ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДИНОКОМ БЕГУНЕ

КУРМЕТ СУЛТАН

АБСТРАКТ: В статье приводиться доказательство гипотезы об одиноком бегуне моделированием взаиморасположения k бегунов бегущих с разной целочисленной скоростью по кругу единичной длины, путем деления круга на k равных отрезков длиной $\Delta s = \frac{1}{k}$ и изменения времени с постоянным шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$, а также представления скоростей бегунов в виде вычетов по модулю k. Доказательство гипотезы основано на закономерностях распределения бегунов по кругу единичной длины на каждом шаге времени.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гипотеза, одинокий бегун, распределение, модуль, вычет, множество, доказательство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза об одиноком бегуне, которая сформулирована J. M. Wills при исследовании диофантовых приближений [1], имеет связи с вопросами задач непроходимости [2], хроматических чисел [3] и других задач. Название «Гипотеза об одиноком бегуне» впервые использовано в работе [4]. Гипотезе об одиноком бегуне посвящены работы многих авторов, одними из последних работ являются работы [5] и [6], однако гипотеза до настоящей работы была доказана только для частных случаев. Например, в работе [7] приводится доказательство гипотезы для семи бегунов, что являлся максимальным доказанным количеством бегунов.

Обычная формулировка задачи предполагает, что бегуны имеют скорости, выражаемые целыми числами, не делящимся на одно и то же простое число. Гипотеза утверждает, что если V - произвольный набор целых положительных чисел v, который содержит ровно k число, с наибольшим общим делителем равным 1, тогда $\exists t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad \|tv\| \geq \frac{1}{k}$, где $\|x\|$ означает расстояние от числа x до ближайшего целого.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде чем приступить к доказательству гипотезы уточним виды одиночества бегунов. Если анализировать возможные варианты одиночества, то можно выделить следующие два вида одиночества бегунов:

1) Одиночеством (минимальным) называется положение, когда рассматриваемый бегун целочисленной скоростью будет находиться от соседних бегунов расположенных спереди и сзади на расстоянии $\frac{1}{k}$;

2) Максимальным одиночеством называется положение, когда бегун целочисленной скоростью будет находиться от бегунов расположенных спереди и сзади на расстоянии больше чем $\frac{1}{k}$;

Таким образом, если будет доказано существование минимального или максимального одиночества для каждого бегуна при любом количестве бегунов, скорости которых являются целыми взаимно простыми числами, то оно будет доказательством верности гипотезы об одиноком бегуне.

Для проведения анализа распределение бегунов по кругу единичной длины и их взаиморасположения в разных моментах времени будем использовать *К-Модель,* определение которого приводится ниже.

Определение 1: Моделирование распределения и взаиморасположения бегунов, двигающихся с разной целочисленной скоростью по кругу единичной длины, в разные моменты времени с шагом времени равного $\Delta t = \frac{1}{k}$, *где* k *- общее количество бегунов, называется К-Модель.*

Примечание: Сумма всех шагов времени Δt на одном периоде движения равна 1.

Если бегуны двигаются по кругу с постоянной скоростью, то понятно, что взаиморасположения бегунов будут периодически повторяться. Поэтому для анализа важно уточнить моменты начала и конца одного периода, так как для получения необходимой информации достаточно провести анализ процесса в рамках одного периода.

Определение 2. Началом периода движения бегунов по кругу единичной длины будет считаться момент времени, когда все бегуны находятся в точке старта (нулевой метке), а концом периода будет считаться момент времени, когда бегун, у которого наименьшая скорость, совершив полный оборот по кругу, будет находиться в точке финиша (нулевой метке) со всеми другими бегунами.

Для уточнения понятия «соседние бегуны», примем следующее определение.

Определение 3. Два бегуна, находящейся непосредственно спереди и сзади рассматриваемого бегуна в момент учета времени, называется соседними бегунами.

При применении K-модели используется термин «метка».

Определение 4. Метками круга называется точки соответствующие началу и концу отрезка длиной $\Delta s = \frac{1}{mk}, m, k = 1,2,3, \dots$.

При анализе распределения бегунов по кругу единичной длины будем использовать термины «реальный» и «фиктивный» бегун, поэтому введем еще одно определение.

