

周方变换 (Z 变换) 之最简捷推导

与“参考系平权”定律之证明

中国社会科学院 周方

zhoufang@cass.org.cn tony_zf_zf_zf@126.com

摘要 伽利略变换只在“真空中光速为无穷大”假定条件下才能够成立。伽利略变换描述‘互作匀速直线相对运动的两个观测者对同一运动质点的观测矢量通过两观测者之间的位置矢量形成的矢量合成关系’。笔者利用伽利略变换的这一性质，用最简捷的方法推导出“两观测者有相对运动且真空中光速为有限值”条件下唯一客观存在的时空变换——周方变换 (Z 变换)。笔者利用周方变换 (Z 变换) 证明了运动观测理论中一条极重要的自然定律——“参考系平权”定律。

关键词 时空变换 伽利略变换 周方变换 Z 变换 参考系平权

(一) 伽利略变换

设：在物理空间内 K 系的 x 轴、 y 轴、 z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴，以及 K' 系的 x' 轴、 y' 轴、 z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴。 K' 系与 K 系之间始终保持 x' 轴平行于 x 轴， y' 轴平行于 y 轴及 z' 轴平行于 z 轴。 K' 系相对于 K 系作匀速直线平移运动，相对速度为 $u = \text{const.}$ 。相对速度矢量 u 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分量分别为 u_x 、 u_y 、 u_z 。观测者被设置在坐标系的原点。 K 系观测者和 K' 系观测者各配有时钟，而且两时钟完全同步运行。在时刻 $t' = t = 0$ ， K' 系原点 ($x' = y' = z' = 0$) 恰好经过 K 系原点 ($x = y = z = 0$)，这时两观测者的时钟相互对准到零点。 K' 系与 K 系之间的关系示于图 1。

