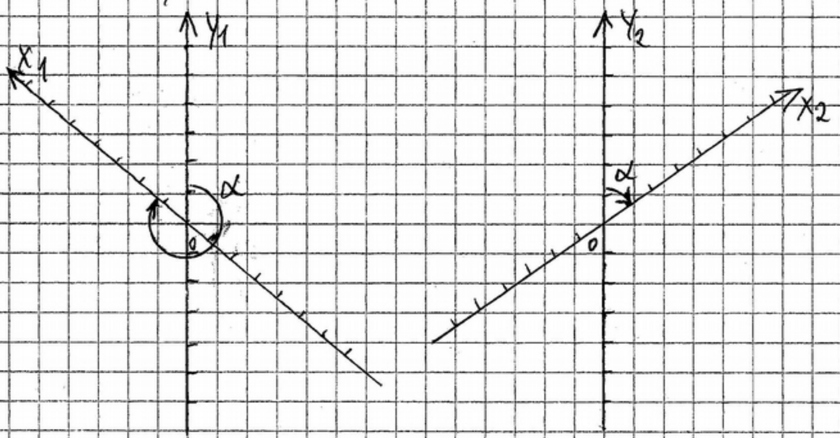
UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH O ZMIENNYM KĄCIE OSI OX WZGLĘDEM OSI OY

UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH O ZMIENNYM KĄCIE OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1 NAZYWAMY TAKI UKŁAD, W KTÓRYM OŚ OX_1 PRZECINA OŚ OY_1 POD DOWOLNYM KĄTEM α ZAWARTYM MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1
OŚ OY_1 MA STAŁY ZWROT I KIERUNEK I JEST PUNKTEM ODNIESIENIA DLA WSZYSTKICH UKŁADÓW WSPÓŁRZĘDNYCH TEGO TYPU.



I WIELKOŚCI LICZBOWE WSPÓŁRZĘDNYCH x_1 i y_1 W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1 BĘDĄ WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM:

$x = x_1 \sin\alpha \qquad y = y_1$

x, y – dowolne liczby

x_1, y_1 – wartości liczbowe w układzie OX_1Y_1 liczb x i y

$\sphericalangle\alpha$ – kąt zawarty między OY_1 a OX_1

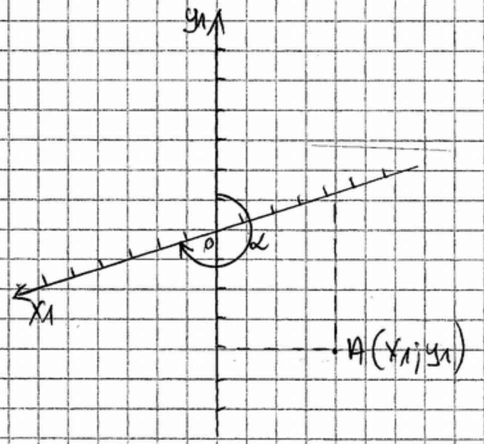
II PUNKT W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O ZMIENNYM KĄCIE OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1

DOWOLNY PUNKT $A(x, y)$ OPISANY RÓWNANIEM $y = ax$ W UKŁADZIE OX_1Y_1 BĘDZIE OPISANY RÓWNANIEM:

$$y_1 = a x_1 \sin\alpha$$

ponieważ $x = x_1 \sin\alpha$, $y = y_1$ $\wedge$ $y = ax$

to $y_1 = a x_1 \sin\alpha$



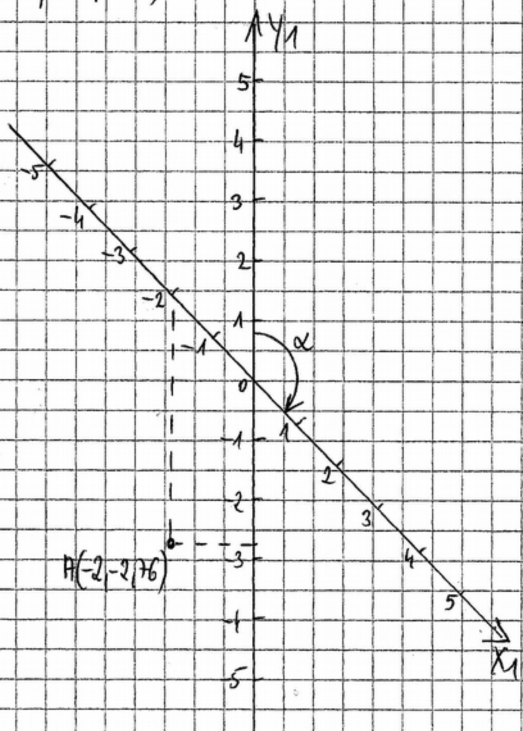
PRZYKŁAD:
OBLICZ WSPÓŁRZĘDNĄ Y_1 JEŚLI KĄT α ZAWARTY MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OSIĄ OX_1 WYNOSI 136°, SKALA $a = 2$, WSPÓŁRZĘDNA $x_1 = -2$