Определение 5. Из всех mk $(m, k = 1,2,3, \dots)$ *бегунов, бегуны в количестве* k *заданные по условию гипотезы, называются реальными бегунами, а остальные бегуны в количестве* $mk - k,$ *, называются фиктивными бегунами.*

3. КЛАССИФИКАЦИЯ СКОРОСТЕЙ

По условию гипотезы скорости k бегунов должны быть разными целыми числами. Этому условию соответствует любой набор чисел произвольно составленных из вычетов по модулю k.

В модулярной арифметике множество чисел v сравнимых по модулю k, называется классом вычетов v по модулю k, и обычно обозначается $[v]_k$, при этом любое число класса v_i называется вычетом по модулю k. Из модулярной арифметики известно, что количество классов вычетов $[v]_k$ по модулю k, которые называются классами эквивалентности, равно k.

Если скорости k бегунов образует последовательность натуральных чисел от 1 по k, то это означает, что они являются наименьшими неотрицательными вычетами своих классов вычетов по модулю k. При этом скорости всех бегунов будут равны остаткам по модулю k, за исключением одного бегуна, который имеет скорость равной модулю k и нулевой остаток.

Известно, что вычеты каждого класса вычетов образуют арифметическую прогрессию, поэтому скорости бегунов можно выразить через их остатки по модулю k,

$$v_{in} = (r_i + k \cdot n), \qquad (1)$$

где r_i – остаток скорости бегуна по модулю k; k – количество бегунов; n-множитель вычета.

Если выразить скорости бегунов в количестве k через их остатки по модулю k, то получим нижеприведенную матрицу возможных скоростей (Таблица 1).

Таблица 1. Матрица скоростей k бегунов при множителе $n \leq k$

r	***n=0***	***n=1***	***n=2***	**…**	***n=k-1***	***n=k***
1	$v_{10} = r_1$	$v_{11} = r_1 + k$	$v_{12} = r_1 + 2k$	…	$v_{1n} = r_1 + (k-1)k$	$v_{1k} = r_1 + k^2$
2	$v_{20} = r_2$	$v_{21} = r_2 + k$	$v_{22} = r_2 + 2k$	…	$v_{2n} = r_2 + (k-1)k$	$v_{2k} = r_2 + k^2$
3	$v_{30} = r_3$	$v_{31} = r_3 + k$	$v_{32} = r_3 + 2k$	…	$v_{3n} = r_3 + (k-1)k$	$v_{3k} = r_3 + k^2$
…	…	…	…	…	…	…
0(k)	$v_{k0} = r_k$	$v_{k1} = r_k + k$	$v_{k2} = r_k + 2k$	…	$v_{kn} = r_k + (k-1)k$	$v_{kk} = r_k + k^2$

Очевидно, что количество вычетов каждого класса вычетов по модулю k бесконечно, т.е. скоростей дающих равные остатки при модуле k бесконечно, поэтому в Таблице 1 показаны вычеты при множителе соответствующего условию $n \leq k$. При этом следует отметить, что по условию гипотезы количество вычетов не могут быть больше модуля, так как он равен количеству бегунов, поэтому в Таблице 1 последний столбец лишний, поскольку скорости последнего столбца при модуле k^2 дают остатки равные с остатками скоростей первого столбца.

Для упрощения анализа взаиморасположения бегунов на круге скорости бегунов классифицируем на следующие типы:

1. Скорости бегунов в количестве k являются вычетами разных классов вычетов по модулю k.

1.1. *Скорости бегунов в количестве k являются вычетами разных классов вычетов по модулю k, при этом все вычеты имеют равный множитель.*

Это означает, что при делении скоростей бегунов на количество бегунов k образуются разные остатки в количестве k, являющейся членами последовательности целых чисел от 0 по $k-1$. Например, скорости k бегунов соответствуют скоростям приведенным на одном из столбцов Таблицы 1 (за исключением последнего столбца).

Если скорости k бегунов относится к данному типу, то все они на каждом шаге времени, за исключением нулевого и последнего шага времени периода, будут находиться на разных метках круга, расстояние между которыми равно $\Delta s = \frac{1}{k}$.

1.2. *Скорости бегунов в количестве k являются вычетами разных классов вычетов по модулю k, однако имеют разные множители.*

Например, если скорости бегунов будут соответствовать скоростям расположенных на одной из диагонали Таблицы 1 (за исключением ячейки последнего столбца), то они будут относится к типу 1.2. В данном случае, также как и в п.1.1, при делении скоростей бегунов на количество бегунов образуются разные остатки в количестве k, образующие последовательность целых чисел от 0 по $k-1$.

