Alpha-conversion for lambda terms with explicit weakenings

George Cherevichenko

Abstract

Using explicit weakenings, we can define alpha-conversion by simple equations without any mention of free variables.

1 Terms and alpha-conversion

The set of terms $\Lambda\!\uparrow$ is shown in the Tab. 1. A term of the form $\uparrow M$ corresponds to usual $M[\uparrow]$ (but now we need much less parentheses). For example, $\lambda\mathsf{x}\!\uparrow\! M$ corresponds to $\lambda\mathsf{x}(M[\uparrow])$ and $\uparrow\!\lambda\mathsf{x}M$ corresponds to $(\lambda\mathsf{x}M)[\uparrow]$ We also define a lot of functions $F\colon \Lambda\!\uparrow\,\to\Lambda\!\uparrow$. Each F has a form $\{\mathsf{yx}\}$ or $\{\mathsf{yx}\}_{\mathsf{z}_1\ldots\mathsf{z}_n}$ A function of the form $\{\mathsf{yx}\}$ roughly corresponds to $[\mathsf{y}/\mathsf{x}]$, but is not the same. It corresponds to $[1\cdot\uparrow]$ or $\langle Fst, Snd\rangle$ and does nothing except variable renaming. A function of the form F_{x} corresponds to $[\Uparrow F]$. I shall usually write FM instead of $F(M)$. For example, $\{yx\}\lambda zx$ is shorthand for $\{yx\}(\lambda zx)$

Alpha-conversion is the smallest compatible equivalence relation such that $\lambda\mathsf{x}M =_\alpha \lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M$ for all $\mathsf{x}, \mathsf{y}, M$ (no restrictions). See Tab. 2.

Example 1.1. $\lambda xz =_\alpha \lambda yz =_\alpha \lambda z\!\uparrow\! z =_\alpha \lambda x\!\uparrow\! z =_\alpha \lambda y\!\uparrow\! z$
$\lambda xz =_\alpha \lambda z\{zx\}z = \lambda z\!\uparrow\! z$
$\lambda yz =_\alpha \lambda z\{zy\}z = \lambda z\!\uparrow\! z$
$\lambda xz =_\alpha \lambda x\{xx\}z = \lambda x\!\uparrow\! z$

Example 1.2. $\lambda x\lambda z\, x =_\alpha \lambda y\lambda z\, y$
$\lambda x\lambda z\, x =_\alpha \lambda y\{yx\}\lambda z\, x = \lambda y\lambda z\{yx\}_z\, x = \lambda y\lambda z\uparrow\!\{yx\}\, x = \lambda y\lambda z\uparrow\! y$
$\lambda y\lambda z\, y =_\alpha \lambda y\{yy\}\lambda z\, y = \lambda y\lambda z\{yy\}_z\, y = \lambda y\lambda z\uparrow\!\{yy\}\, y = \lambda y\lambda z\uparrow\! y$

Tab. 1: Terms and functions

$$\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z},\mathsf{w} ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \qquad \text{(Variables)}$$

$$M, N ::= \mathsf{x} \mid MN \mid \lambda\mathsf{x}M \mid \uparrow M \qquad \text{(Terms)}$$

$$F ::= \{\mathsf{yx}\} \mid F_{\mathsf{x}} \qquad \text{(Functions)}$$

$$\begin{aligned}
F(MN) &= F(M)F(N) \\
F(\lambda\mathsf{x}M) &= \lambda\mathsf{x}F_{\mathsf{x}}(M) \\
F_{\mathsf{x}}(\uparrow M) &= \uparrow F(M) \\
F_{\mathsf{x}}(\mathsf{x}) &= \mathsf{x} \\
F_{\mathsf{x}}(\mathsf{z}) &= \uparrow F(\mathsf{z}) && (\mathsf{z} \neq \mathsf{x}) \\
\{\mathsf{yx}\}(\uparrow M) &= \uparrow M \\
\{\mathsf{yx}\}(\mathsf{x}) &= \mathsf{y} \\
\{\mathsf{yx}\}(\mathsf{z}) &= \uparrow \mathsf{z} && (\mathsf{z} \neq \mathsf{x})
\end{aligned}$$

Tab. 2: Alpha-conversion

$$M =_\alpha M \qquad \frac{M_1 =_\alpha M_2}{\uparrow M_1 =_\alpha \uparrow M_2}$$

$$\frac{M_1 =_\alpha M_2}{M_2 =_\alpha M_1} \qquad \frac{M_1 =_\alpha M_2 \quad N_1 =_\alpha N_2}{M_1 N_1 =_\alpha M_2 N_2}$$

$$\frac{M_1 =_\alpha M_2 \quad M_2 =_\alpha M_3}{M_1 =_\alpha M_3} \qquad \frac{M_1 =_\alpha M_2}{\lambda\mathsf{x}M_1 =_\alpha \lambda\mathsf{x}M_2}$$

$$\lambda\mathsf{x}M =_\alpha \lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M$$

Definition 1.3. Context is a finite list of variables, may be with repetitions. *nil* is the empty context. For example $\Gamma = x, x, y, z$ is a context. Γ, Δ is concatenation of Γ and Δ.

