N \in \omega$ пусть $S_N = \bigcap_{n \leqslant N} T_{\mu(n)}$, $\sigma_N = \max_{n \leqslant N} \tau_{\mu(n)}$. И тогда $S_N \supseteq S_{N+1}$.

Лемма I. Пусть, когда $n \in \omega$, линии u_n и v_n из множества $\mathbf{H}$ таковы, что $b_\mu \ll u_n \ll u_{n+1} \ll v_{n+1} \ll v_n \ll q_\mu$ – каков бы ни был $\mu \in \eta$. Тогда, для каждого $n \in \omega$ найдётся множество $R_n \subset \mathbf{H}$ и положительное действительное число $r_n < 1$ такие, что $R_{n+1} \subseteq R_n \subseteq S_n$, и для всякого $m \leqslant n$ и $m \in \omega$, для каждого действительного числа $r < 1$ такого, что $r > r_n$, верно, что для каждой $p \in R_n$ каждая точка множества $p \cap C_r$ находится левее линий $q_{\mu(m)}$ и v_m и правее линий $b_{\mu(m)}$ и u_m.

Доказательство. Рассмотрим случаи: а) когда $\sigma_n < \sigma_{n+1}$ и $\lim_{n\in\omega}\sigma_n = 1$ и б) когда $\sigma_n < \sigma_{n+1}$ и $\lim_{n\in\omega}\sigma_n = \sigma < 1$. Остальные случаи сведём к этим. Для первого случая определим $0 = f(0)$. Пусть для $N \in \omega$ определёно $f(N) \in \omega$. Тогда, всегда найдётся множество $W_N \subseteq S_{f(N)}$, для которого найдётся $r_N > \max\{r_{N-1}, \sigma_{f(N)}\}$ так, что для произвольных $m \leqslant f(N)$ и $j \leqslant N$, $m \in \omega$ и $j \in \omega$, для каждого действительного числа $r < 1$ такого, что $r > r_N$, верно, что для каждой $p \in W_N$ каждая точка множества $p \cap C_r$ находится левее линий $q_{\mu(m)}$ и v_j, и правее $b_{\mu(m)}$ и u_j. Определим $f(N+1) = \min_{n\in\omega}\{n, \sigma_n > r_N\}$. В итоге, $\sigma_{f(N)} < r_N < \sigma_{f(N+1)}$.

Выберем в каждом из множеств W_N по одной линии p_N соответственно. Те точки линии p_N, которые находятся на дугах C_r, когда $\sigma_{f(N+1)} > r > \sigma_{f(N)}$, пусть образуют интервал d_N. Точки p_N, находящиеся на дугах C_r, когда $r_N > r > \sigma_{f(N)}$ составят интервал $\varepsilon_N \subset d_N$. Точки линии p_0, находящиеся на дугах C_r, когда $\sigma_{f(0)} \geqslant r$, пусть образуют интервал A. Пусть $\delta(p, \xi)$ означает интервал линии $p \in \mathbf{H}$, составленный из тех точек линии p, которые находятся на дугах C_r таких, что $r > \xi$. $\Delta(p, p', \xi)$ означает отрезок дуги C_ξ, соединяющий конец интервала $\delta(p, \xi)$ с точкой линии $p' \in \mathbf{H}$, которая есть предел для точек $p' \cap C_r$, когда r устремлено к ξ с условием $r < \xi$. Пусть $\Delta_{N+1} = \Delta(p_{N+1}, p_N, \sigma_{f(N+1)})$, $\delta_{N+1} = \delta(p_{N+1}, \sigma_{f(N+1)})$.

Из линий $\in W_N$ строим линии $\in R_N$. Для этого определяем (см. рис. 2):