Если скорости k бегунов относится к типу 1.2., то все они на каждом шаге времени, за исключением нулевого и последнего шага времени периода, будут находиться на разных метках круга, расстояние между которыми равно $\Delta s = \frac{1}{k}$.

Это объясняется тем, что множители классов вычетов, которым относятся скорости бегунов, не влияют на распределение бегунов по меткам круга на каждом шаге времени, главное – скорости всех бегунов должны принадлежать к разным классам вычетов.

2. Скорости бегунов в количестве k являются вычетами одного класса по модулю k.

В данном случае может быть два случая:

2.1. *Скорости бегунов в количестве k являются вычетами одного класса по модулю k, а при модуле mk, $m = 2, 3, 4, \ldots$ относится к разным классам вычетов.*

Например, если скорости бегунов будут соответствовать скоростям, приведенным на одной из строк Таблицы 1 (за исключением ячейки последнего столбца), то они будут относиться к типу 2.1.

Если скорости бегунов относятся к типу 2.1., то все бегуны в моменте времени равного $t = \frac{1}{k^2}$ будут находиться от соседних бегунов на расстоянии $\Delta s = 1/k$.

2.2. *Скорости бегунов в количестве k являются вычетами одного класса по модулю k, а при модуле mk, $m > 1$ одни относятся к разным классам вычетов, а другие относиться к вычетам одного класса.*

Например, если скорости k бегунов соответствуют скоростям приведенных на одной из строк Таблицы 1, причем включая его последний столбец, то они относятся к типу 2.1. Отметим, что в этом случае, одна ячейка строки должны быть пустым, так как, как было сказано выше, количество вычетов должна соответствовать количеству бегунов.

3. Скорости некоторых бегунов относятся к типу 1, а скорости других бегунов относятся к типу 2, т.е. третий тип скоростей является смесью типов 1 и 2.

Если ячейки, на которых расположены скорости бегунов в количестве k, произвольно разбросаны по Таблице 1, причем на строках имеются два и более ячейки со скоростями бегунов, то такие скорости могут быть примером третьего типа скоростей.

Чтобы было легче понять классификацию скоростей, приведем еще одно пояснение типов скоростей. Для этого бегуны разделим на группы.

Будем считать, что имеется m групп бегунов, в каждой группе имеется по k бегунов. Номера групп присваивается на основе множителя вычетов классов по модулю k. Например, бегуны скорости которых имеют множитель 0, относятся к группе 0, а бегуны скорости которых имеют множитель 1, относятся к группе 1, и т.д. Скорости k бегунов каждой группы соответствуют вычетам каждого класса имеющих множители от 0 по $k-1$. Получается, что в этом случае мы искусственно увеличиваем количество бегунов путем умножения на m.

При таком подходе количество бегунов будет равно mk, что противоречить условию гипотезы (количество бегунов задается, а не вычисляется), поэтому, чтобы соответствовать условию гипотезы, будем считать, что количество реальных бегунов равно k, а остальные бегуны в количестве $mk-k$ являются фиктивными бегунами.

Так вот, если некоторые бегуны из общего количестве k принадлежать к другим группам, то скорости k бегунов относятся к типу 3.

Таким образом, вышеприведенная классификация скоростей охватывает все возможные варианты скоростей для любого количества бегунов.

4. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЕГУНОВ

В результате исследования распределение бегунов двигающихся с разной целочисленной скоростью на одном направлении по кругу единичной длины и их взаиморасположения в разных моментах времени, с применением K-модели были установлены нижеследующие закономерности.

Результаты исследования распределение бегунов приведены в Приложении 1.

4.1. Закономерности распределения бегунов не зависит от их количества

Распределение любого количества бегунов по меткам круга на каждом шаге времени происходит по одной и той же схеме, т.е. закономерности распределения бегунов не зависит от их количества. Это означает, что распределение любого количества бегунов по точкам круга в определенных моментах времени происходить по одной и той же схеме. Напоминаем, что метками называются точки, соответствующие началу и концу отрезка длиной $\Delta s = \frac{1}{mk}$, поэтому если m стремиться к бесконечности ($m \to \infty$), то Δs стремиться к нулю ($\Delta s \to 0$). Отсюда следует, что при очень больших m метки сливаются и превратятся в одну точку. Таким образом, можно утверждать, что закономерности распределения бегунов не зависит от их количества.