Definition 1.4. $\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Gamma$ is shorthand for $\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_n}$ if $\Gamma = \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_n$
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{nil}$ is simply $\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}$
Note that
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Gamma,\mathsf{y}} \uparrow M = \uparrow \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Gamma M$
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\, \mathsf{y} = \mathsf{y}$
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\, \mathsf{z} = \uparrow \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Gamma\, \mathsf{z} \quad$ if $\mathsf{z} \neq \mathsf{y}$

Lemma 1.5. $\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}M = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}M$

Proof. We shall prove the stronger statement
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Gamma\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Gamma\, M = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Gamma\, M$
(Γ is arbitrary) by induction on the structure of M.

Case 1. $M = \lambda \mathsf{y} N$
Prove the induction step

$$\frac{\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\, N = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\, N}{\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Gamma\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Gamma\, \lambda \mathsf{y} N = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Gamma\, \lambda \mathsf{y} N}$$

This is true because
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Gamma\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Gamma\, \lambda \mathsf{y} N = \lambda \mathsf{y}\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\, N$
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Gamma\, \lambda \mathsf{y} N = \lambda \mathsf{y}\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Gamma,\mathsf{y}}\, N$

Case 2. M is a variable z. Induction on the length of Γ.
Suppose $\Gamma = nil$ and prove
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}\mathsf{z} = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}\mathsf{z}$
If $\mathsf{z} = \mathsf{x}_3$ then
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}\mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_1 = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}\mathsf{x}_3$
If $\mathsf{z} \neq \mathsf{x}_3$ then
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}\mathsf{z} = \uparrow \mathsf{z} = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}\mathsf{z}$
Suppose $\Gamma = \Delta, \mathsf{y}$ and prove the induction step

$$\frac{\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Delta\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Delta\, \mathsf{z} = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Delta\, \mathsf{z}}{\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Delta,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}}\, \mathsf{z} = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}}\, \mathsf{z}}$$

If $\mathsf{z} = \mathsf{y}$ then
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Delta,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}}\, \mathsf{y} = \mathsf{y} = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}}\, \mathsf{y}$

If $\mathsf{z} \neq \mathsf{y}$ then
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Delta,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}}\, \mathsf{z} = \uparrow \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Delta\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Delta\, \mathsf{z}$
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}}\, \mathsf{z} = \uparrow \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Delta\, \mathsf{z}$

Case 3. $M = \uparrow N$
If $\Gamma = nil$ then
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\} \uparrow N = \uparrow N = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\} \uparrow N$
If $\Gamma = \Delta, \mathsf{y}$ then (induction on the structure of M)

$$\frac{\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Delta\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Delta\, N = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Delta\, N}{\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Delta,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}} \uparrow N = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}} \uparrow N}$$

because
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_{\Delta,\mathsf{y}}\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}} \uparrow N = \uparrow \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}_\Delta\{\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\}_\Delta\, N$
$\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_{\Delta,\mathsf{y}} \uparrow N = \uparrow \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_3\}_\Delta\, N$

Case 4. $M = N_1N_2$
Straightforward, because $F(N_1N_2) = F(N_1)F(N_2)$ □

Lemma 1.6. $\{\mathsf{yx}\}F_\mathsf{x}M = F_\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M$

Proof. We shall prove the stronger statement
$\{\mathsf{yx}\}_\Gamma\, F_{\mathsf{x},\Gamma}\, M = F_{\mathsf{y},\Gamma}\, \{\mathsf{yx}\}_\Gamma\, M$
(Γ is arbitrary) by induction on the structure of M.

Case 1. $M = \lambda \mathsf{z} N$
Prove the induction step

$$\frac{\{\mathsf{yx}\}_{\Gamma,\mathsf{z}}\, F_{\mathsf{x},\Gamma,\mathsf{z}}\, N = F_{\mathsf{y},\Gamma,\mathsf{z}}\, \{\mathsf{yx}\}_{\Gamma,\mathsf{z}}\, N}{\{\mathsf{yx}\}_\Gamma\, F_{\mathsf{x},\Gamma}\, \lambda\mathsf{z}N = F_{\mathsf{y},\Gamma}\, \{\mathsf{yx}\}_\Gamma\, \lambda\mathsf{z}N}$$

This is true because
$\{\mathsf{yx}\}_\Gamma\, F_{\mathsf{x},\Gamma}\, \lambda\mathsf{z}N = \lambda\mathsf{z}\, \{\mathsf{yx}\}_{\Gamma,\mathsf{z}}\, F_{\mathsf{x},\Gamma,\mathsf{z}}\, N$
$F_{\mathsf{y},\Gamma}\, \{\mathsf{yx}\}_\Gamma\, \lambda\mathsf{z}N = \lambda\mathsf{z}\, F_{\mathsf{y},\Gamma,\mathsf{z}}\, \{\mathsf{yx}\}_{\Gamma,\mathsf{z}}\, N$