$$y_1 = a x_1 \sin\alpha$$

$$y_1 = 2 \cdot (-2) \cdot \sin 136^\circ$$

$$y_1 = -2{,}76$$

$A(-2; -2{,}76)$



III. PRZENIESIENIE DOWOLNEGO PUNKTU $A(x_1, y_1)$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α_1 MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE α_2 MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OSIĄ OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM: (3)

$$x_2 = x_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

ponieważ

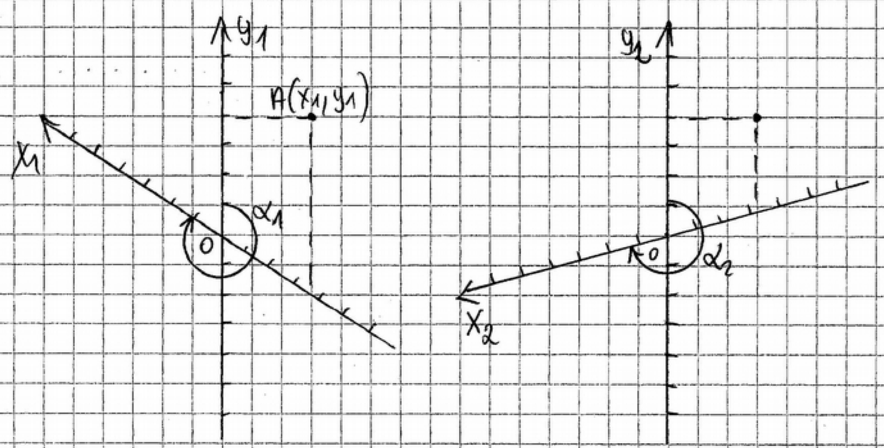
jeśli $y_1 = a x_1 \sin\alpha_1$

i $y_2 = a x_2 \sin\alpha_2$

oraz $y_1 = y$

to $a x_1 \sin\alpha_1 = a x_2 \sin\alpha_2$

$$x_2 = x_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$



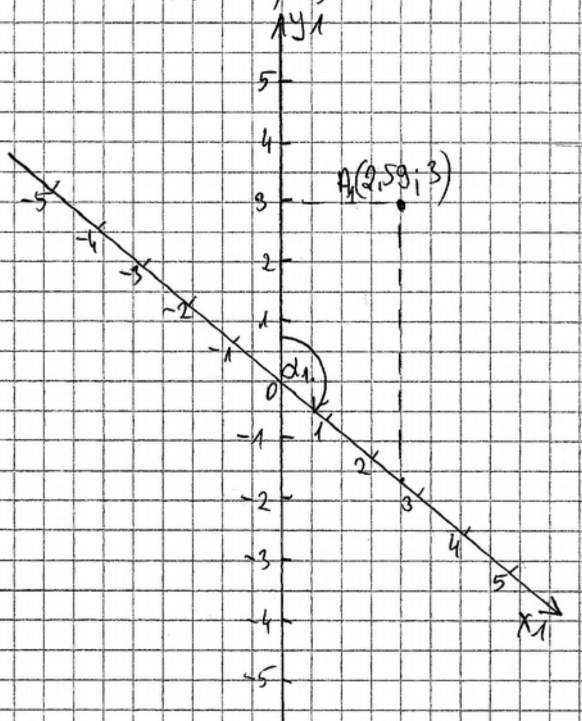
PRZYKŁAD:
MAJĄC DWIE DOWOLNE LICZBY $x=2$ i $y=3$ PRZENIEŚ JE DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE $\alpha_1 = 130°$ MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1, A NASTĘPNIE PRZENIEŚ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE $\alpha_2 = 210°$ MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OX_2

