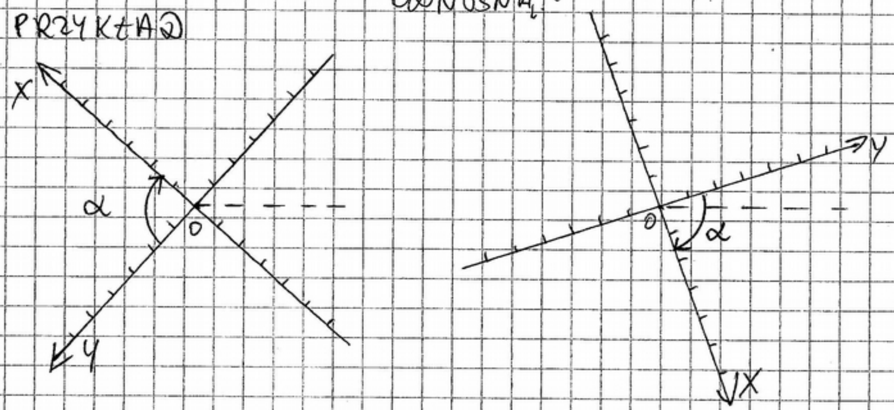
UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH OXY O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX I OY

UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH OXY O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX I OY NAZYWAMY TAKI UKŁAD, W KTÓRYM OSIE OX I OY PRZECINAJĄ SIĘ POD DOWOLNYM KĄTEM α. PUNKTEM ODNIESIENIA JEST PÓŁPROSTA WYCHODZĄCA Z PUNKTU PRZECIĘCIA OSI I POKRYWA SIĘ Z PÓŁOSIĄ OX DODATNIĄ UKŁADU PROSTOKĄTNEGO. NAZYWANA ODNOSNĄ.

PRZYKŁAD



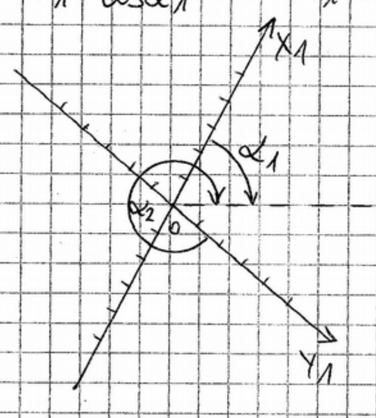
I WARTOŚĆ WSPÓŁRZĘDNYCH X_1 Y_1 W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYM OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α MIĘDZY OSIAMI OX_1 I OY_1

$$X_1 = \frac{X}{\cos\alpha_1} \qquad Y_1 = \frac{Y}{\sin\alpha_2}$$

X, Y - DOWOLNE WARTOŚCI LICZBOWE

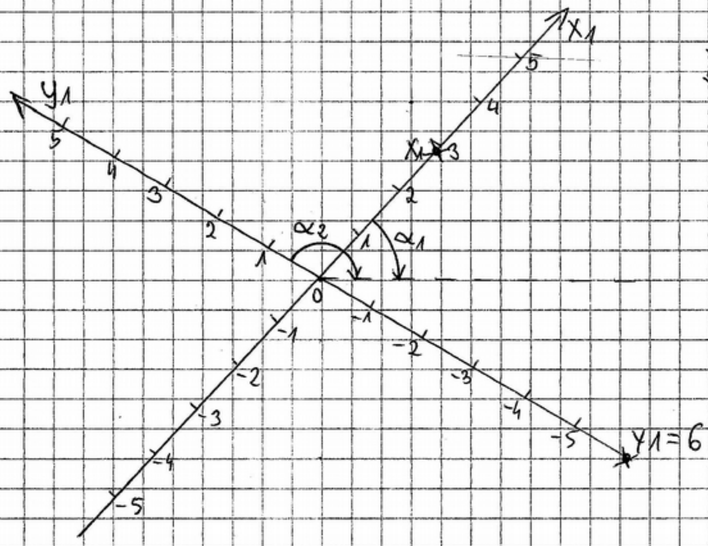
$\sphericalangle\alpha_1$ - kąt zawarty między dodatnią półosią OX_1 a półprostą

$\sphericalangle\alpha_2$ - kąt zawarty między dodatnią półosią OY_1 a półprostą



PRZYKŁAD

OBLICZ WARTOŚCI X_1 I Y_1 JEŚLI $X=2$ A $Y=-3$ oraz $\alpha_1=48^\circ$, $\alpha_2=150^\circ$ ORAZ ZAZNACZ NA OSIACH



$X=2$

$Y=-3$

$$X_1=\frac{2}{\cos 48^\circ}=2{,}98$$

$$Y_1=\frac{-3}{\sin 150^\circ}=-6$$

II PUNKT W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α MIĘDZY OSIAMI OX_1 I OY_1

DOWOLNY PUNKT $A(X,Y)$ OPISANY RÓWNANIEM $y=aX$, W TYM UKŁADZIE BĘDZIE OPISANY RÓWNANIEM

$$y_1=\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2}\,a x_1$$

bo

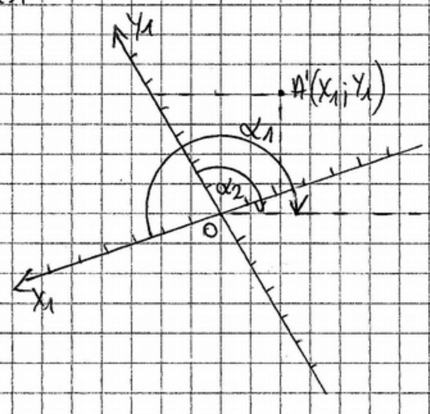
$$y=ax \wedge y=y_1\cdot\sin\alpha_2 \wedge x=x_1\cdot\cos\alpha_1$$

to

$$y_1\cdot\sin\alpha_2=a x_1\cdot\cos\alpha_1$$

$$y_1=\frac{a x_1\cdot\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}$$

$$y_1=\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}\cdot a x_1$$



PRZYKŁAD:

WYZNACZ WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU A (X_1, Y_1) W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE α ORAZ KĄCIE MIĘDZY OSIĄ OX_1 A PÓŁPROSTĄ $\alpha_1 = 150^\circ$ I KĄCIE MIĘDZY OSIĄ OY_1 A PÓŁPROSTĄ $\alpha_2 = 242^\circ$ JEŚLI PUNKT TEN OPISANY JEST RÓWNANIEM

$$y_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot a \cdot x_1 \quad \wedge \quad a = 1{,}5 \quad i \quad x = -2$$

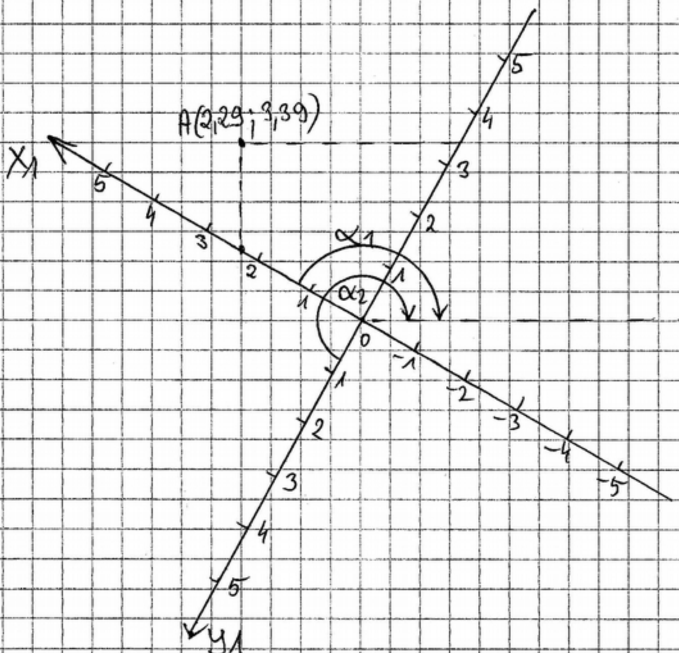
1. WYZNACZAMY WSPÓŁRZĘDNĄ X_1

$$X_1 = \frac{X}{\cos\alpha_1} = \frac{-2}{\cos 150^\circ} = \frac{-2}{-0{,}87} = \underline{\underline{2{,}29}}$$

2. WYZNACZAMY WSPÓŁRZĘDNĄ Y_1

$$y_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot a \cdot x_1 = \frac{\cos 150^\circ}{\sin 242^\circ} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}29 = \frac{-0{,}87}{-0{,}88} \cdot 3{,}43 = \underline{\underline{3{,}39}}$$

WSPÓŁRZĘDNA A $(2{,}29; 3{,}39)$



III PRZENIESIENIE DOWOLNEGO PUNKTU Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIĄ OX_1 A OY_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 Z DOWOLNYM KĄTEM MIĘDZY OSIĄ OX_2 A OY_2

1. DOWOLNE WARTOŚCI X I Y W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 PRZYJMĄ WARTOŚĆ

$$X = X_1 \cdot \cos\alpha_1 \wedge Y = Y_1 \cdot \sin\alpha_2$$

A W UKŁADZIE OX_2Y_2:

$$X = X_2 \cdot \cos\alpha_3 \qquad Y = Y_2 \sin\alpha_4$$

2. WSPÓŁRZĘDNA X_1 Z OX_1Y_1 W UKŁADZIE OX_2Y_2 PRZYJMIE WARTOŚĆ X_2 ZGODNIE ZE WZOREM

$$X_2 = X_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}$$

PONIEWAŻ

$$\begin{cases} X = X_1 \cdot \cos\alpha_1 \\ X = X_2 \cdot \cos\alpha_3 \end{cases}$$

$$X_2 \cdot \cos\alpha_3 = X_1 \cdot \cos\alpha_1$$

$$X_2 = X_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}$$

3. A WSPÓŁRZĘDNA Y_1 W UKŁADZIE OX_2Y_2 PRZYJMIE WARTOŚĆ Y_2 ZGODNIE ZE WZOREM

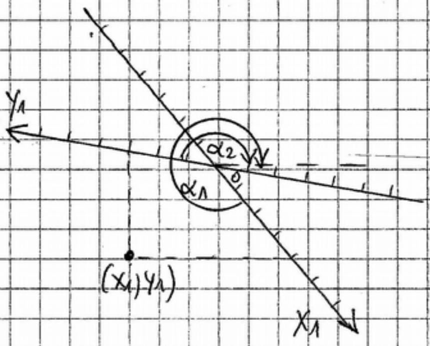
$$Y_2 = Y_1 \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4}$$

