Совершенный кубоид невозможен

Саенко В.И.

Почтовый адрес: 73026, Украина г. Херсон, ул. Привокзальная 12, кв. 71, E-mail: saenkovis@gmail.com

Памяти моей жены Бендебери О.И.,
инициатора и вдохновителя этой работы.

Аннотация

Приведено краткое доказательство невозможности совершенного кубоида.

Ключевые слова: Совершенный кубоид, рациональный кубоид, целочисленный кубоид, целочисленный кирпич.

1 Введение

Задача о совершенном кубоиде [1] близка задаче Пифагора как по смыслу, так и по возрасту, но до сих пор не решена. Ее возможная формулировка: Существует ли прямоугольный параллелепипед, длины всех ребер и диагоналей которого выражаются натуральными числами? Иными словами, это задача о существовании натуральных A, B, C, D, E, F и G, удовлетворяющих системе диофантовых уравнений

$$\begin{array}{l} G^2 = A^2 + B^2 + C^2 \\ D^2 = A^2 + B^2 \\ E^2 = A^2 + C^2 \\ F^2 = B^2 + C^2 \end{array} \tag{1}$$

Следствем системы (1) есть система

$$\begin{array}{l} G^2 = A^2 + F^2 \\ G^2 = B^2 + E^2 \\ G^2 = C^2 + D^2 \end{array} \tag{2}$$

Предположим что задача имеет решение. Тогда, без потери общности, можно ограничиться взаимно простыми $(A, B, C) = 1$ с нечетным (A) и четными (B, C). В общем случае Пифагоровы тройки системы (2) не примитивны и их можно представить как

$$\begin{array}{l} G = (L_1^2 + L_2^2)G_l = (M_1^2 + M_2^2)G_m = (N_1^2 + N_2^2)G_n \\ A = (L_1^2 - L_2^2)G_l, F = 2L_1L_2G_l \\ E = (M_1^2 - M_2^2)G_m, B = 2M_1M_2G_m \\ D = (N_1^2 - N_2^2)G_n, C = 2N_1N_2G_n \end{array} \tag{3}$$

где (G_l, G_m, G_n) имеют вид $Q_1^2 + Q_2^2$ и в каждой паре $(X_1, X_2), (X \in \{L, M, N, Q\})$ числа взаимно просты и разной четности.
Если совершенный кубоид существует, то подстановка (3) в систему (1) обращает каждое ее уравнение в тождество. В частности, для четвертого уравнения получим $L_1^2 L_2^2 G_l^2 = M_1^2 M_2^2 G_m^2 + N_1^2 N_2^2 G_n^2$

2 Лемма

Система

$$\begin{aligned} &(L_1^2 + L_2^2)G_l = (M_1^2 + M_2^2)G_m \\ &(L_1^2 + L_2^2)G_l = (N_1^2 + N_2^2)G_n \\ &L_1^2 L_2^2 G_l^2 = M_1^2 M_2^2 G_m^2 + N_1^2 N_2^2 G_n^2 \end{aligned} \tag{4}$$

не разрешима в целых числах

2.1 Доказательство

Используя замену $X_1^2 + X_2^2 = X^2(1 + x^2)$ с $(X = X_1, x = X_2/X_1)$ или $(X = X_2, x = X_1/X_2)$, $(X \in \{L, M, N\})$, перепишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned} &(1 + l^2)L^2 G_l = (1 + m^2)M^2 G_m \\ &(1 + l^2)L^2 G_l = (1 + n^2)N^2 G_n \\ &L^2 l^2 G_l^2 = M^2 m^2 G_m^2 + N^2 n^2 G_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Исключая в системе (5) (n, m) получим

$$l^2 = \frac{L^2(G_n G_l + G_m G_l) - N^2 G_n^2 - M^2 G_m^2}{L^2 G_l (G_l - G_m - G_n)} \tag{6}$$

Выбирая в (5) и (6) L четным, а M, N не четными и учитывая то что все остальные величины в правой части представимы в виле $4K + 1$, получим

$$l^2 = \frac{2I + 1}{2^{2t-1}(2J + 1)} \tag{7}$$

Лемма доказана

3 Выводы

Целочисленные решения системы (2)несовместны с четвертым уравненением (1). Совершенный кубоид невозможен.

Список литературы

[1] Richard K.Guy Unsolved Problems in Number Theory, V.2, Springer-Verlag, New York, 1994.