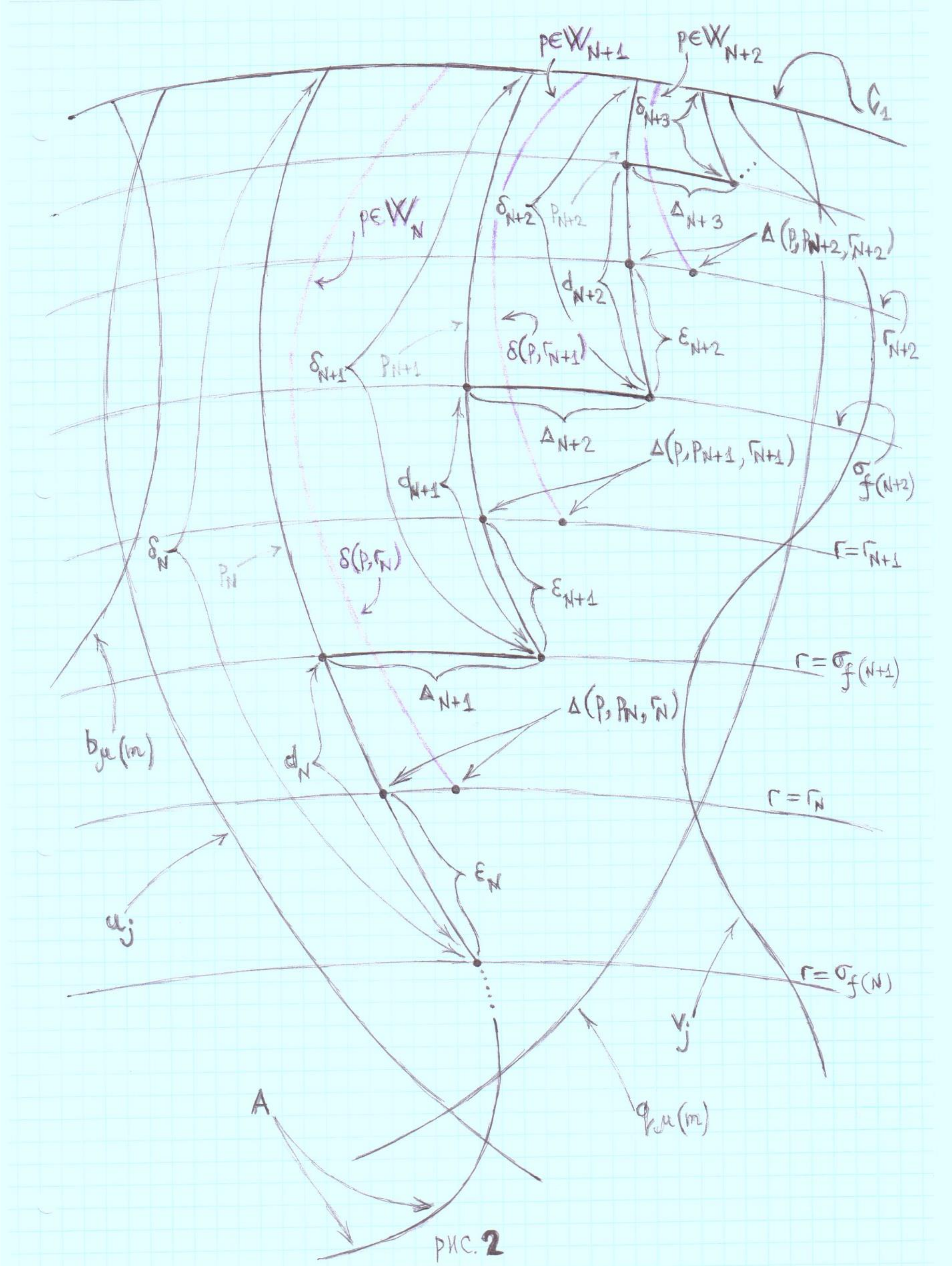
$$h_0 = p_0$$

$$h_1 = \delta_1 \cup \Delta_1 \cup d_0 \cup A$$

$$h_N = \delta_N \cup \Delta_N \cup \bigcup_{m\in N\setminus\{0\}}(d_m \cup \Delta_m) \cup d_0 \cup A$$

Для каждого $N \in \omega$, для каждой $p \in W_N$ определим линию $k = k(p)$:

$$k = \delta(p, r_N) \cup \Delta(p, p_N, r_N) \cup \varepsilon_N \cup \Delta_N \cup \bigcup_{m\in N\setminus\{0\}}(\Delta_m \cup d_m) \cup d_0 \cup A$$



p∈W_{N+1}
p∈W_{N+2}
C_1
δ_{N+3}
Δ_{N+3}
δ_{N+2}
p_{N+2}
Δ(p, p_{N+2}, r_{N+2})
p∈W_N
d_{N+2}
ε_{N+2}
r_{N+2}
δ(p, r_{N+1})
δ_{N+1}
p_{N+1}
Δ_{N+2}
Δ(p, p_{N+1}, r_{N+1})
σ_{f(N+2)}
d_{N+1}
r = r_{N+1}
δ_N
p_N
δ(p, r_N)
ε_{N+1}
r = σ_{f(N+1)}
Δ_{N+1}
Δ(p, p_N, r_N)
b_μ(m)
d_N
r = r_N
ε_N
a_j
r = σ_{f(N)}
v_j
A
q_μ(m)