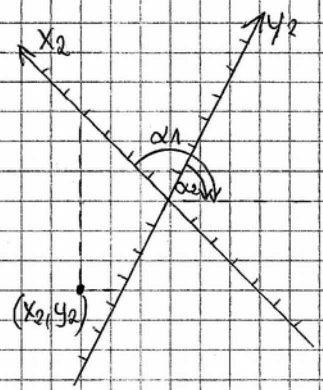
PONIEWAŻ

$$\begin{cases} Y = Y_1 \cdot \sin\alpha_2 \\ Y = Y_2 \cdot \sin\alpha_4 \end{cases}$$

$$Y_2 \cdot \sin\alpha_4 = Y_1 \sin\alpha_2$$

$$Y_2 = Y_1 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4}$$





PRZYKŁAD

PRZENIEŚ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_1 A OY_1 $\sphericalangle\alpha_1=150°$ ORAZ $\sphericalangle\alpha_2=242°$ PUNKT A O WSPÓŁRZĘDNYCH $X_1=2$ I $y_1=-3$ DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 Z DOWOLNYM KĄTEM MIĘDZY OSIAMI OX_2 A OY_2 I $\sphericalangle\alpha_3=60°$ ORAZ $\sphericalangle\alpha_4=312°$

– współrzędna x_2

$$x_2 = x\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}$$

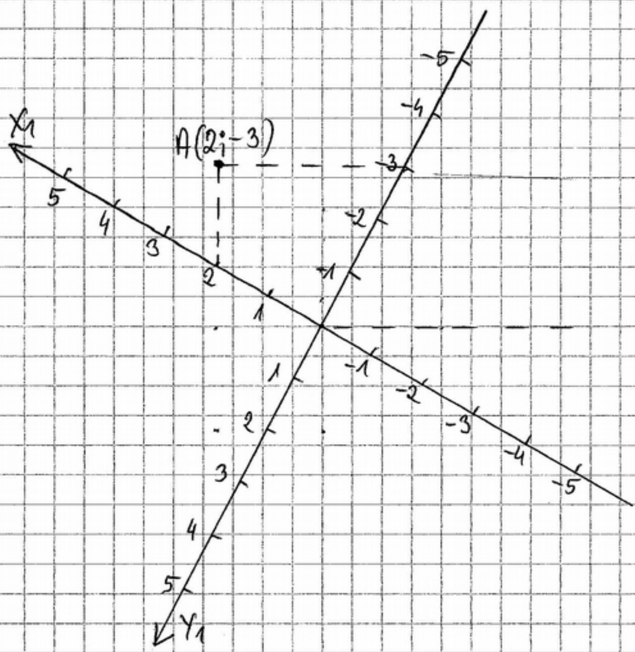
$$x_2 = 2\frac{\cos 150°}{\cos 60°} = 2\frac{-0{,}87}{0{,}5} = \underline{\underline{-3{,}48}}$$

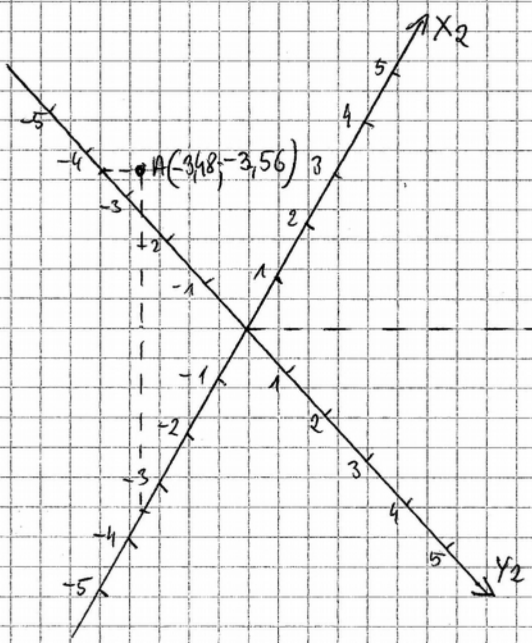
– współrzędna y_2

$$y_2 = y_1\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4}$$

$$y_2 = -3\frac{\sin 242°}{\sin 312°} = -3\cdot\frac{-0{,}88}{-0{,}74} = -3{,}56$$

PUNKT A W UKŁADZIE OX_2Y_2 BĘDZIE MIAŁ WSPÓŁRZĘDNE $x_2=-3{,}48$; $y_2=-3{,}56$


X1
Y1
A(2;-3)


X2
Y2
A(-3,48;-3,56)

IV. FUNKCJA LINIOWA $y=ax+b$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_1 I OY_1 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM:

$$y_1 = \frac{a\cdot x_1\cdot \cos\alpha_1 + b}{\sin\alpha_2}$$

$\sphericalangle \alpha_1$ – kąt zawarty między półosią dodatnią OX_1 a półprostą

$\sphericalangle \alpha_2$ – kąt zawarty między półosią dodatnią OY_1 a półprostą

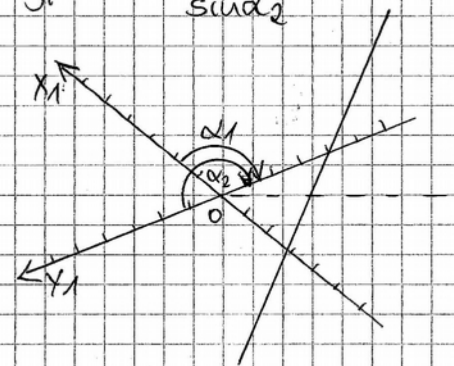
ponieważ:

$$y=ax+b \wedge y=y_1\cdot\sin\alpha_2 \wedge x=x_1\cdot\cos\alpha_1$$

to:

$$y_1\cdot\sin\alpha_2 = a\cdot x_1\cdot\cos\alpha_1 + b$$

$$y_1 = \frac{a\cdot x_1\cdot\cos\alpha_1 + b}{\sin\alpha_2}$$



PRZYKŁAD:

WYKREŚL PROSTĄ BĘDĄCĄ FUNKCJĄ LINIOWĄ OGÓLNĄ $y=1{,}5x-2$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_1 I OY_1 I KĄCIE MIĘDZY OX_1 A PÓŁPROSTĄ $\alpha_1=237^\circ$ ORAZ KĄCIE MIĘDZY OY_1 A PÓŁPROSTĄ $\alpha_2=132^\circ$

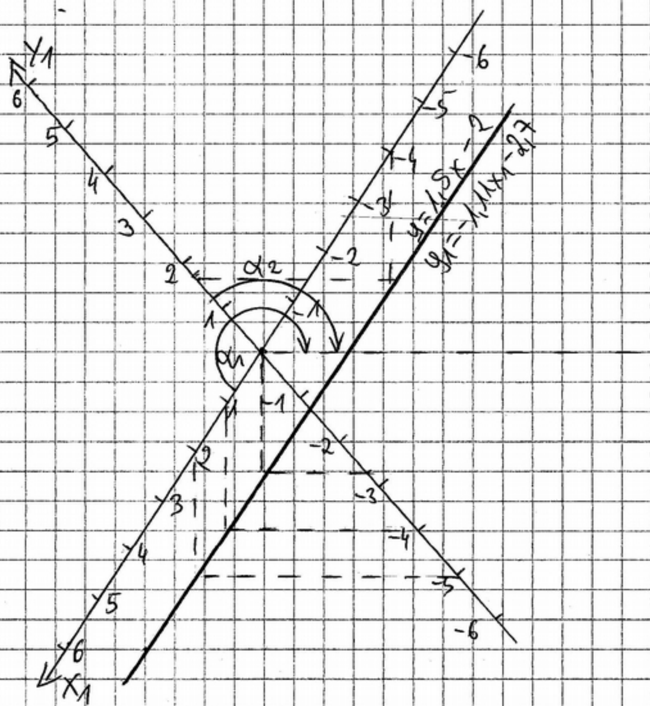
$$y_1 = \frac{a\cdot x_1\cdot\cos\alpha_1 + b}{\sin\alpha_2}$$

$a=1{,}5$
$b=-1$
$\cos 237^\circ = -0{,}55$
$\sin 132^\circ = 0{,}74$

$$y_1 = \frac{1{,}5x_1(-0{,}55)-2}{0{,}74}$$

$$y_1 = -1{,}11x_1 - 2{,}7$$

x_1	2	1	0	4
y_1	-4,92	-3,81	-2,7	1,74



V. PRZENIESIENIE PROSTEJ BĘDĄCEJ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI LINIOWEJ TYPU $y = ax + b$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_1 I OY_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_2 I OY_2 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZORAMI

$$x_2 = x_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}$$

$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4}$$

$\sphericalangle \alpha_1$ - kąt zawarty między półosią dodatnią OX_1 a półprostą

$\sphericalangle \alpha_3$ - kąt zawarty między półosią dodatnią OX_2 a półprostą

$\sphericalangle \alpha_2$ - kąt zawarty między półosią dodatnią OY_1 a półprostą

$\sphericalangle \alpha_4$ - kąt zawarty między półosią dodatnią OY_2 a półprostą

ponieważ:

jeśli $y_1 \cdot \sin\alpha_2 = a \cdot x_1 \cos\alpha_1 + b$

i $y_2 \cdot \sin\alpha_4 = a\, x_2 \cos\alpha_3 + b$

oraz $y_1 \sin\alpha_2 = y_2 \cdot \sin\alpha_4$

to

$$a\, x_2 \cos\alpha_3 + b = a\, x_1 \cos\alpha_1 + b$$

$$\boxed{x_2 = x_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}}$$

ovaz ješli:

$y_1 \cdot \sin\alpha_2 = a \cdot x_1 \cdot \cos\alpha_1 + b$

i

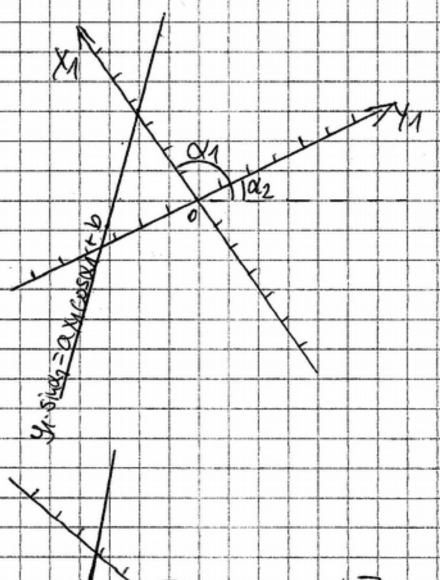
$y_2 \cdot \sin\alpha_4 = a\, x_2 \cdot \cos\alpha_3 + b$