1. PUNKT $A(2,3)$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1

$y = y_1$ $\qquad x = x_1 \cdot \sin\alpha_1$

$y_1 = 3$ $\qquad x_1 = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 130°} = \frac{2}{0{,}77} = 2{,}59$

$A_1(2,59;\,3)$

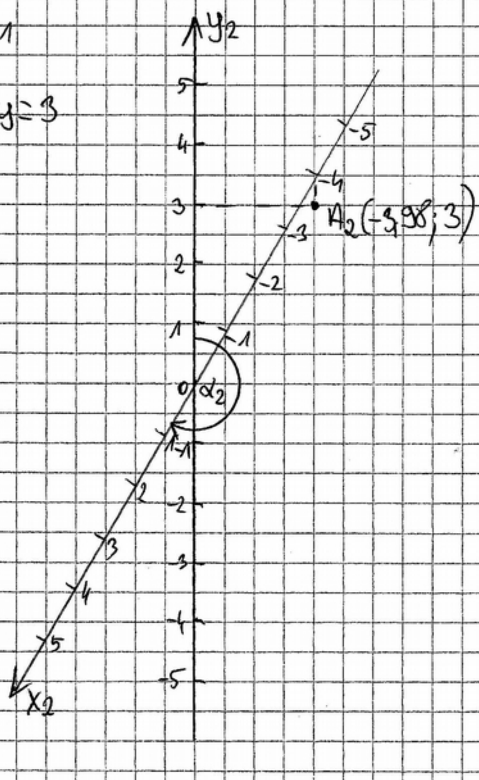


2. PUNKT $A(2,59;\,3)$ PRZENIESIONY DO UKŁ. WSPÓŁ. OX_2Y_2

$$X_2 = X_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \qquad y_2 = y_1$$

$$X_2 = 2,59 \frac{\sin 130^\circ}{\sin 210^\circ} = -3,98 \qquad y = 3$$

$A_2(-3,98;\,3)$



IV. FUNKCJA LINIOWA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1

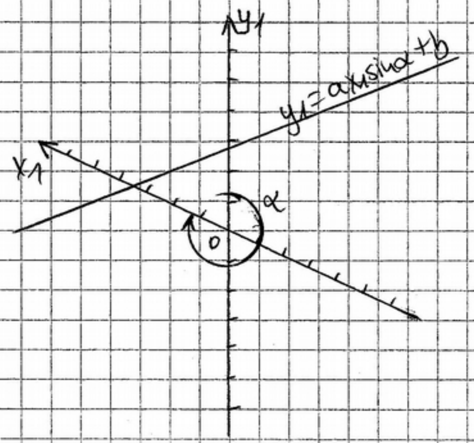
FUNKCJA LINIOWA $y=ax+b$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1 WYRAŻA SIĘ WZOREM

$$y_1 = ax\sin\alpha + b$$

ponieważ:

$$y=ax+b \wedge y=y_1 \wedge x=x_1\sin\alpha$$

to $\quad y_1 = ax_1\sin\alpha + b$



PRZYKŁAD:

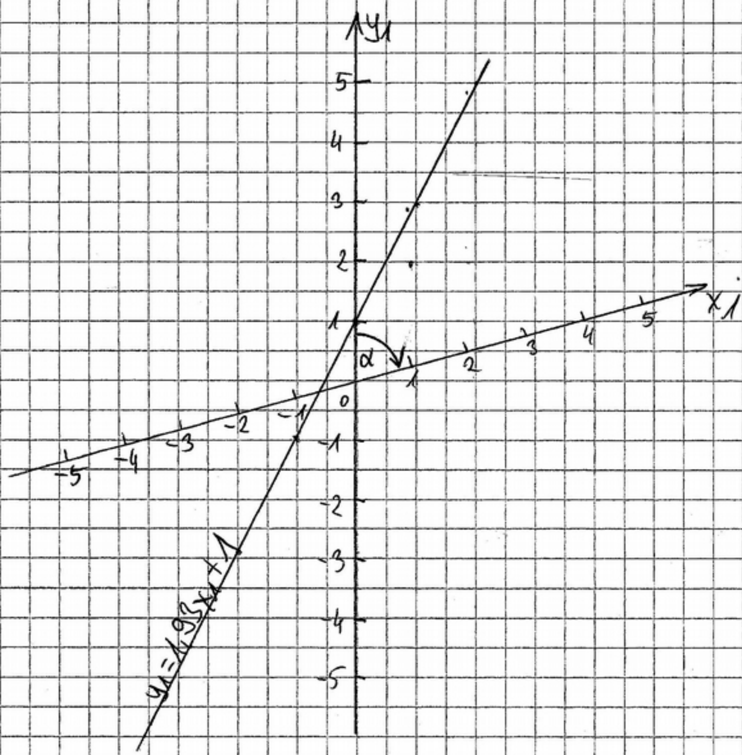
NARYSUJ PROSTĄ BĘDĄCĄ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI LINIOWEJ OGÓLNEJ $y=2x+1$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE $\alpha=75°$ MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1