Case 2. M is a variable z. Induction on the length of Δ.
Suppose $\Gamma = nil$ and prove
$\{\mathsf{yx}\}F_\mathsf{x}\, \mathsf{z} = F_\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}\mathsf{z}$
If $\mathsf{z} = \mathsf{x}$ then
$\{\mathsf{yx}\}F_\mathsf{x}\, \mathsf{x} = \mathsf{y} = F_\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}\mathsf{x}$
If $\mathsf{z} \neq \mathsf{x}$ then
$\{\mathsf{yx}\}F_\mathsf{x}\, \mathsf{z} = \uparrow F\mathsf{z} = F_\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}\mathsf{z}$
Suppose $\Gamma = \Delta, \mathsf{w}$ and prove the induction step

$$\frac{\{\mathsf{yx}\}_\Delta F_{\mathsf{x},\Delta}\, \mathsf{z} = F_{\mathsf{y},\Delta}\{\mathsf{yx}\}_\Delta\, \mathsf{z}}{\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}} F_{\mathsf{x},\Delta,\mathsf{w}}\, \mathsf{z} = F_{\mathsf{y},\Delta,\mathsf{w}}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}\, \mathsf{z}}$$

If $\mathsf{z} = \mathsf{w}$ then
$\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}} F_{\mathsf{x},\Delta,\mathsf{w}}\, \mathsf{w} = \mathsf{w} = F_{\mathsf{y},\Delta,\mathsf{w}}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}\, \mathsf{w}$
If $\mathsf{z} \neq \mathsf{w}$ then

$\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}F_{\mathsf{x},\Delta,\mathsf{w}}\,\mathsf{z} = \uparrow\{\mathsf{yx}\}_{\Delta}F_{\mathsf{x},\Delta}\,\mathsf{z}$
$F_{\mathsf{y},\Delta,\mathsf{w}}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}\,\mathsf{z} = \uparrow F_{\mathsf{y},\Delta}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta}\,\mathsf{z}$

Case 3. $M = \uparrow N$
If $\Gamma = nil$ then
$\{\mathsf{yx}\}F_{\mathsf{x}}\uparrow N = \uparrow FN = F_{\mathsf{y}}\{\mathsf{yx}\}\uparrow N$
If $\Gamma = \Delta, \mathsf{w}$ then (induction on the structure of M)

$$\frac{\{\mathsf{yx}\}_{\Delta}F_{\mathsf{x},\Delta}\,N = F_{\mathsf{y},\Delta}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta}\,N}{\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}F_{\mathsf{x},\Delta,\mathsf{w}}\uparrow N = F_{\mathsf{y},\Delta,\mathsf{w}}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}\uparrow N}$$

because
$\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}F_{\mathsf{x},\Delta,\mathsf{w}}\uparrow N = \uparrow\{\mathsf{yx}\}_{\Delta}F_{\mathsf{x},\Delta}\,N$
$F_{\mathsf{y},\Delta,\mathsf{w}}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{w}}\uparrow N = \uparrow F_{\mathsf{y},\Delta}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta}\,N$

Case 4. $M = N_1N_2$
Straightforward, because $F(N_1N_2) = F(N_1)F(N_2)$ □

Theorem 1.7. *If $M =_\alpha N$ then $F(M) =_\alpha F(N)$*

Proof. We need to prove $F\lambda\mathsf{x}M =_\alpha F\lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M$
$F\lambda\mathsf{x}M = \lambda\mathsf{x}F_{\mathsf{x}}M =_\alpha \lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}F_{\mathsf{x}}M = \lambda\mathsf{y}F_{\mathsf{y}}\{\mathsf{yx}\}M = F\lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M$
(the third equality by the previous lemma). □

2 de Bruijn's terms

For each variable z and term M we define the term $db_{\mathsf{z}}(M)$ such that $M =_\alpha N$ iff $db_{\mathsf{z}}(M) = db_{\mathsf{z}}(N)$

Definition 2.1.
$db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) = \mathsf{x}$
$db_{\mathsf{z}}(\uparrow M) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(M)$
$db_{\mathsf{z}}(MN) = db_{\mathsf{z}}(M)db_{\mathsf{z}}(N)$
$db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}M) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(M)$

Example 2.2.
$db_z(\lambda x\lambda y\, y) = \lambda z\lambda z\, z$
$db_z(\lambda x\lambda y\, x) = \lambda z\lambda z\uparrow z$ (db means "de Bruijn")
$db_z(\lambda y\, x) = \lambda z\uparrow x$

Lemma 2.3. $db_{\mathsf{z}}(M) =_\alpha M$

Proof. Induction on the structure of M.
If $M = \lambda\mathsf{x}N$ and $db_{\mathsf{z}}(N) =_\alpha N$ then
$db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}N) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(N) =_\alpha \lambda\mathsf{x}\,db_{\mathsf{z}}(N) =_\alpha \lambda\mathsf{x}N$

$\square$

Theorem 2.4. *If* $db_{\mathsf{z}}(M) = db_{\mathsf{z}}(N)$ *then* $M =_\alpha N$

Proof. $M =_\alpha db_{\mathsf{z}}(M) = db_{\mathsf{z}}(N) =_\alpha N$ $\square$

Lemma 2.5. $F(db_{\mathsf{z}}M) = db_{\mathsf{z}}(FM)$

Proof. Induction on the structure of M.