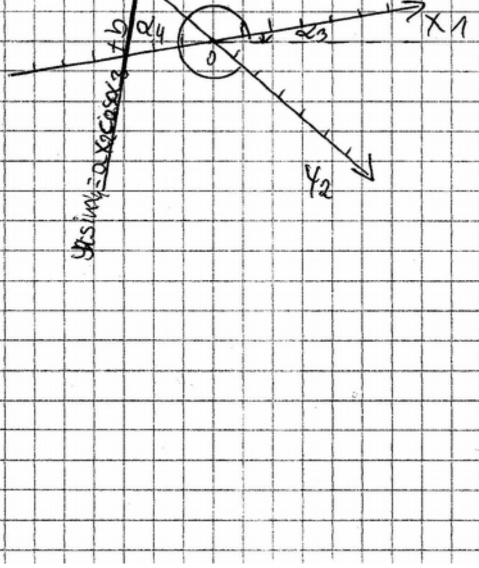
i $\quad x_1 \cdot \cos\alpha_1 = x \;\wedge\; x_2 \cdot \cos\alpha_3 = x$

to $\begin{cases} y_1 \cdot \sin\alpha_2 = ax + b \\ y_2 \cdot \sin\alpha_4 = ax + b \end{cases}$

$y_2 \cdot \sin\alpha_4 = y_1 \cdot \sin\alpha_2$

$$\boxed{y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4}}$$





PRZYKŁAD:

PRZENIEŚ PROSTĄ BĘDĄCĄ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI LINIOWEJ $y = 1,5x - 2$ Z UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_1 I OY_1 DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH OX_2Y_2 O DOWOLNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX_2 I OY_2 JEŚLI DLA OX_1Y_1 $\sphericalangle \alpha_1 = 237^\circ$ I $\sphericalangle \alpha_2 = 132^\circ$ A DLA OX_2Y_2 $\sphericalangle \alpha_3 = 75^\circ$ I $\alpha_4 = 215^\circ$

OX_1Y_1 $\quad y_1 \cdot \sin 132^\circ = 1,5\, x_1 \cdot \cos 237^\circ - 2$

OX_2Y_2 $\quad y_2 \cdot \sin 215^\circ = 1,5\, x_2 \cdot \cos 75^\circ - 2$

OBLICZENIE WSPÓŁRZĘDNEJ X_2

$$X_2 = X_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3} = -2,11\, X_1$$

X_1	2	1	4	-2
X_2	-4,22	-2,11	-8,44	4,22

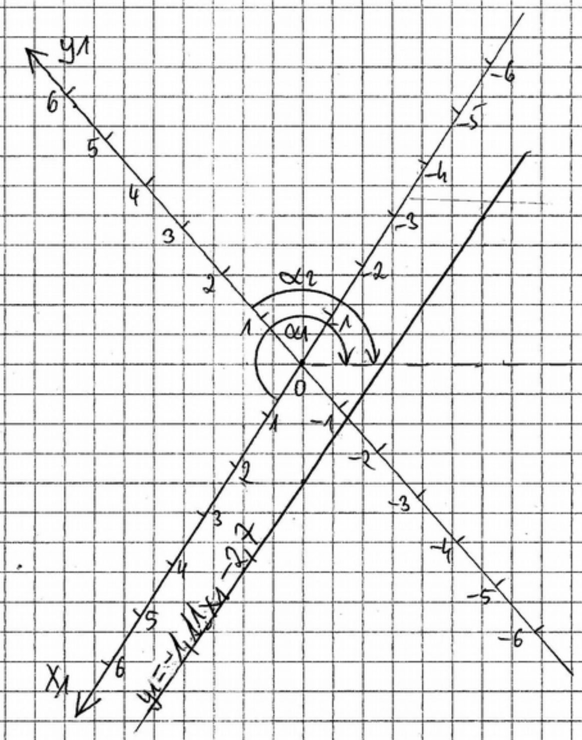
OBLICZENIE WSPÓŁRZĘDNEJ Y_2

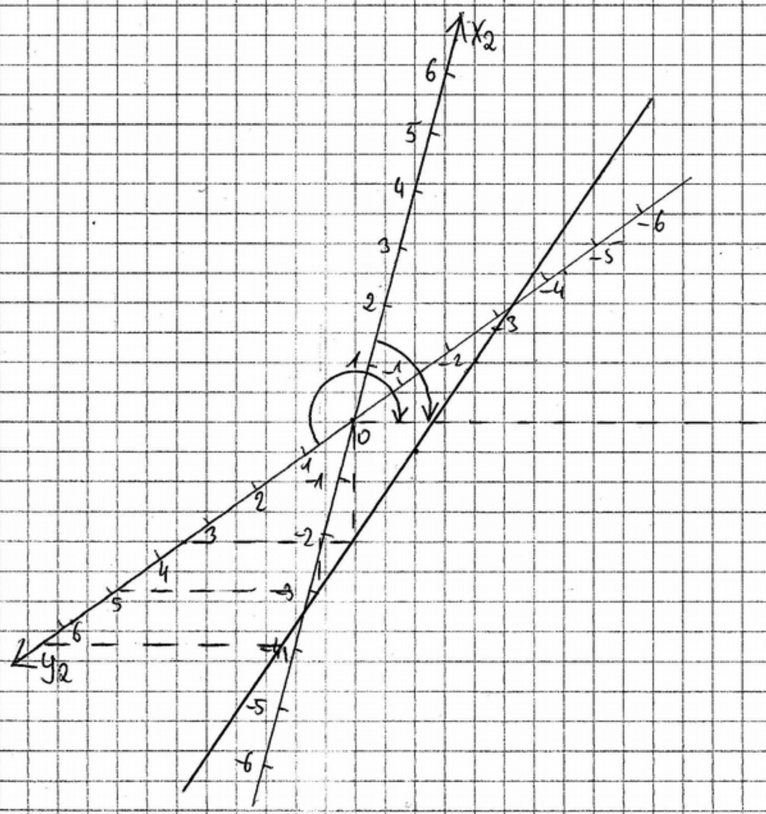
$$y_2 = y_1 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4} = -1,29\, y_1$$