$$y=2x+1 \wedge y=y_1 \quad x=x_1\cdot\sin\alpha$$

$$y_1 = 2x_1\cdot\sin 75° + 1$$

$$y_1 = 1{,}93x_1 + 1$$

⑥



V. PRZENIESIENIE PROSTEJ BĘDĄCEJ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI LINIOWEJ $y_1 = ax_1\sin\alpha_1 + b$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE α_1 MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OSIĄ OX_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE α_2 MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM

$$X_2 = X_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

Ponieważ:

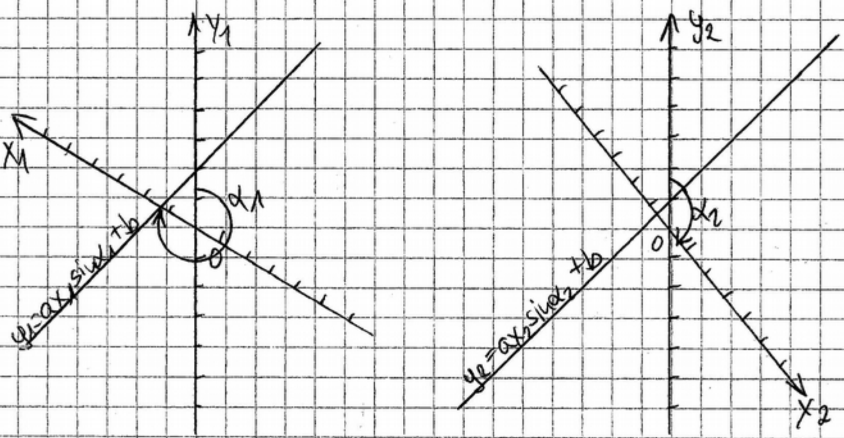
$$y_1 = ax_1\sin\alpha_1 + b$$

$$y_2 = ax_2\sin\alpha_2 + b$$

$$\wedge \; y_1 = y_2$$

to $ax_2\sin\alpha_2 = ax_1\sin\alpha_1$

$$X_2 = X_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$



PRZYKŁAD:

PRZENIEŚ WYKRES FUNKCJI LINIOWEJ $y_1 = 2x_1\sin 312° + 3$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE $\alpha_1 = 312°$ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE $\alpha_2 = 73°$

$$X_2 = X_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

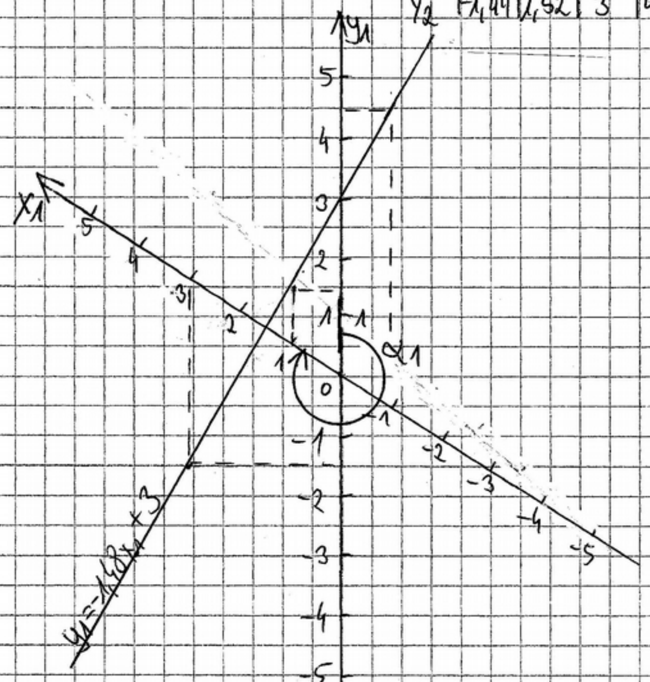
$$X_2 = X_1 \frac{-0{,}74}{0{,}96} \qquad X_2 = -0{,}77X_1$$