Case 1. If $M = \lambda\mathsf{x}N$ then
$F(db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}N)) = F\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(N) = \lambda\mathsf{z}F_{\mathsf{z}}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(N) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}F_{\mathsf{x}}\,db_{\mathsf{z}}(N)$
the last equality by Lemma 1.6
$db_{\mathsf{z}}(F\lambda\mathsf{x}N) = db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}F_{\mathsf{x}}N) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}N)$
but $F_{\mathsf{x}}\,db_{\mathsf{z}}(N) = db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}N)$ by induction hypothesis.

Case 2. If M is a variable y then
$F(db_{\mathsf{z}}\mathsf{y}) = F\mathsf{y}$
$db_{\mathsf{z}}(F\mathsf{y}) = F\mathsf{y}$ because $F\mathsf{y}$ always is a variable or $\underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n}$ var.

More rigorously, use induction on the structure of F (see Tab. 1).
Suppose F is $\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}$ and prove
$db_{\mathsf{z}}(\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\mathsf{y}) = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\mathsf{y}$
If $\mathsf{y} = \mathsf{x}_2$ then
$db_{\mathsf{z}}(\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\mathsf{x}_2) = db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}_1) = \mathsf{x}_1 = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\mathsf{x}_2$
If $\mathsf{y} \neq \mathsf{x}_2$ then
$db_{\mathsf{z}}(\{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\mathsf{y}) = db_{\mathsf{z}}(\uparrow\mathsf{y}) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(\mathsf{y}) = \uparrow\mathsf{y} = \{\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\}\mathsf{y}$
Now prove the induction step

$$\frac{db_{\mathsf{z}}(F\mathsf{y}) = F\mathsf{y}}{db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}\mathsf{y}) = F_{\mathsf{x}}\mathsf{y}}$$

If $\mathsf{y} = \mathsf{x}$ then
$db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}\,\mathsf{x}) = db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) = \mathsf{x} = F_{\mathsf{x}}\,\mathsf{x}$
If $\mathsf{y} \neq \mathsf{x}$ then
$db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}\,\mathsf{y}) = db_{\mathsf{z}}(\uparrow F\mathsf{y}) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(F\mathsf{y})$
$F_{\mathsf{x}}\,\mathsf{y} = \uparrow F\mathsf{y}$

Case 3. Suppose $M = \uparrow N$.
If F is $\{\mathsf{x}_2, \mathsf{x}_1\}$ then
$\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2\}\,db_{\mathsf{z}}(\uparrow N) = \{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2\}\uparrow db_{\mathsf{z}}(N) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(N)$
$db_{\mathsf{z}}(\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2\}\uparrow N) = db_{\mathsf{z}}(\uparrow N) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(N)$
If function has the form F_{x} then (induction on the structure of M)

$$\frac{db_{\mathsf{z}}(FN) = FN}{db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}{\uparrow}N) = F_{\mathsf{x}}{\uparrow}N}$$

because

$db_{\mathsf{z}}(F_{\mathsf{x}}{\uparrow}N) = db_{\mathsf{z}}({\uparrow}FN) = {\uparrow}db_{\mathsf{z}}(FN)$

$F_{\mathsf{x}}{\uparrow}N = {\uparrow}FN$

Case 4. $M = N_1N_2$

Straighforward.

□

Theorem 2.6. *If* $M =_\alpha N$ *then* $db_{\mathsf{z}}(M) = db_{\mathsf{z}}(N)$

Proof. We need to prove $db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}M) = db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M)$

$db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}M) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(M)$

$db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{y}\{\mathsf{yx}\}M) =$

$= \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zy}\}db_{\mathsf{z}}(\{\mathsf{yx}\}M)$

$= \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zy}\}\{\mathsf{yx}\}db_{\mathsf{z}}(M)$ (by the previous lemma)

$= \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(M)$ (by Lemma 1.5) □

Theorem 2.7. $\lambda\mathsf{x}M =_\alpha \lambda\mathsf{y}N$ *iff* $\{\mathsf{zx}\}M =_\alpha \{\mathsf{zy}\}N$

Proof. Suppose $\{\mathsf{zx}\}M =_\alpha \{\mathsf{zy}\}N$. Then

$\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}M =_\alpha \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zy}\}N$

and

$\lambda\mathsf{x}M =_\alpha \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}M =_\alpha \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zy}\}N =_\alpha \lambda\mathsf{y}N$

Suppose $\lambda\mathsf{x}M =_\alpha \lambda\mathsf{y}N$. Then

$db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}M) = db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{y}N)$

$\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(M) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zy}\}db_{\mathsf{z}}(N)$

$\{\mathsf{zx}\}db_{\mathsf{z}}(M) = \{\mathsf{zy}\}db_{\mathsf{z}}(N)$

and $\{\mathsf{zx}\}M =_\alpha \{\mathsf{zy}\}N$ because

$M =_\alpha db_{\mathsf{z}}(M)$

$N =_\alpha db_{\mathsf{z}}(N)$

□

3 de Bruijn's terms 2

The set of inference rules is shown in Tab. 3. Note that for each Γ, M there is a unique rule with the conclusion $\Gamma \vdash M$

Lemma 3.1. *For each* Γ, M *there is a unique derivation of* $\Gamma \vdash M$

Tab. 3: Inference rules

$$nil \vdash \mathsf{x}$$

$$\Gamma, \mathsf{x} \vdash \mathsf{x}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{x}}{\Gamma, \mathsf{z} \vdash \mathsf{x}} \qquad (\mathsf{z} \neq \mathsf{x})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \quad \Gamma \vdash N}{\Gamma \vdash MN}$$

$$\frac{nil \vdash M}{nil \vdash \uparrow M}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M}{\Gamma, \mathsf{x} \vdash \uparrow M}$$

$$\frac{\Gamma, \mathsf{x} \vdash M}{\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} M}$$

Proof. Induction on the structure of M.