Поскольку распределение бегунов по меткам круга единичной длины не зависит от количества бегунов, то распределение любого количества бегунов на любом шаге времени можно установить геометрическим способом.

Физическая модель распределения бегунов по кругу единичной длины на каждом шаге времени и геометрический способ составления распределения бегунов описаны в Приложении 3.

4.2. Вид распределения бегунов зависит от типа делителя

Вид распределения бегунов зависит от типа числа равного количеству бегунов (делителя):

4.2.1. Если количество бегунов равно простому числу, то бегуны могут находится в одинаковых метках круга только на нулевом и конечном шагах времени.

4.2.2. Если количество бегунов равно составному числу, то в шагах времени, которые имеют общий кратный с делителем, бегуны распределяются по точкам, количество которых равно отношению количества меток круга mk на наименьшее общее кратное между количеством шагов времени и делителем $lcd(mk, T)$. В этом случае, количество точек, на которых находятся бегуны на рассматриваемый момент времени, вычисляется по формуле

$$O_t = mk/lcd(mk, T). \quad (2)$$

4.2.3. Поскольку $O_t < mk$, то в таких моментах времени два и более бегунов будут находиться в одинаковых точках круга, без учета нулевые и конечные шаги времени. В каждой точке будут находиться бегуны, скорости которых относятся к одному классу вычетов по модулю равного O_t. Это означает, что скорости бегунов, находящихся в одной точке, отличается на число кратного O_t.

Распределение 7 и 9 бегунов по меткам круга на каждом шаге времени показаны в Таблицах 1.1 и 1.2 Приложения 1.

4.3. Распределение происходит по схеме центральной симметрии

Распределение бегунов на одном периоде движения представляет схему центральной симметрии, т.е. распределение бегунов по точкам круга на второй половине периода движения является зеркальной копией распределения бегунов на первой половине периода. Отсюда следует, что для установления одиночества бегунов достаточно провести анализ только на одной половине периода движения бегунов.

Распределение бегунов по схеме центральной симметрии по меткам круга на каждом шаге времени показаны в Таблицах 1.1 и 1.2 Приложения 1.

4.4. Расстояние между бегунами увеличивается одинаково

Если остатки скоростей бегунов по модулю равного количеству бегунов представляет непрерывную последовательность натуральных чисел, то на каждом шаге времени расстояния между всеми соседними бегунами увеличиваются одинаково, если не учитывать наложения траекторий бегунов друг на друга. Данная закономерность не требует пояснения, поскольку это очевидно.

4.5. Распределение бегунов зависит от остатка скоростей

Распределение бегунов по меткам круга единичной длины не зависит от скоростей бегунов, а зависит от величины остатка полученного в результате деления скорости бегунов на общее количество бегунов. Это объясняется тем, что при использовании K–модели бегуны, скорости которых имеют равные остатки при делении на общее количество бегунов, на каждом шаге времени будут находиться в одинаковых метках круга.

4.6. Все бегуны образуют пары

Все бегуны относительно любого выбранного бегуна образуют пары, которые на каждом шаге времени будут находиться от выбранного бегуна на одинаковом расстоянии в обе стороны от него. Если количество бегунов равно четному числу, то один бегун образует пару с выбранным бегуном, поэтому на каждом шаге времени он будет находиться с выбранным бегуном на одной точке или будет находиться на расстоянии ½.

Пояснение данной закономерности приведено в п.1.2 Приложения 1.

4.7. Расстояние от выбранного бегуна и до других бегунов образуют множество чисел, соответствующее любому бегуну

Если скорости бегунов представляет непрерывную последовательность натуральных чисел, то расстояния от любого выбранного бегуна до других бегунов на одном периоде движения меняется одинаково для всех бегунов. Другими словами, расстояния от любого рассматриваемого бегуна до других бегунов, при любом количестве бегунов k (или mk), на каждом шаге времени одного периода забега образуют множество чисел,

$$S_t = \left\{ r \in R | r = \frac{n \cdot t}{mk};\ 1 \le n \le mk;\ 1 \le t \le mk\ ; n, t, m, k \in \mathrm{N} \right\}, \qquad (3)$$

которое соответствует любому бегуну.