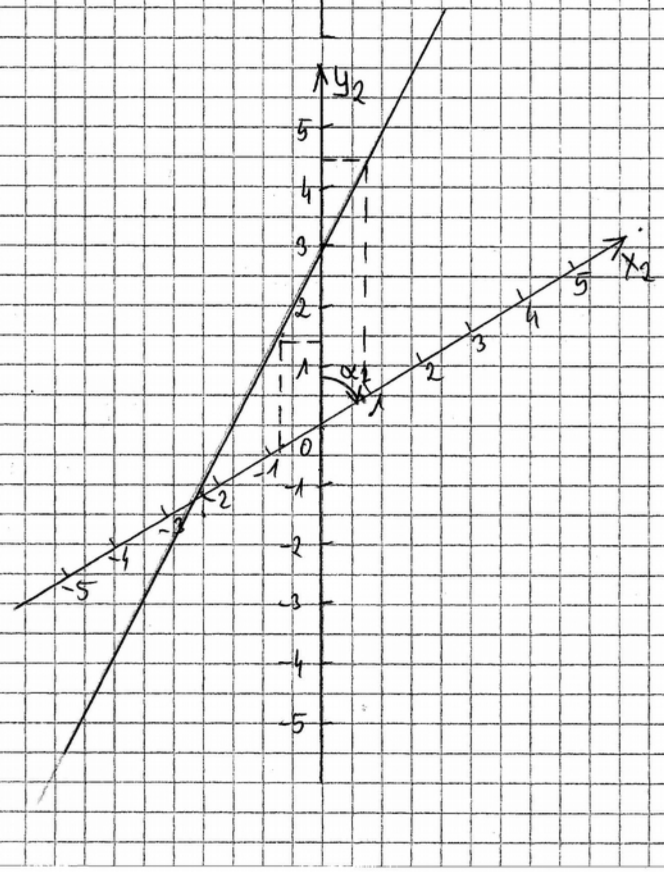
$y_1 = 2x_1 \sin 312^\circ + 3$

$y_1 = -1{,}48\,x_1 + 3$

x_1	3	1	0	-1
y_1	-1,44	1,52	3	4,48
x_2	-2,31	-0,77	0	0,77
y_2	-1,44	1,52	3	4,48

⑧





VI. PUNKT WSPÓLNY DWÓCH RÓŻNYCH FUNKCJI LINIOWYCH. FUNKCJI $y_1 = a_1 x_1 \sin\alpha_1 + b_1$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE α_1 MIĘDZY OSIĄ OY_1 A OX_1 I FUNKCJI $y_2 = a_2 x_2 \sin\alpha_2 + b_2$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 I KĄCIE α_2 MIĘDZY OSIĄ OY_2 A OX_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM:

1. DLA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNY OX_1Y_1

$$X_1 = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_1(a_1 - a_2)} \qquad y_1 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$$

2. DLA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2

$$X_2 = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_2(a_1 - a_2)} \qquad y_2 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$$

ponieważ:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 \sin\alpha_1 + b_1 \\ y_2 = a_2 x_2 \sin\alpha_2 + b_2 \end{cases} \wedge\ y_1 = y_2 \ \wedge\ x_1 \sin\alpha_1 = x_2 \sin\alpha_2$$

to

$$a_1 x_1 \sin\alpha_1 + b_1 = a_2 x_1 \sin\alpha_1 + b_2$$

$$a_1 x_1 \sin\alpha_1 - a_2 x_1 \sin\alpha_1 = b_2 - b_1$$

$$X_1 = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_1(a_1 - a_2)} \quad \text{a dla} \quad X_2 = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_2(a_1 - a_2)}$$

oraz:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 \sin\alpha_1 + b_1 \\ y_2 = a_2 x_2 \sin\alpha_2 + b_2 \end{cases} \wedge\ y_1 = y_2 \ \wedge\ x_1 \sin\alpha_1 = x_2 \sin\alpha_2$$