Case 1. M is a variable x. Induction over the length of Γ.
If $\Gamma = nil$ then the unique inference is $nil \vdash \mathsf{x}$
If $\Gamma = \Delta, \mathsf{z}$ then
$\Delta, \mathsf{x} \vdash \mathsf{x} \quad$ if $\mathsf{z} = \mathsf{x}$

$$\frac{\Delta \vdash \mathsf{x}}{\Delta, \mathsf{z} \vdash \mathsf{x}} \quad \text{if } \mathsf{z} \neq \mathsf{x}$$

Case 2. And so on (nothing more to prove). □

Tab. 4: Generalized de Bruijn's terms

$$\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z} ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \qquad \text{(Variables)}$$

$$A, B ::= \mathsf{x} \mid \underline{1} \mid AB \mid \lambda A \mid {\uparrow} A \qquad \text{(Terms)}$$

$$\|nil \vdash \mathsf{x}\| = \mathsf{x}$$

$$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \mathsf{x}\| = \underline{1}$$

$$\frac{\|\Gamma \vdash \mathsf{x}\| = A}{\|\Gamma, \mathsf{z} \vdash \mathsf{x}\| = {\uparrow} A} \qquad (\mathsf{z} \neq \mathsf{x})$$

$$\frac{\|\Gamma \vdash M\| = A \quad \|\Gamma \vdash N\| = B}{\|\Gamma \vdash MN\| = AB}$$

$$\frac{\|nil \vdash M\| = A}{\|nil \vdash {\uparrow} M\| = {\uparrow} A}$$

$$\frac{\|\Gamma \vdash M\| = A}{\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash {\uparrow} M\| = {\uparrow} A}$$

$$\frac{\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash M\| = A}{\|\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} M\| = \lambda A}$$

Example 3.2. The (unique) inference of $nil \vdash \lambda x \lambda y\, xyz$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \vdash x}{x, y \vdash x} \quad x, y \vdash y}{x, y \vdash xy} \qquad \dfrac{\dfrac{nil \vdash z}{x \vdash z}}{x, y \vdash z}}{x, y \vdash xyz}}{x \vdash \lambda y\, xyz}}{nil \vdash \lambda x \lambda y\, xyz}$$

Definition 3.3. The set of generalized de Bruin's terms is shown in Tab. 4. For each Γ, M we put in correspondence the generalized de Bruin's term

$\|\Gamma \vdash M\|$ as shown in Tab. 4. Note that we can write these rules shorter:

$$
\begin{aligned}
\|nil \vdash \mathsf{x}\| &= \mathsf{x} \\
\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \mathsf{x}\| &= \underline{1} \\
\|\Gamma, \mathsf{z} \vdash \mathsf{x}\| &= \uparrow \|\Gamma \vdash \mathsf{x}\| \quad \text{if } \mathsf{z} \neq \mathsf{x} \\
\|\Gamma \vdash MN\| &= \|\Gamma \vdash M\| \|\Gamma \vdash N\| \\
\|nil \vdash \uparrow M\| &= \uparrow \|nil \vdash M\| \\
\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \uparrow M\| &= \uparrow \|\Gamma \vdash M\| \\
\|\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} M\| &= \lambda \|\Gamma, \mathsf{x} \vdash M\|
\end{aligned}
$$

Example 3.4. $\|nil \vdash \lambda x \lambda y\, xyz\| = \lambda\lambda(\uparrow\underline{1})\underline{1} \uparrow\uparrow z$
because

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\|x \vdash x\| = \underline{1}}{\|x, y \vdash x\| = \uparrow\underline{1}} \quad \|x, y \vdash y\| = \underline{1}}{\|x, y \vdash xy\| = (\uparrow\underline{1})\underline{1}} \quad \dfrac{\dfrac{\|nil \vdash z\| = z}{\|x \vdash z\| = \uparrow z}}{\|x, y \vdash z\| = \uparrow\uparrow z}}{\|x, y \vdash xyz\| = (\uparrow\underline{1})\underline{1} \uparrow\uparrow z}}{\|x \vdash \lambda y\, xyz\| = \lambda(\uparrow\underline{1})\underline{1} \uparrow\uparrow z}}{\|nil \vdash \lambda x \lambda y\, xyz\| = \lambda\lambda(\uparrow\underline{1})\underline{1} \uparrow\uparrow z}
$$