Если шаг времени имеет общее кратное с количеством бегунов mk, то элементы множества S_t будут повторяться, т.е. в таких моментах времени количество уникальных элементов множества будет меньше количества бегунов mk. Поэтому если убрать из множества повторяющейся элементы, то в таких моментах времени, каждому элементу множества сопоставляется два и более бегунов. В других шагах времени, каждому элементу множества S_t сопоставляется один бегун. При этом состав и последовательность элементов множества не зависит от выбранного бегуна, однако, сопоставление элементов множества S_t зависит от рассматриваемого бегуна.

Примеры множества расстоянии от рассматриваемого бегуна до других бегунов приводится п.1.3 Приложения 1.

4.8. Количество закрытых меток

С увеличением значения множителя делителя m увеличивается количество бегунов, так как появляются фиктивные бегуны, и количество меток круга, что означает детализацию минимального расстояния $\Delta s = 1/k$, необходимого для возникновения положения одиночества, на мелкие отрезки $\Delta s_m = 1/mk$, при этом $\sum \Delta s_m = \Delta s$.

Поэтому при делителе mk для того чтобы рассматриваемый бегун находился в положении одиночества два бегуна сзади и спереди его должны находиться на расстоянии $m\Delta s_m$, тогда из всех меток круга mk несколько меток будут закрытыми для одиночества. Поскольку в данном случае измеряется количество меток круга, а не расстояние между метками, то количество закрытых меток круга вычисляется по формуле

$$C = 2(m-1). \qquad (4)$$

Отметим, что количество закрытых меток круга зависит только от множителя, т.е. оно не зависит от количества бегунов k, что соответствует формуле (4).

Таким образом, если в указанных метках круга в количестве $C = 2(m-1)$ будут находиться реальные бегуны, то рассматриваемый бегун не может быть одиноким.

Примеры закрытых меток приводится п.1.3 Приложения 1.

4.9. Количество открытых меток

Тогда количество открытых меток для одиночества можно вычислить по формуле

$$L = mk - 2(m-1) - 1, \qquad (5)$$

или

$$L = m(k-2) + 1. \qquad (6)$$

В формуле (5) последняя 1 показывает метку, которая занято рассматриваемым бегуном.

Из формулы следует, что чем больше m тем больше будет L, к тому же L зависит и от k, т.е. оно в большинстве случаях увеличивается быстрее чем количество закрытых меток круга C. Например, если $k = 4$ разница L и C будет при любом m будет равен 3, а для $k = 5, 6, 7$, указанная разница с увеличением m будет увеличиваться.

Таким образом, из-за того, что при увеличении меток круга количество реальных бегунов не увеличивается, то с увеличением m повышается соотношение количества открытых меток и количества реальных бегунов.

Примеры открытых меток приводится п.1.3 Приложения 1.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ

Установлено и доказано, что распределение и взаиморасположение бегунов, обладающих разной целочисленной скоростью, стартующих одновременно с одной точки и двигающихся по кругу единичной длины в одном направлении, на каждом шаге времени происходит на основе закономерности, являющейся общей для любого количества бегунов.

Из сказанного следует, что если гипотеза будет доказано для определенного количества бегунов, то можно считать, что она является доказанным для любого количества бегунов.

5.1. Доказательство невозможности образования положения максимального одиночества.

Невозможность максимального одиночества для каждого бегуна при любом количестве бегунов легко доказывается на основе двух бегунов. Так как в данном случае любой выбранный бегун (первый или второй) не может оторваться от своих соседей, находящихся спереди и сзади, на расстоянии более чем $1/2$, так как у любого из них есть только один сосед, который одновременно является его соседом и спереди и сзади. Поэтому если расстояние от рассматриваемого бегуна до бегуна находящегося спереди будет больше $1/2$, то расстояние от рассматриваемого бегуна до бегуна находящегося сзади непременно будет меньше $1/2$, поскольку сумма расстояний должна быть равна 1.

С учетом вышеприведенного доказательства, в этой работе приводится доказательство существования положения минимального одиночества для каждого бегуна при любом количестве бегунов.

5.2. Доказательство гипотезы для первого типа скоростей

Как было сказано выше, если скорости бегунов принадлежать к разным классам вычетов по модулю k (Первый тип скоростей), то бегуны на каждом шаге времени распределяются по разным точкам круга, за исключением моментов времени соответствующих старту и финишу. Другими словами, если скорости бегунов дают разные остатки по модулю k, то существуют моменты времени, когда все бегуны будут расположены на разных точках круга, расстояние между которыми равно $\Delta s = \frac{1}{k}$.