рис. 2

Если $p \in W_N$, то пусть $k(p) \in E_N$. Тогда, $h_N \in E_N$. Для каждой $k \in E_N$ докажем, что $k \in S_{f(N)}$. Действительно, пусть $q' \in \mathbf{H}$ и $q \in \mathbf{H}$ таковы, что для всех $r \geqslant \xi$ каждая точка $q' \cap C_r$ находится на дуге C_r правее каждой точки множества $q \cap C_r$. И пусть Q и Q' – точки дуги C_r, расположенные так, что обе они находятся правее каждой точки множества $q \cap C_r$ и левее каждой точки множества $q' \cap C_r$. Тогда, дуга Δ с концами в точках Q и Q', включённая в C_r, такова, что каждая точка из Δ находится правее каждой точки $q \cap C_r$ и левее каждой точки $q' \cap C_r$. Отсюда получаем, что каждая точка дуг $\Delta(p, p_N, r_N)$ и Δ_{N+1}, и каждая точка интервала d_N находится правее каждой линии $b_{\mu(m)}$ и u_j и левее каждой линии $q_{\mu(m)}$ и v_j для всех $m \leqslant N$ и $j \leqslant N$. Следовательно, когда $p \in W_N$, $k(p) \in S_{f(M)}$ для каждого $M \leqslant N$, $M \in \omega$. Определим $R_n = \bigcup_{N \in \omega \setminus n} E_N$, $R_0 = \bigcup_{N \in \omega} E_N$. Тогда, по доказанному, $R_n \subseteq S_{f(n)} \subseteq S_n$. Тем самым, для случая а) лемма доказана. Пусть выполнен случай б). Тогда берём $r_{N+1} > 1 - \frac{1}{2}(1 - r_N)$, $r_0 > \sigma$, $S_n = S_{f(n)}$. Из условия этого случая следует, что найдётся линия Γ, которая принадлежит каждому множеству S_n – каков бы ни был $n \in \omega$. Тогда полагаем $\Gamma = h_n$, и далее рассуждаем как в первом случае.

Оставшиеся случаи можно свести к рассмотренным. Действительно, либо найдётся строго возрастающая последовательность g такая, что величина $\sigma_{g(N)}$ устремлена к единице, когда N неограниченно растёт, либо какова бы ни была такая последовательность g, величина $\sigma_{g(N)}$ не превышает некоторого числа $\sigma < 1$, и подходящая g также существует. В обоих случаях, пусть ${\sigma_N}' = \sigma_{g(N)}$ и ${S_N}' = S_{g(N)}$. В отношении чисел ${\sigma_N}'$ и множеств ${S_N}'$, т.е. при замене σ_N и S_N на ${\sigma_N}'$ и ${S_N}'$, лемма доказуема для одного из случаев а) или б). Поскольку, для каждого $m \in g(N)$ верно $S_m \supseteq S_{g(N)}$, и $N \leqslant g(N)$, то $R_n \subseteq S_n$. Ч.т.д.

Расширим каждое множество R_n до множества, которое обозначим $T_{\eta+n}$, и в которое пусть войдут все без исключения линии $p \in \mathbf{H}$, для которых для каждого $r \geqslant r_n = \tau_{\eta+n}$ каждая точка множества $C_r \cap p$ находится правее линии $u_n = b_{\eta+n}$ и левее линии $v_n = q_{\eta+n}$. Тогда получаем, что каково бы ни было конечное множество $M \subset \eta + \omega$, $\bigcap_{\mu \in M} T_\mu \neq \emptyset$.

Пусть мы располагаем трансфинитными последовательностями линий b_μ и q_μ, где $\mu \in \omega_1$. Первоначальный, подходящий под условия леммы I, набор множеств T_μ, т.е. для $\mu \in \omega$, тогда определим тривиально. Пользуясь леммой I и трансфинитной индукцией, находим трансфинитную последовательность множеств T_μ таких, что индекс μ принимает значения уже всех ординалов $\in \omega_1$, и для произвольного конечного $M \subset \omega_1$ верно $\bigcap_{\mu \in M} T_\mu \neq \emptyset$. Тем самым, множества T_μ суть элементы некого фильтра. Расширив этот фильтр находим, что верна

Лемма II. Для всякой пары трансфинитных последовательностей линий b_μ и q_μ, взятых из $\mathbf{H}$, когда $\mu \in \omega_1$, и когда для всякого $\nu \in \mu$ верно $b_\nu \ll b_\mu \ll q_\mu \ll q_\nu$, существует ультрафильтр $\mathfrak{F}$ над $\mathbf{H}$, и существуют множества $T_\mu \in \mathfrak{F}$ и положительные действительные числа $\tau_\mu < 1$ такие, что T_μ в точности есть множество всех таких линий $p \in \mathbf{H}$, для которых для всех действительных $r < 1$, $r \geqslant \tau_\mu$ верно, что каждая точка $p \cap C_r$ находится левее q_μ и правее b_μ.

Аналогично находится ультрафильтр для случая, когда «трансфинитные номера» для линий q_μ ограничены ординалом ω. Предел по ультрафильтру $\mathfrak{F}$ во всех случаях будет точечным множеством, которое включает линию $h \in \mathbf{H}$, требуемую аксимой I. Аксиома II сводима к частному случаю аксиомы I. Пользуясь доказанным, находим, что $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. Рассматривая линии на $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1$, подобным же способом находим, что $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2}$, и т.д. Для этого, порядок для линий $\subset \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1$ делаем похожим на порядок для линий $\in \mathbf{H}$. Линии $\subset \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1$ будут частично «слипаться» на несчётном множестве точек, но это не помешает дать похожие определения.

Литература

1. Ватолин Дм. «Геометрические аксиомы, влекущие отрицание континуум-гипотезы», http://vixra.org/abs/1005.0059