Theorem 3.5. *If $M =_\alpha N$ then $\|\Gamma \vdash M\| = \|\Gamma \vdash N\|$ for arbitrary Γ.*

Proof. We have to prove
$\|\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} M\| = \|\Gamma \vdash \lambda \mathsf{y} \{\mathsf{y}\mathsf{x}\} M\|$
It is enough to prove
$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash M\| = \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{y}\mathsf{x}\} M\|$
because
$\|\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} M\| = \lambda \|\Gamma, \mathsf{x} \vdash M\|$
$\|\Gamma \vdash \lambda \mathsf{y} \{\mathsf{y}\mathsf{x}\} M\| = \lambda \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{y}\mathsf{x}\} M\|$
We shall prove the stronger statement
$\|\Gamma, \mathsf{x}, \Delta \vdash M\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta \vdash \{\mathsf{y}\mathsf{x}\}_\Delta M\|$
for arbitrary Δ. Induction on the structure of M.

Case 1. $M = \lambda \mathsf{z} N$. Prove the induction step

$$
\dfrac{\|\Gamma, \mathsf{x}, \Delta, \mathsf{z} \vdash N\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta, \mathsf{z} \vdash \{\mathsf{y}\mathsf{x}\}_{\Delta, \mathsf{z}} N\|}{\|\Gamma, \mathsf{x}, \Delta \vdash \lambda \mathsf{z} N\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta \vdash \{\mathsf{y}\mathsf{x}\}_\Delta \lambda \mathsf{z} N\|}
$$

This is true because
$\|\Gamma, \mathsf{x}, \Delta \vdash \lambda \mathsf{z} N\| = \lambda \|\Gamma, \mathsf{x}, \Delta, \mathsf{z} \vdash N\|$

$\|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta \vdash \{\mathsf{yx}\}_\Delta\, \lambda \mathsf{z} N\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta \vdash \lambda \mathsf{z}\{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{z}}\, N\| = \lambda\|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta, \mathsf{z} \vdash \{\mathsf{yx}\}_{\Delta,\mathsf{z}}\, N\|$

Case 2. M is a variable z. We have to prove
$\|\Gamma, \mathsf{x}, \Delta \vdash \mathsf{z}\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Delta \vdash \{\mathsf{yx}\}_\Delta\, \mathsf{z}\|$
Induction over the length of Δ.
Suppose $\Delta = nil$ and prove
$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \mathsf{z}\| = \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{yx}\}\mathsf{z}\|$
If $\mathsf{z} = \mathsf{x}$ then
$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \mathsf{x}\| = \underline{1}$
$\|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{yx}\}\mathsf{x}\| = \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \mathsf{y}\| = \underline{1}$
If $\mathsf{z} \neq \mathsf{x}$ then
$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \mathsf{z}\| = \uparrow\|\Gamma \vdash \mathsf{z}\|$
$\|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{yx}\}\mathsf{z}\| = \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \uparrow \mathsf{z}\| = \uparrow\|\Gamma \vdash \mathsf{z}\|$
Suppose $\Delta = \Sigma, \mathsf{w}$ and prove the induction step

$$\frac{\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma \vdash \mathsf{z}\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma \vdash \{\mathsf{yx}\}_\Sigma\, \mathsf{z}\|}{\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \mathsf{z}\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \{\mathsf{yx}\}_{\Sigma,\mathsf{w}}\, \mathsf{z}\|}$$

If $\mathsf{z} = \mathsf{w}$ then
$\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \mathsf{w}\| = \underline{1}$
$\|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \{\mathsf{yx}\}_{\Sigma,\mathsf{w}}\, \mathsf{w}\| = \|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \mathsf{w}\| = \underline{1}$
If $\mathsf{z} \neq \mathsf{w}$ then
$\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \mathsf{z}\| = \uparrow\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma \vdash \mathsf{z}\|$
$\|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \{\mathsf{yx}\}_{\Sigma,\mathsf{w}}\, \mathsf{z}\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \uparrow\{\mathsf{yx}\}_\Sigma\, \mathsf{z}\| = \uparrow\|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma \vdash \{\mathsf{yx}\}_\Sigma\, \mathsf{z}\|$

Case 3. $M = \uparrow N$.
Suppose $\Delta = nil$, then
$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \uparrow N\| = \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{yx}\}\uparrow N\|$
because
$\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash \uparrow N\| = \uparrow\|\Gamma \vdash N\|$
$\|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \{\mathsf{yx}\}\uparrow N\| = \|\Gamma, \mathsf{y} \vdash \uparrow N\| = \uparrow\|\Gamma \vdash N\|$
Suppose $\Delta = \Sigma, \mathsf{w}$ and prove the induction step (induction on the structure of M)

$$\frac{\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma \vdash N\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma \vdash \{\mathsf{yx}\}_\Sigma\, N\|}{\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \uparrow N\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \{\mathsf{yx}\}_{\Sigma,\mathsf{x}}\uparrow N\|}$$

This is true because
$\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \uparrow N\| = \uparrow\|\Gamma, \mathsf{x}, \Sigma \vdash N\|$
$\|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \{\mathsf{yx}\}_{\Sigma,\mathsf{x}}\uparrow N\| = \|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma, \mathsf{w} \vdash \uparrow\{\mathsf{yx}\}_\Sigma\, N\| = \uparrow\|\Gamma, \mathsf{y}, \Sigma \vdash \{\mathsf{yx}\}_\Sigma\, N\|$

Case 4. $M = N_1 N_2$
Straightforward.

