pp\quad { 2 }^{ p-1 }\quad \ncong \quad 1\quad mod\quad ({ p }^{ 3 })
\quad \quad FOR\quad ANY\quad PRIME\quad 'p'\\ \\ BY\quad
RAMASWAMY\quad KRISHNAN\\ B7/203\quad VIJAY\quad PARK\quad THANE\quad
INDIA-400615\\ email:-\quad ramasa421@gmail.com\\ \\ SYNOPSIS;-\quad
\quad If\quad { 2 }^{ p-1 }\quad \equiv \quad 1\quad mod\quad ({ p }
^{ 3 })\quad then\quad 2,-1,{ 2 }^{ p-2 }\quad are\quad solutions\quad
to\quad the\quad equation\\ f(a)\quad =\quad 1\quad -\quad { a }^{ p }
\quad -\quad { (1-a) }^{ p\quad \quad }\equiv \quad o\quad mod({ p }
^{ 3 }).\quad Using\quad this\quad fact\quad and\quad an\quad
expression\quad for\\ { (x+y) }^{ n }\quad \quad in\quad terms\quad
of\quad xy\quad ,\quad (x+y)\quad ,\quad ({ x }^{ 2 }+xy+{ y }^{ 2 })
\quad it\quad is\quad prooved\quad that\\ { 2 }^{ p-1 }\quad \ncong
\quad 1\quad mod({ p }^{ 3 })\quad for\quad any\quad prime\quad 'p'.\\
\\ PROOF\\ \\ Expression\quad for\quad { (x+y) }^{ n }\quad for\quad
odd\quad values\quad of\quad n\\ \\ Let\quad n\quad =\quad 6m-3\quad ,
\quad 6m-1\quad ,\quad or\quad 6m+1\quad \quad and\quad \quad { P }
_{ s }\quad =\frac { 2 }{ n-2s+1 } \quad \times \quad \frac { n-2s+1 }
{ 2 } { C }_{ 2s-1 }\\ { (x+y) }^{ n }\quad -\quad { x }^{ n }\quad -
{ y }^{ n }\quad =\quad n\sum _{ 1 }^{ m }{ { p }_{ s } } { \left\
{ xy(x+y) \right\} }^{ 2s-1 }\quad { ({ x }^{ 2 }+xy+{ y }^{ 2 }) }
^{ \frac { n-6s+3 }{ 2 } }--------(1)\\ If\quad x=a\quad and\quad
y=\quad 1-a\quad =b\quad then\\ f\left(a \right) \quad =\quad 1\quad
-\quad { a }^{ p }\quad -\quad { (1-a) }^{ p }\quad =\quad 1\quad -
\quad { a }^{ p }\quad -\quad { b }^{ p }\quad =\quad p\sum { { P }
_{ s } } { (ab) }^{ 2s-1 }\quad { (1-ab) }^{ \frac { p-6s+3 }
{ 2 } }-----(2)\\ \\ Let\quad f(a)\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }
^{ 3 })\quad and\quad 1-ab\quad \ncong \quad 0\quad
mod(p)---------------(3)\\ Then\quad \frac { 1 }{ p } f(a)\quad =\quad
ab\quad { (1-ab) }^{ \frac { p-3 }{ 2 } }\quad \sum { { P }_{ s } }
{ \left[\frac { { (ab) }^{ 2 } }{ { (1-ab) }^{ 3 } } \right] }
^{ s-1 }------------(4)\\ Let\quad ab{ (1-ab) }^{ ^{ \frac { p-3 }
{ 2 } } }=\quad B\quad ;\quad \quad \frac { { (ab) }^{ 2 } }{ { (1-
ab) }^{ 3 } } \quad =\quad K\quad ;\quad \sum { { P }_{ s } } { K }
^{ S-1 }\quad =\quad \Phi (K)\\ Then\quad \frac { 1 }{ p } f(a)\quad
\quad =\quad B\quad \Phi (K)\quad --------------------------------
(5)\\ \frac { dB }{ da } \quad =\quad \quad \frac { 1 }{ 2 } \quad (b-
a)\quad { (1-ab) }^{ \frac { p-5 }{ 2 } }\quad (2+ab-pab)\quad
---------------------------(6)\\ \frac { dK }{ da } \quad =\quad
\quad (b-a)\quad ab\quad (ab+2)\quad { (1-ab) }^{ -4 }\quad \quad
\quad ---------------------------(7)\\ If\quad ab\quad \ncong \quad
1\quad mod(p)\quad \quad \frac { dB }{ da } \quad and\quad \frac
