La conjecture d'Erdös-Straus

A.Balan

28 juillet 2017

Résumé

Le cas difficile de la conjecture est abordé dans ce papier ; la conjecture est vérifiée si p n'est pas un nombre premier jumeau.

1 Enoncé de la conjecture

Pour tout nombre entier, $n \geq 2$, il existe des entiers positifs a,b,c tels que :

$$4/n = 1/a + 1/b + 1/c$$

Pour 4 divise $n+1$, on a la solution :

$$a = n(n+1)/4,\ b = c = (n+1)/2$$

On peut choisir $n = p$ premier. (voir [G] p.159)

2 Le cas 4 divise $p+1$

Une solution est donnée par :

$$a = p(p+1)/4\ ;\ b = c = (p+1)/2$$

3 Le cas 4 divise $p-1$

On a $a = pa'$,

$$(4a' - 1)bc = pa'(b+c)$$

$4a' - 1 = kp$, $k = -1\, mod(4)$

$$4k/(pk+1) = 1/b + 1/c$$

$pk + 1 = 4nm$

$$kbc = nm(b+c)$$

quitte à multiplier b,c par k :

$$1/(nm) = 1/(kb) + 1/(kc)$$

$$1/(nm) = 1/[n(n+1)m] + 1/[(n+1)m]$$

Il faut donc trouver n diviseur de $(kp + 1)/4$ et congru à -1 modulo k (qui est -1 modulo 4).

$$kp + 1 = (kx - 1)(ky - 1)$$

$$p = kxy - x - y$$

$$p + y = (ky - 1)x$$

$y = 2$

$$p + 2 = (2k - 1)x$$

ce qui est le cas si p n'est pas un nombre premier jumeau. En effet, $p + 2$ est -1 modulo 4 et $2k - 1$ est 1 modulo 4.

Références

[G] R.Guy, "Unsolved Problems in Number Theory", 2nd edition, vol.1, Springer, Berlin, 1994.