y_1	-4,92	-3,81	1,74
y_2	6,34	4,91	-2,24

to współrzędne x_2, y_2 :

x_2	-4,22	-2,11	-8,44	0
y_2	6,34	4,91	-2,24	3,5


y1
x1
α1
α2
0
y1 = -1,1x1 - 2,7


x2
y2
0

VI. PUNKT WSPÓLNY (PRZECIĘCIA) DWÓCH PROSTYCH BĘDĄCYCH ROZWIĄZANIEM DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH KAŻDY W INNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH O RÓŻNYM KĄCIE MIĘDZY OSIAMI OX I OY BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{\cos\alpha_1 (a_1 - a_2)}$$

$\sphericalangle \alpha_1$ – kąt zawarty między półosią dodatnią OX_1 a półprostą w układzie współ. OX_1Y_1

$$x_2 = \frac{b_2 - b_1}{\cos\alpha_3 (a_1 - a_2)}$$

$\sphericalangle \alpha_2$ – kąt zawarty między półosią dodatnią OX_2 a półprostą w układzie współ. OX_2Y_2

ponieważ:

$$y_1 \sin\alpha_2 = a_1 x_1 \cos\alpha_1 + b_1 \qquad OX_1Y_1$$

$$y_2 \sin\alpha_4 = a_2 x_2 \cos\alpha_3 + b_2 \qquad OX_2Y_2$$

oraz $y_1 \sin\alpha_2 = y_1 \sin\alpha_4$

i $x_1 \cos\alpha_1 = x_2 \cos\alpha_3$

to jeśli $y_2 \sin\alpha_4 = y_1 \cdot \sin\alpha_2$

$$a_1 x_1 \cos\alpha_1 + b_1 = a_2 x_2 \cos\alpha_3 + b_2$$

i $x_1 \cos\alpha_1 = x_2 \cos\alpha_3$

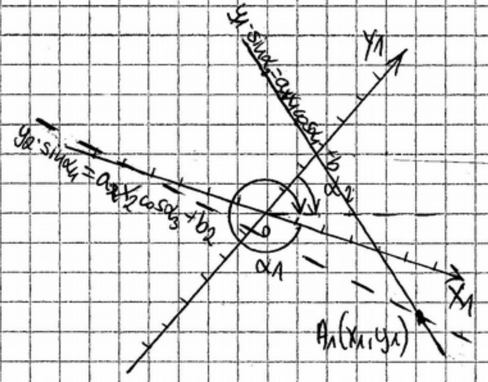
$$a_1 x_1 \cos\alpha + b_1 = a_2 x_1 \cos\alpha + b_2$$

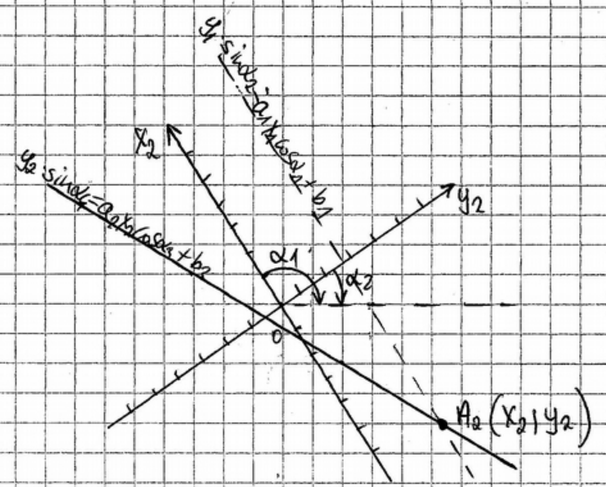
$$x_1 (a_1 \cos\alpha_1 - a_2 \cos\alpha_1) = b_2 - b_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{b_2 - b_1}{\cos\alpha_1 (a_1 - a_2)}}$$

i dla x_2

$$\boxed{x_2 = \frac{b_2 - b_1}{\cos\alpha_3 (a_1 - a_2)}}$$





PRZYKŁAD:

PODAJ WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU, KTÓRY JEST WSPÓLNY DLA $y_1 \cdot \sin\alpha_2 = a_1 x_1 \cos\alpha_1 + b_1$ NALEŻĄCEJ DO UKŁ. WSPÓŁ. OX_1Y_1 ORAZ $y_2 \cdot \sin\alpha_4 = a_2 x_2 \cos\alpha_3 + b_2$ NALEŻĄCEJ DO UKŁ. WSPÓŁ. OX_2Y_2 jeśli