□

Now we shall prove that $\|nil \vdash M\| = \|nil \vdash N\|$ implies $M =_\alpha N$

Definition 3.6. For each z and Γ we define the function $\{\mathsf{z}/\Gamma\}$ as follows
$\{\mathsf{z}/nil\}M = M$
$\{\mathsf{z}/\mathsf{x}, \Delta\}M = \{\mathsf{z}/\Delta\}\{\mathsf{zx}\}_\Delta M$
For example
$\{\mathsf{z}/\mathsf{x}\}M = \{\mathsf{zx}\}M$
$\{\mathsf{z}/\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2\}M = \{\mathsf{zx}_2\}\{\mathsf{zx}_1\}_{\mathsf{x}_2} M$
$\{\mathsf{z}/\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3\} = \{\mathsf{zx}_3\}\{\mathsf{zx}_2\}_{\mathsf{x}_3}\{\mathsf{zx}_1\}_{\mathsf{x}_2,\mathsf{x}_3} M$
Note that
$\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}\uparrow N = \uparrow\{\mathsf{z}/\Delta\}N$
$\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}\mathsf{x} = \mathsf{z}$
$\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}\mathsf{y} = \uparrow\{\mathsf{z}/\Delta\}\mathsf{y}$ if $\mathsf{y} \neq \mathsf{x}$
(easy induction)

Example 3.7. $\lambda\mathsf{x}_1\lambda\mathsf{x}_2 M =_\alpha \lambda\mathsf{z}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{z}/\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2\}M$
$\lambda\mathsf{x}_1\lambda\mathsf{x}_2 M$
$=_\alpha \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}_1\}\lambda\mathsf{x}_2 M$
$= \lambda\mathsf{z}\lambda\mathsf{x}_2\{\mathsf{zx}_1\}_{\mathsf{x}_2} M$
$=_\alpha \lambda\mathsf{z}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}_2\}\{\mathsf{zx}_1\}_{\mathsf{x}_2} M$

Lemma 3.8. $\{\mathsf{z}/\Gamma\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}M = \lambda\mathsf{z}\,\{\mathsf{z}/\Gamma, \mathsf{x}\}M$

Proof. Induction over the length of Γ.
Suppose $\Gamma = \mathsf{y}, \Delta$ and prove the induction step

$$\frac{\{\mathsf{z}/\Delta\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}N = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}N}{\{\mathsf{z}/\mathsf{y}, \Delta\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}M = \lambda\mathsf{z}\,\{\mathsf{z}/\mathsf{y}, \Delta, \mathsf{x}\}M}$$

where $N = \{\mathsf{zy}\}_{\Delta,\mathsf{x}} M$

$\{\mathsf{z}/\mathsf{y}, \Delta\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}M =$
$= \{\mathsf{z}/\Delta\}\{\mathsf{zy}\}_\Delta\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}M$
$= \{\mathsf{z}/\Delta\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zy}\}_{\Delta,\mathsf{z}}\{\mathsf{zx}\}M$
$= \{\mathsf{z}/\Delta\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{zx}\}\{\mathsf{zy}\}_{\Delta,\mathsf{x}} M$ by Lemma 1.6
$= \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}\{\mathsf{zy}\}_{\Delta,\mathsf{x}} M$ by induction hypothesis
$= \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{z}/\mathsf{y}, \Delta, \mathsf{x}\}M$

□

Definition 3.9. For each generalized de Bruijn's term A and variable z we put in correspondence the term $db_\mathsf{z}(A)$ (note that $db_\mathsf{z}(A) \in \Lambda\uparrow$)

$db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) = \mathsf{x}$
$db_{\mathsf{z}}(\underline{1}) = \mathsf{z}$
$db_{\mathsf{z}}(\lambda A) = \lambda\mathsf{z}\, db_{\mathsf{z}}(A)$
$db_{\mathsf{z}}(AB) = db_{\mathsf{z}}(A) db_{\mathsf{z}}(B)$
$db_{\mathsf{z}}(\uparrow A) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(A)$

Example 3.10.
$db_z(\lambda\lambda(\uparrow\underline{1})\underline{1}\uparrow\uparrow z) = \lambda z \lambda z(\uparrow z) z \uparrow\uparrow z$
$db_x(\lambda\lambda(\uparrow\underline{1})\underline{1}\uparrow\uparrow z) = \lambda x \lambda x(\uparrow x) x \uparrow\uparrow z$

Theorem 3.11. $db_{\mathsf{z}}\|nil \vdash M\| = db_{\mathsf{z}}(M)$

Proof. We shall prove the stronger statement: for each Γ
$db_{\mathsf{z}}\|\Gamma \vdash M\| = \{\mathsf{z}/\Gamma\} db_{\mathsf{z}}(M)$
Induction on the structure of M.