{ dK }{ da } \quad \equiv \quad 0\quad mod(p)\quad if\quad a\quad
\equiv \quad 2\quad ,\quad -1\quad ,\quad { 2 }^{ p-2 }\quad mod(p)\\
In\quad what\quad follows\quad \quad a\quad \equiv \quad { 2 }^{ p-2 }
\quad mod(p)\quad ------------(8)\\ Let\quad { a }_{ 1\quad }=\quad
p+{ 2 }^{ p-2 }\quad ;\quad { a }_{ r }\quad =\quad { a }_{ 1 }
^{ { p }^{ r-1 } }\quad so\quad that\quad { a }_{ r }^{ p-1 }\quad
\equiv \quad 1\quad mod({ p }^{ r })\quad \& \quad \ncong \quad 1\quad
mod({ p }^{ r+1 })\quad ---(8)\\ Let\quad { b }_{ r }\quad =\quad 1-
{ a }_{ r }\quad \quad \quad { b }_{ r }\quad may\quad or\quad

```
may\quad not\quad be\quad =\quad { b }_{ 1 }^{ { p }^{ r-1 } }\quad \\
{ b }_{ r }\quad -\quad { a }_{ r }\quad =\quad 1-2{ a }_{ r }\quad
\equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ r })\quad for\quad r\quad =\quad
1,2,3\quad \quad --------------------(9)\\ \frac { d{ B }_{ r } }
{ d{ a }_{ r } } \quad \equiv \quad \frac { d{ K }_{ r } }{ d{ a }
_{ r } } \quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ r })\quad for\quad
r\quad =\quad 1,2,3\quad \quad \quad ----------(10)\\ As\quad f({ a }
_{ r })\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 3 })\quad for\quad r\quad
=\quad 1,2,3\quad \Phi ({ K }_{ r })\quad \equiv \quad 0\quad
mod({ p }^{ 2 })\quad ------(11)\\ { b }_{ r }^{ p-1 }\quad -\quad
{ a }_{ r }^{ p-1 }\quad \equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ r })\quad
\ncong \quad 0\quad mod=({ p }^{ r+1 })\quad 1,2,3\quad -----(12)\\
\frac { d }{ d{ a }_{ 1 } } f({ a }_{ 1 })\quad =\quad \frac { d }
{ d{ a }_{ 1 } } \left[ { B }_{ 1 }\quad \Phi ({ K }_{ 1 }) \right] \\
{ b }_{ 1 }^{ p-1 }\quad -{ a }_{ 1 }^{ p-1 }\quad =\frac { d{ B }
_{ 1 } }{ d{ a }_{ 1 } } \quad \Phi ({ K }_{ 1 })\quad +\quad { B }
_{ 1 }\quad \Phi '({ K }_{ 1 })\quad \frac { d{ K }_{ 1 } }{ d{ a }
_{ 1 } } \quad \equiv \quad 0\quad mod(p)\quad \ncong \quad 0\quad
mod({ p }^{ 2 })\\ \therefore \quad \Phi '({ K }_{ r })\quad \ncong
\quad 0\quad mod(p)\quad \quad \quad ------------(13)\\ { b }_{ 2 }
^{ p-1 }\quad -\quad { a }_{ 2 }^{ p-1 }\quad =\quad \frac { d{ B }
_{ 2 } }{ d{ a }_{ 2 } } \quad \Phi ({ K }_{ 2 })\quad +\quad { B }
_{ 2\quad  }\quad \Phi '({ K }_{ 2 })\quad \frac { d{ K }_{ 2 } }
{ d{ a }_{ 2 } } \quad \quad \therefore \\ { b }_{ 2 }^{ p-1 }\quad -
\quad { a }_{ 2 }^{ p-1 }\quad \equiv \quad { B }_{ 2\quad  }\quad
\Phi '({ K }_{ 2 })\quad \frac { d{ K }_{ 2 } }{ d{ a }_{ 2 } } \quad
mod({ p }^{ 4 })\quad hence\\ { (1-{ a }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }\quad -
\quad { ({ a }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }\quad \equiv \quad \Phi '({ K }
_{ 2 })\quad { a }_{ 2 }^{ 2 }{ b }_{ 2 }^{ 2 }\quad { (1-{ a }_{ 2 }
{ b }_{ 2 }) }^{ \frac { p-11 }{ 2 }  }(2+{ a }_{ 2 }{ b }_{ 2 })\quad