$a_1 = 1{,}5;\ b_1 = 1{,}5;\ a_2 = -1;\ b_2 = 3;\ \alpha_1 = 123^\circ;\ \alpha_2 = 20^\circ;$
$\alpha_3 = 336^\circ;\ \alpha_4 = 45^\circ$

$$X_1 = \frac{b_2 - b_1}{\cos\alpha_1 (a_1 - a_2)} = \frac{3 - 1{,}5}{\cos 123^\circ (1{,}5 + 1)} = \frac{1{,}5}{-0{,}55 \cdot 2{,}5} = \underline{\underline{-1{,}09}}$$

$$y_1 \cdot \sin\alpha_2 = a\, x_1 \cos\alpha_1 + b_1$$

$$y_1 = \frac{a_1 x_1 \cos\alpha_1 + b_1}{\sin\alpha_2} = \frac{1{,}5 \cdot (-0{,}55) x_1 + 1{,}5}{0{,}34} = -2{,}41 x_1 + 4{,}41$$

$i\ x_1 = -1{,}09$

to $y_1 = -2{,}41 \cdot (1{,}09) + 1{,}5 = 7{,}03$

$A_1(-1{,}09;\ 7{,}03)$

(14)

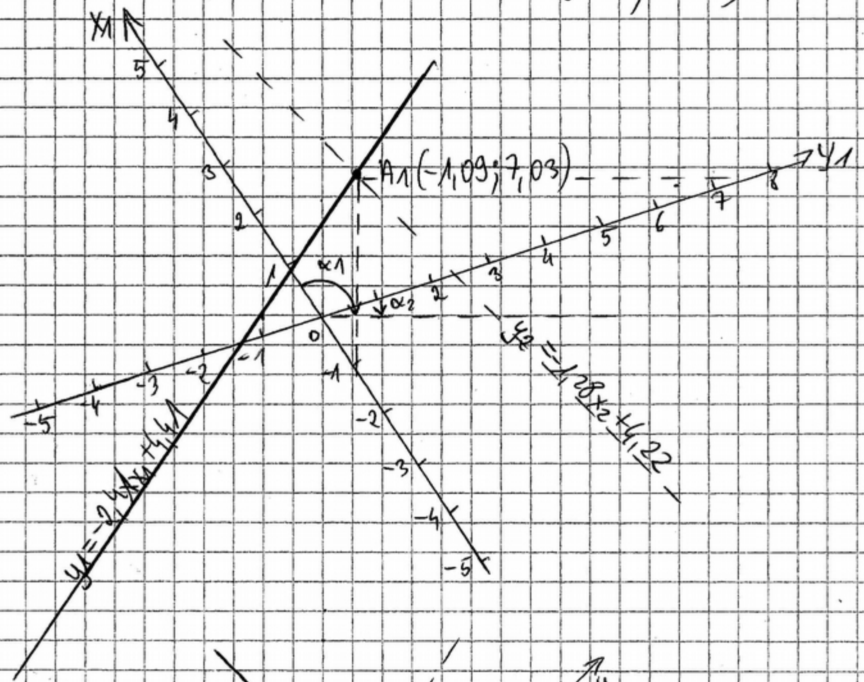
$$x_2 = \frac{b_2 - b_1}{\cos\alpha_3(a_1 - a_2)} = \frac{3 - 1,5}{\cos 336^\circ(1,5+1)} = \frac{1,5}{0,91 \cdot 2,5} = \underline{\underline{0,66}}$$

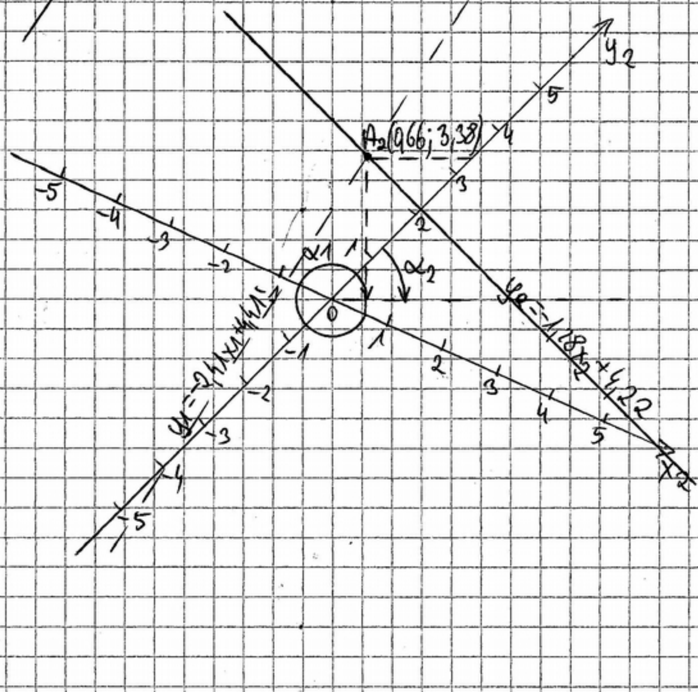
$$y_2 = \frac{a_2 x_2 \cos\alpha_3 + b_2}{\sin\alpha_4} = \frac{1,5 x^2 \cdot 0,91 + 3}{0,71} = -1,28 x_2 + 4,22$$

i $x_2 = 0,66$

$$y_2 = -1,28 \cdot 0,66 + 4,22 = \underline{\underline{3,38}}$$

$A_2(0,66; 3,38)$





VII FUNKCJA KWADRATOWA $y = ax^2 + bx + c$

W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 O DOWOLNYCH KĄTACH OSI OX_1 I OY_1 BĘDZIE WYRAŻAĆ SIĘ WZOREM:

$$y_1 = \frac{ax_1^2\cos^2\alpha_1 + bx_1\cos\alpha_1 + c}{\sin\alpha_2}$$

ponieważ

$$y = ax^2 + bx + c \ \wedge\ y = y_1\sin\alpha_2 \ \wedge\ x = x_1\cos\alpha_1$$