Case 1. $M = \lambda\mathsf{x}N$
Prove the induction step

$$\frac{db_{\mathsf{z}}\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash N\| = \{\mathsf{z}/\Gamma, \mathsf{x}\} db_{\mathsf{z}}(N)}{db_{\mathsf{z}}\|\Gamma \vdash \lambda\mathsf{x}N\| = \{\mathsf{z}/\Gamma\} db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}N)}$$

Note that $\|\Gamma \vdash \lambda\mathsf{x}N\| = \lambda\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash N\|$
hence
$db_{\mathsf{z}}\|\Gamma \vdash \lambda\mathsf{x}N\| =$
$= \lambda\mathsf{z}\, db_{\mathsf{z}}\|\Gamma, \mathsf{x} \vdash N\|$
$= \lambda\mathsf{z}\, \{\mathsf{z}/\Gamma, \mathsf{x}\} db_{\mathsf{z}}(N)$ by induction hypothesis
But
$db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}N) = \lambda\mathsf{z}\{\mathsf{z}\mathsf{x}\} db_{\mathsf{z}}(N)$
hence
$\{\mathsf{z}/\Gamma\} db_{\mathsf{z}}(\lambda\mathsf{x}N) =$
$= \{\mathsf{z}/\Gamma\}\lambda\mathsf{z}\{\mathsf{z}\mathsf{x}\} db_{\mathsf{z}}(N)$
$= \lambda\mathsf{z}\, \{\mathsf{z}/\Gamma, \mathsf{x}\} db_{\mathsf{z}}(N)$ by Lemma 3.8

Case 2. M is a variable x. Prove that
$db_{\mathsf{z}}\|\Gamma \vdash \mathsf{x}\| = \{\mathsf{z}/\Gamma\} db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x})$
Induction on the length of Γ.
Suppose $\Gamma = nil$ then
$db_{\mathsf{z}}\|nil \vdash \mathsf{x}\| = \mathsf{x} = db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x})$
Suppose $\Gamma = \Delta, \mathsf{y}$ and prove the induction step

$$\frac{db_{\mathsf{z}}\|\Delta \vdash \mathsf{x}\| = \{\mathsf{z}/\Delta\} db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x})}{db_{\mathsf{z}}\|\Delta, \mathsf{y} \vdash \mathsf{x}\| = \{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{y}\} db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x})}$$

If $\mathsf{y} = \mathsf{x}$ then

$db_{\mathsf{z}}\|\Delta, \mathsf{x} \vdash \mathsf{x}\| = db_{\mathsf{z}}(\underline{1}) = \mathsf{z}$
$\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) = \{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{x}\}\mathsf{x} = \mathsf{z}$

If $\mathsf{y} \neq \mathsf{x}$ then
$db_{\mathsf{z}}\|\Delta, \mathsf{y} \vdash \mathsf{x}\| = db_{\mathsf{z}}(\uparrow\|\Delta \vdash \mathsf{x}\|) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(\|\Delta \vdash \mathsf{x}\|)$
$\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{y}\}db_{\mathsf{z}}(\mathsf{x}) = \{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{y}\}\mathsf{x} = \uparrow\{\mathsf{z}/\Delta\}\mathsf{x}$

Case 3. $M = \uparrow N$
Suppose $\Gamma = nil$ and prove the induction step

$$\frac{db_{\mathsf{z}}\|nil \vdash N\| = db_{\mathsf{z}}(N)}{db_{\mathsf{z}}\|nil \vdash \uparrow N\| = db_{\mathsf{z}}(\uparrow N)}$$

This is true because
$db_{\mathsf{z}}\|nil \vdash \uparrow N\| = db_{\mathsf{z}}(\uparrow\|nil \vdash N\|) = \uparrow db_{\mathsf{z}}\|nil \vdash N\|$
$db_{\mathsf{z}}(\uparrow N) = \uparrow db_{\mathsf{z}}(N)$
Suppose $\Gamma = \Delta, \mathsf{y}$ and prove the induction step (induction on the structure of M)

$$\frac{db_{\mathsf{z}}\|\Delta \vdash N\| = \{\mathsf{z}/\Delta\}db_{\mathsf{z}}(N)}{db_{\mathsf{z}}\|\Delta, \mathsf{y} \vdash \uparrow N\| = \{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{y}\}db_{\mathsf{z}}(\uparrow N)}$$

This is true because
$db_{\mathsf{z}}\|\Delta, \mathsf{y} \vdash \uparrow N\| = db_{\mathsf{z}}(\uparrow\|\Delta \vdash N\|) = \uparrow db_{\mathsf{z}}\|\Delta \vdash N\|$
$\{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{y}\}db_{\mathsf{z}}(\uparrow N) = \{\mathsf{z}/\Delta, \mathsf{y}\}\uparrow db_{\mathsf{z}}(N) = \uparrow\{\mathsf{z}/\Delta\}db_{\mathsf{z}}(N)$

Case 4. $M = N_1 N_2$
Straightforward. □

Bibliography

[1] M.Abadi, L.Cardelli, P.L.Curien, J.J.Levy. Explicit substititions. 1991.

[2] R.Pollack. Closure under alpha-conversion. 1993.