to

$$x_1 = \frac{y_1 - b_1}{a_1}$$

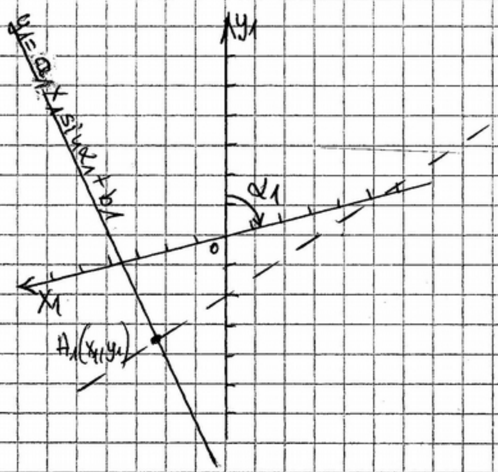
$$x_1 = \frac{y_1 - b_2}{a_2}$$

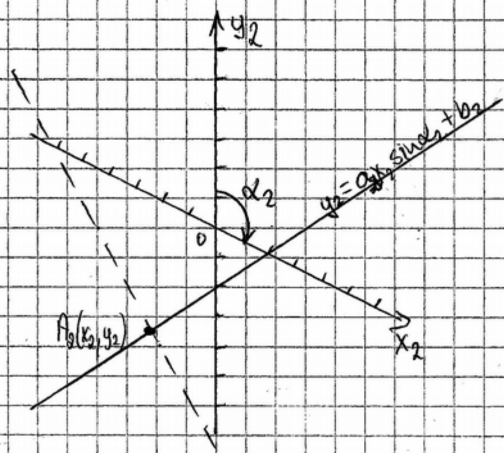
$$\frac{y_1 - b_1}{a_1} = \frac{y_1 - b_2}{a_2}$$

$$a_2 y_1 - a_2 b_1 = a_1 y_1 - a_1 b_2$$

$$y_1(a_2 - a_1) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$y_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2 - a_1}$$





PRZYKŁAD!

OBLICZ I ZAZNACZ W UKŁADACH WSPÓŁRZĘDNYCH PUNKT WSPÓLNY DLA FUNKCJI LINIOWYCH:

$y_1 = 2x_1 \sin\alpha\, 142° + 3$ dla ukł. współrz. OX_1Y_1 i $\alpha = 142°$

$y_2 = -4x_2 \sin 66° - 2$ dla ukł. współrz. OX_2Y_2 i $\alpha = 66°$

$y_1 = 1{,}24x_1 + 3$

$y_2 = -3{,}64x_2 - 2$

WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU $A_1(x_1, y_1)$

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_1(a_1 - a_2)} \qquad y_1 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$$

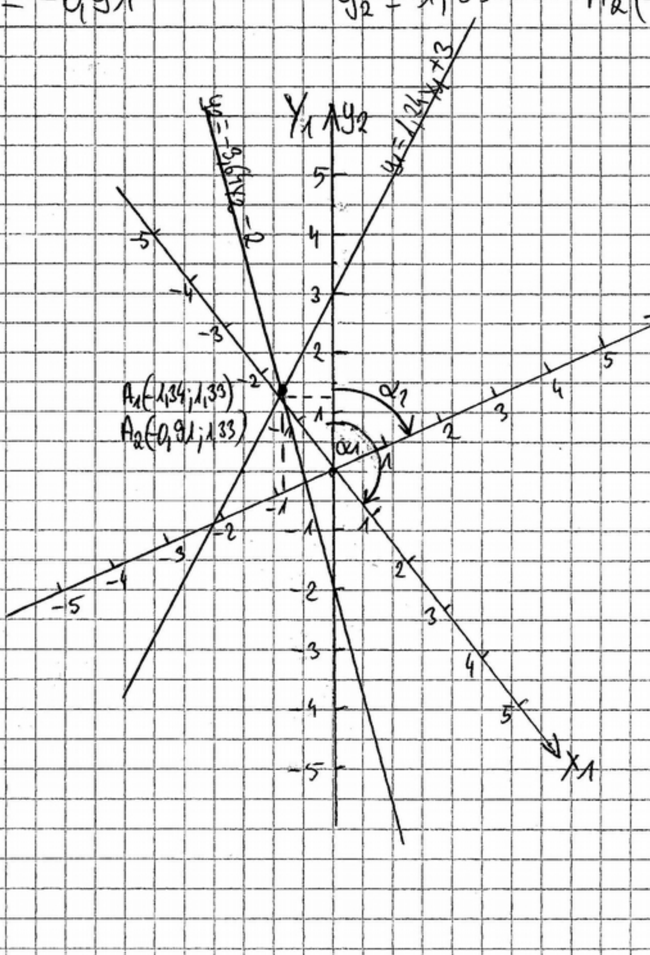
$$x_1 = \frac{-2-3}{0{,}62(2+4)} \qquad y_1 = \frac{-4\cdot 3 - 2(-2)}{-4-2}$$