Таким образом, можно утверждать, что если скорости бегунов относится к первому типу, то каждый из k бегунов будут находиться в положении минимального одиночества.

При этом несложно догадаться, что положение минимального одиночества для бегунов, у которых скорости относятся к типу 1, образуются, даже если скорости бегунов имеют общий делитель. Это объясняется тем, что для данного типа скоростей - главное не повторяемость остатков скоростей бегунов, а такое может быть, когда скорости бегунов имеют общий делитель.

5.3. Доказательство гипотезы для второго типа скоростей

В данном случае скорости бегунов в количестве k являются вычетами одного класса по модулю k.

Согласно классификации скоростей, в данном случае скорости бегунов при делении на количество бегунов k дают равные остатки, а при делении на km *(где* $m = 2, 3, 4 \dots, m \in \mathbb{N}$*)* дают разные остатки, причем остатки скоростей составляют арифметическую прогрессию. В этом случае бегуны на каждом шаге времени равного $\Delta t = \frac{1}{k}$ будут находиться на одинаковых точках круга.

Так как остатки скоростей бегунов в данном случае составляют арифметическую прогрессию и все бегуны стартуют с одной точки, то понятно, что расстояние между всеми бегунами будут увеличиваться одинаково. Отсюда следует, что все бегуны одновременно достигнет положения, когда расстояние между ними будут равно $\Delta s = \frac{1}{k}$. Это означает, что для данного случая непременно существует время, когда все бегуны будут находиться в положении минимального одиночества.

Отметим, что положение одиночества бегунов, скорости которых относится к данному типу 2, как было сказано выше, возникает при шаге времени равного $t = \frac{1}{k^2}$, когда все бегуны будут находиться от соседних бегунов на расстоянии $\Delta s = 1/k$.

5.4. Доказательство гипотезы для третьего типа скоростей

Для случая, когда скорости бегунов относится к типу 3, чтобы скорости бегунов давали разные остатки необходимо повысить значение делителя, т.е. для бегунов в количестве k принять делителем число равное km.

От повышения делителя закономерности распределения бегунов не меняется, просто в данном случае, будет считаться, что по кругу единичной длины будут бегать бегуны в количестве km, скорости которых относятся к типу 1. Из этого количества реальными являются только k бегуны.

Как было сказано в п.4 в модели все бегуны в количестве k относительно любого выбранного бегуна образуют пары. Бегуны любой пары на каждом шаге времени находятся на одинаковом расстоянии в обе стороны от рассматриваемого бегуна. При этом доказано, что расстояния от рассматриваемого бегуна до других бегунов на каждом шаге времени одного периода забега образуют множество чисел

$$S_t = \left\{ r \in R | r = \frac{n \cdot t}{mk};\ 1 \le n \le mk;\ 1 \le t \le mk\ ; n, t, m, k \in \mathrm{N} \right\}.$$

которое относится к любому бегуну.

Отсюда следует, что если у любого одного бегуна из числа mk имеется момент времени, когда он будет находится в одиночестве, т.е. на расстоянии $s \ge \frac{1}{k}$ от соседних бегунов спереди и сзади, такие моменты времени непременно возникает у других бегунов.

На основе вышесказанного можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть группа бегунов в количестве k являются произвольно отобранной частью бегунов в количестве km $(m = 1, 2, 3, \dots)$, стартующих одновременно и бегающих в одном направлении по кругу единичной длины, скорости которых образуют последовательность натуральных чисел, тогда, если для одного из группы k бегунов существует время, когда он будет находиться от соседних бегунов спереди и сзади на расстоянии $\Delta s = \frac{1}{k}$, то такое время непременно существует для каждого бегуна группы.

Доказательство 1.

Для доказательства Теоремы 1 воспользуемся закономерностями 4.7, 4.8 и 4.9. Как было описано в закономерности 4, количество открытых меток круга увеличивается с увеличением множителя m, когда количество бегунов является постоянным. Отсюда следует, с увеличением m повышается соотношение количества открытых меток и количества реальных бегунов L/k.

Это означает, что рано или поздно все реальные бегуны в количестве k попадут в открытые метки. Этому также способствует увеличение количества шагов времени и симметричное изменение местоположения закрытых меток на каждом шаге времени.