(1-2{ a }_{ 1 }^{ p })\quad mod({ p }^{ 4 })-----(13)\quad similarly\\
{ (1-{ b }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }\quad -\quad { ({ b }_{ 1 }^{ p }) }
^{ p-1 }\quad \equiv \quad \Phi '({ K }_{ 2 })\quad { a }_{ 2 }^{ 2 }
{ b }_{ 2 }^{ 2 }\quad { (1-{ a }_{ 2 }{ b }_{ 2 }) }^{ \frac { p-11 }
{ 2 }  }(2+{ a }_{ 2 }{ b }_{ 2 })\quad (1-2{ b }_{ 1 }^{ p })\quad
mod({ p }^{ 4 })\quad ----(14)\\ Adding\quad eqn\quad 13\quad and\quad
eqn\quad 14\quad gives\quad eqn\quad 15\quad \\ LHS\quad of\quad
eqn\quad 15\quad =\quad { (1-{ a }_{ 1 }^{ p }-{ b }_{ 1 }^{ p }+{ b }
_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }\quad -{ ({ b }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }\quad +
{ (1-{ b }_{ 1 }^{ p }-{ a }_{ 1 }^{ p }+{ a }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }
\quad -\quad { ({ a }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-1 }\\ \quad \quad \quad \quad
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \equiv
\quad (p-1)\quad f({ a }_{ 1 })\quad [{ ({ b }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-2 }
\quad +\quad { ({ a }_{ 1 }^{ p }) }^{ p-2 }]\quad mod({ p }^{ 6 })\\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad
\quad \quad \quad \equiv \quad (p-1)\quad f({ a }_{ 1 })\quad \frac
{ 1 }{ { a }_{ 2 }{ b }_{ 2 } } \quad mod({ p }^{ 4 })\quad
----------------(16)\\ RHS\quad of\quad eqn\quad 15\quad \equiv \quad
2\quad \Phi '({ K }_{ 2 })\quad { a }_{ 2 }^{ 2 }{ b }_{ 2 }^{ 2 }
\quad { (1-{ a }_{ 2 }{ b }_{ 2 }) }^{ \frac { p-11 }{ 2 }  }\quad
```

```
f({ a }_{ 1 })-------------(17)\quad equating\\ f({ a }_{ 1 })\quad \
{ \quad 2\quad \Phi '({ K }_{ 2 })\quad { a }_{ 2 }^{ 3 }{ b }_{ 2 }
^{ 3 }\quad { (1-{ a }_{ 2 }{ b }_{ 2 }) }^{ \frac { p-11 }{ 2 }  }(2+
{ a }_{ 2 }{ b }_{ 2 })\quad +\quad 1-p\quad \} \quad \equiv \quad
0\quad mod({ p }^{ 4 })----(18)\quad similarly\\ f({ a }_{ 2 })\quad \
{ \quad 2\quad \Phi '({ K }_{ 3 })\quad { a }_{ 3 }^{ 3 }{ b }_{ 3 }
^{ 3 }\quad { (1-{ a }_{ 3 }{ b }_{ 3 }) }^{ \frac { p-11 }{ 2 }  }(2+
{ a }_{ 3 }{ b }_{ 3 })\quad +\quad 1-p\quad \} \quad \equiv \quad
0\quad mod({ p }^{ 5 })----(19)\\ \therefore \quad f({ a }_{ 2 })\quad
\equiv \quad 0\quad mod({ p }^{ 4 })\quad ---------------\\ Hence\quad
by\quad P\quad M\quad I\quad f({ a }_{ r })\quad \equiv \quad 0\quad
mod({ p }^{ r+2 })\quad or\quad { 2 }^{ p-1 }\quad \equiv \quad 1\quad
mod({ p }^{ r })\quad for\quad all\quad values\quad of\quad r\\
This\quad is\quad possible\quad only\quad if\quad p=1\quad \\
therefore\quad { 2 }^{ p-1 }\quad \ncong \quad 1\quad mod({ p }^{ 3 })
\quad for\quad any\quad prime\quad 'p'\\ \\
----------------------------------------------------------------------
---------\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \quad \\ \\ \\ \\ \\ \\
```