$$x_1 = -1{,}34 \qquad y_1 = 1{,}33 \qquad A_1(1{,}34; 1{,}33)$$

WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU $A_2(x_2, y_2)$

$$x_2 = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_2(a_1 - a_2)} \qquad y_2 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$$

$$x_2 = -0{,}91 \qquad y_2 = 1{,}33 \qquad A_2(-0{,}91; 1{,}33)$$



VII. FUNKCJA KWADRATOWA $y=ax^2+bx+c$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYM OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1 (12)

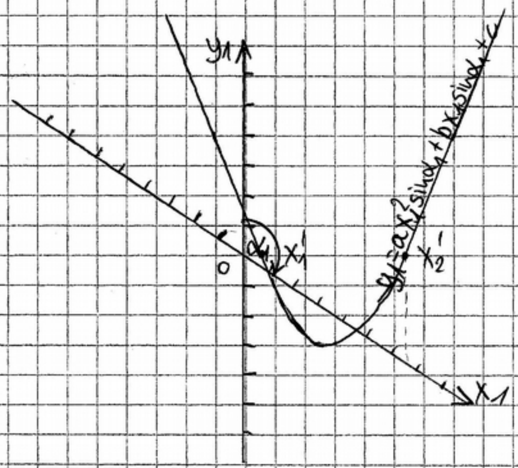
FUNKCJA KWADRATOWA $y=ax^2+bx+c$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α_1 OSI OX_1 WZGLĘDEM OSI OY_1 WYRAŻA SIĘ WZOREM

$$y_1 = ax_1^2\sin^2\alpha_1 + bx_1\sin\alpha_1 + c$$

ponieważ

$$y=ax^2+bx+c \ \wedge\ y=y_1 \ \wedge\ x=x_1\cdot\sin\alpha_1$$

to $\quad y_1=ax_1^2\sin^2\alpha_1 + bx_1\sin\alpha_1 + c$



1. WYRÓŻNIK FUNKCJI

$$\Delta = b^2-4ac$$

2. MIEJSCA ZEROWE x_1', x_2'

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \ \wedge\ x_1=x_1'\cdot\sin\alpha_1$$

to $\boxed{x_1'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a\cdot\sin\alpha_1}}$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2=x_2'\sin\alpha_1$$

to

$\boxed{x_2'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a\sin\alpha_1}}$

3. WIERZCHOŁEK FUNKCJI p_1, q_1

ponieważ $p = \frac{-b}{2a} \wedge p = p_1 \sin\alpha_1$

to $\boxed{p_1 = \frac{-b}{2a\sin\alpha_1}}$

ponieważ $q_1 = q_1$

to $\boxed{q_1 = \frac{-\Delta}{4a}}$

PRZYKŁAD:

NARYSUJ PARABOLĘ BĘDĄCĄ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI KWADRATOWEJ $y = x^2 - 4x + 3$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄCIE MIĘDZY OY_1 A OX_1 $\alpha_1 = 40°$

jeśli $y = x^2 - 4x + 3 \wedge \alpha_1 = 40$

to $y_1 = x_1^2 \sin^2\alpha_1 - 4x_1 \sin\alpha_1 + 3$

$y_1 = 0{,}4x_1^2 - 2{,}56x_1 + 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = \underline{4}$

$x_1' = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{2a \cdot \sin\alpha_1} = \frac{2}{1{,}28} = 1{,}56$

$x_2' = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{2a \cdot \sin\alpha_1} = \frac{6}{1{,}28} = 4{,}69$

$p_1 = \frac{-b}{2a\sin\alpha_1} = \frac{4}{1{,}28} = 3{,}12$

$q_1 = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4} = -1$

14