Из вышесказанного следует, что любой рассматриваемый бегун, из числа бегунов, скорости которых относятся к типу 3, будет находиться в положении одиночества на определенном шаге времени.

Следует отметить, что вышесказанное относится к шагам времени, которые не имеют общего кратного с количеством меток mk. Если шаг времени и mk имеют общего кратного, то бегуны будут группироваться, т.е. рассматриваемый бегун будет находиться в одной точке с другим бегуном. Количество таких точек вычисляется по формуле (2). В этом случае рассматриваемый бегун будет находиться в одиночестве только в случае, если его соседом в одной точке будет фиктивный бегун.

Доказательство 2.

Для убедительности ниже приводиться еще одно доказательство.

Чтобы доказать одиночества любого одного из заданного k бегунов, скорости которых относится к типу 3, умножим k на m, т.е. искусственно увеличим количество бегунов. Далее, из всех бегунов в количестве mk выберем группу бегунов в количестве k так, что их скорости или остатки их скоростей по модулю k составляли арифметическую прогрессию с шагом 1, тогда скорости бегунов этой группы будут относится к типу 1. При этом группу необходимо выбрать так, что рассматриваемый бегун входил в состав этой группы. В этом случае все k бегуны группы, включая рассматриваемого бегуна, в момент времени $t = \frac{1}{k}$ будут находиться от соседних бегунов на расстоянии $\Delta s = \frac{1}{k}$, т.е. все они будут находиться в одиночестве. Это доказано в п.5.2.

Далее группу бегунов состоящих из k бегунов выберем так, что скорости бегунов будут относится к типу 2, т.е. выберем бегунов группы так, что шаг между скоростями бегунов группы (или остатками скоростей по модулю mk) будет равно m. При этом нужно следить, что рассматриваемый бегун входил в состав данной группы. Очевидно, что из любого количества бегунов mk можно выбрать k бегунов так, что скорость любого рассматриваемого бегуна будет относится к типу 2.

В этом случае все бегуны группы, включая рассматриваемого бегуна, на момент времени $t = \frac{1}{mk}$ будут находиться от соседних бегунов на расстоянии $\Delta s = \frac{1}{k}$, т.е. все они будут находиться в одиночестве.

Таким образом, любой бегун из числа mk бегунов в составе группы бегунов, скорости которых относятся к типам 1 и 2 может находиться от соседних бегунов спереди и сзади на расстоянии $\Delta s = \frac{1}{k}$, т.е. в одиночестве. Отсюда можно сделать следующее заключение.

Как было показано в п.4, множество чисел, соответствующее расстоянию от рассматриваемого бегуна до других бегунов соответствует любому бегуну из числа mk, поэтому если выбранный бегун может находиться в одиночестве в составе группы бегунов в количестве k, образованных из бегунов к количестве mk по определенному принципу, то он может находиться в одиночестве и в составе любой произвольно составленной группы бегунов в количестве k из общего количества бегунов mk.

Таким образом, доказано, что если V - произвольный набор целых положительных чисел v, который содержит ровно k число, тогда $\exists t \in \mathbb{R}\ \forall v \in V \quad \|tv\| = \frac{1}{k}$, т.е. доказано верность гипотезы об одиноком бегуне.

Ссылки

1. J. M. Wills, *Zwei Sazte uber inhomogene diophantische Approximation von Irrationalzahlen,* Monatsch. Math. 71 (1967), 263-269.

2. Y. G. Chen, *View-obstruction problems in n-dimensional Euclidean space and a generalization of them,* Acta Math. Sinica 37 (1994), no. 4, 551–562.

3. J. Barajas, O. Serra, *On the chromatic number of circulant graphs,* Discrete Math. 309 (2009), 5687–5696.

4. W. Bienia, L. Goddyn, P. Gvozdjak, A. Sebo, M. Tarsi, *Flows, view obstructions and the lonely runner,* J. Combin. Theory Ser. B 72 (1998), 1–9.

5. G. Perarnau, O. Serra, *Correlation among runners and some results on the lonely runner conjecture,* Electron. J. Combin. 23 (2016), no. 1, Paper 1.50, 22 pp.

6. T. Tao. *Some Remarks on the Lonely Runner Conjecture*, ArXiv:1701.02048v1 [math.CO] 9 Jan 2017.

7. J. Barajas, O. Serra, *The lonely runner with seven runners,* Electron. J. Combin. 15 (2008), R48, 18 pp.