to

$$y_1\sin\alpha_2 = ax_1^2\cos^2\alpha_1 + bx_1\cos\alpha_1 + c$$

$$y_1 = \frac{ax_1^2\cos^2\alpha_1 + bx_1\cos\alpha_1 + c}{\sin\alpha_2}$$

1. WYRÓŻNIK FUNKCJI

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2. MIEJSCA ZEROWE x_1', x_2'

a) jeśli $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \ \wedge\ x_1 = x_1'\cdot\cos\alpha_1$

to

$$\boxed{x_1' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a\cos\alpha_1}}$$

b) jeśli $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ \wedge\ x_2 = x_2'\cos\alpha$

to

$$\boxed{x_2' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a\cdot\cos\alpha_1}}$$

3. WIERZCHOŁEK FUNKCJI

a) jeśli $p = \frac{-b}{2a} \ \wedge\ p = p_1\cdot\cos\alpha_1$

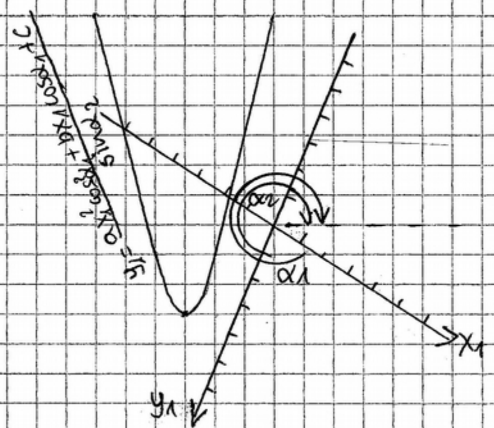
to

$$\boxed{p_1 = \frac{-b}{2a\cdot\cos\alpha_1}}$$

b) jeśli $q = \frac{-\Delta}{4a} \ \wedge\ q = q_1\sin\alpha_2$

to

$$\boxed{q_1 = \frac{-\Delta}{4a\sin\alpha_2}}$$



PRZYKŁAD:
NARYSUJ PARABOLĘ BĘDĄCĄ ROZWIĄZANIEM FUNKCJI KWADRATOWEJ $y = x^2 - 4x + 3$ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH OX_1Y_1 I KĄTACH MIĘDZY PÓŁOSIĄ A OX_1 $\alpha_1 = 123°$ I KĄT MIĘDZY OSIĄ OY_1 A PÓŁPROSTĄ $\alpha_2 = 20°$

$$y = x^2 - 4x + 3 \wedge \alpha_1 = 123° \wedge \alpha_2 = 20°$$

to $$y_1 = \frac{x_1^2 \cdot \cos^2 123° - 4x_1 \cos 123° + 3}{\sin 20°}$$

$$y_1 = 0{,}88x_1^2 + 6{,}47x_1 + 8{,}82$$

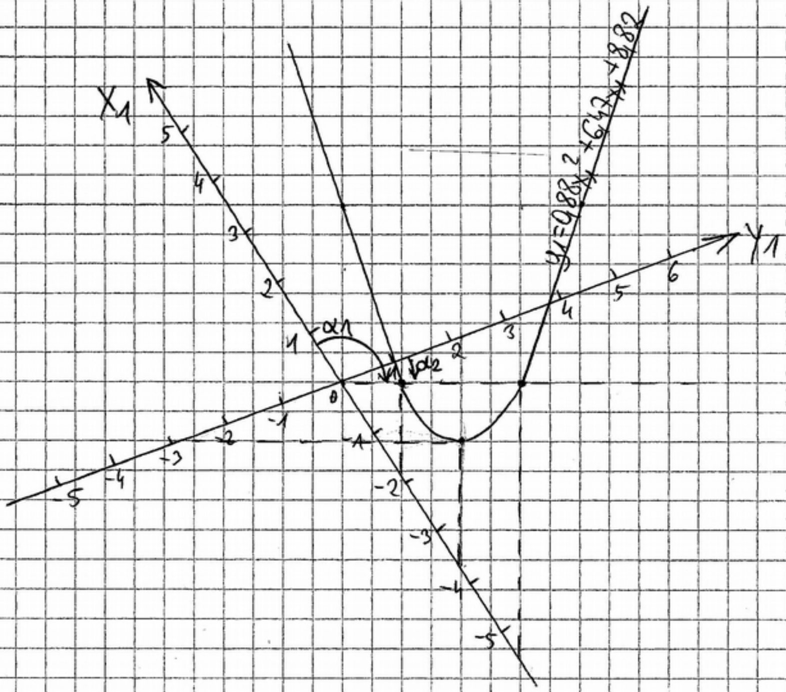
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4$$

$$x_1' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a\cos\alpha_1} = \frac{4-2}{-1{,}1} = \underline{\underline{-1{,}81}}$$

$$x_2' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a\cos\alpha_1} = \frac{4+2}{-1{,}1} = \underline{\underline{-5{,}45}}$$

$$p_1 = \frac{-b}{2a\cos\alpha_1} = \frac{4}{2\cdot(-0{,}55)} = \underline{\underline{-3{,}63}}$$

$$q_1 = \frac{-\Delta}{4a\sin\alpha_2} = \frac{-4}{4\cdot 0{,}34} = \underline{\underline{-2{,}94}}$$


X1
Y1
α1
α2
y1=0,88x1^2+6,47x1+8,82