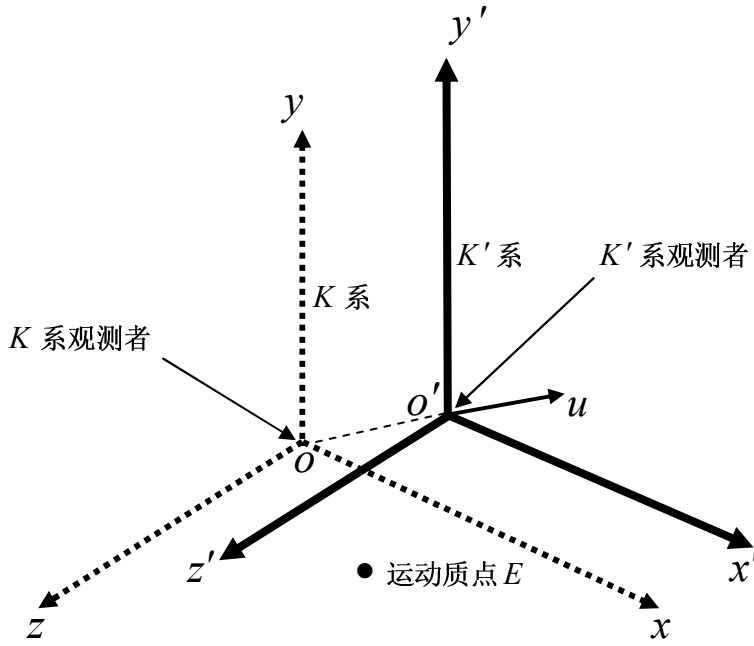


图 1 K' 系与 K 系之间的关系

观测矢量合成图示于图 2。

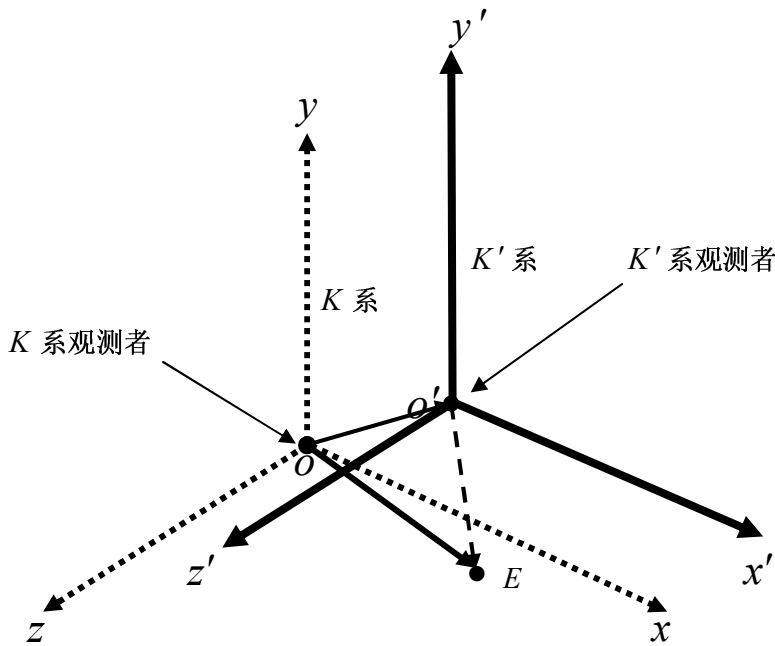


图 2 观测矢量合成图

参看图 2。

(a) K' 系观测者 O' 对 K 系观测者 O 的位置，用矢量表示，称为“位置矢量”。在时刻 t' ，

K' 系观测者 O' 对 K 系观测者 O 的位置矢量为 $\overline{OO'}(t') = ut'$ ， $u = [u_x, u_y, u_z]^T$ 。

(b) 观测者观测到运动质点的时刻及质点在该观测者所属参考系内的位置，即是该观测者

的“时空点”，用一个出自观测者的矢量表示，称为“观测矢量”或“时空点矢量”。在时刻 t' ， K' 系观测者 O' 观测到运动质点 E ，这时 K' 系观测者 O' 对运动质点 E 的观测矢量（或称‘ K' 系观测者 O' 的 K' 系时空点矢量’）为 $\overline{O'E}(t') = r'_t$ ， $r'_t = [x'_t, y'_t, z'_t]^T$ 。

(c) 在时刻 t ， K 系观测者 O 观测到运动质点 E ，这时 K 系观测者 O 的观测矢量为 $\overline{OE}(t) = \bar{r}_t$ ， $\bar{r}_t = [\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{z}_t]^T$ 。

矢量 $\overline{OO'}(t')$ 、矢量 $\overline{O'E}(t')$ 与矢量 $\overline{OE}(t)$ 满足矢量合成定律（即构成封闭的矢量合成三角形），其充要条件是 $t = t'$ 。这就是说，只有在“真空中光速为无穷大”的条件下 K 系观测者 O 与 K' 系观测者 O' 才能够在时刻 $t = t'$ 同时观测到运动质点 E ；这时，两观测者对该运动质点的观测矢量通过两观测者之间的位置矢量形成矢量合成关系，如图 2 所示。因此，可以得出结论：在 $t = t'$ 条件下，三个时变矢量 $\overline{OO'}(t')$ 、 $\overline{O'E}(t')$ 、 $\overline{OE}(t)$ 满足矢量合成定律：

$$\overline{OE}(t) = \overline{OO'}(t') + \overline{O'E}(t')$$

即：“ K 系观测者 O 的 K 系时空点矢量 $\overline{OE}(t)$ ”是“ K' 系观测者 O' 对 K 系观测者 O 的位置矢量 $\overline{OO'}(t')$ ”与“ K' 系观测者 O' 的 K' 系时空点矢量 $\overline{O'E}(t')$ ”之和。

将 $\overline{OE}(t) = \bar{r}_t$ ， $\overline{OO'}(t') = ut'$ 及 $\overline{O'E}(t') = r'_t$ 代入上面的矢量合成关系式，得：

$$\begin{cases} \bar{r}_t = ut' + r'_t \\ t = t' \end{cases}$$

由此可见，两观测者的观测矢量 $\overline{O'E}(t')$ 、 $\overline{OE}(t)$ 与两观测者之间的位置矢量 $\overline{OO'}(t')$ 所形成的矢量合成关系 $\overline{OE}(t) = \overline{OO'}(t') + \overline{O'E}(t')$ ， $t = t'$ ， $\overline{OO'}(0) = \overline{O'E}(0) = \overline{OE}(0) = 0$ ，就是“一般伽利略变换”：

$$\begin{cases} \bar{r}_t = ut' + r'_t \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} r'_t = \bar{r}_t - ut \\ t' = t \end{cases}$$

$$\bar{r}_t = [\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{z}_t]^T, \quad r'_t = [x'_t, y'_t, z'_t]^T, \quad u = [u_x, u_y, u_z]^T$$

“一般伽利略变换”的观测矢量合成图示于图 3。

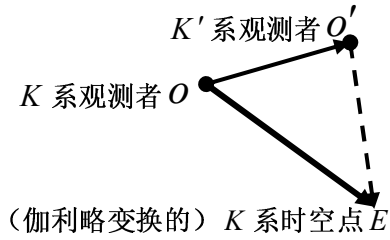
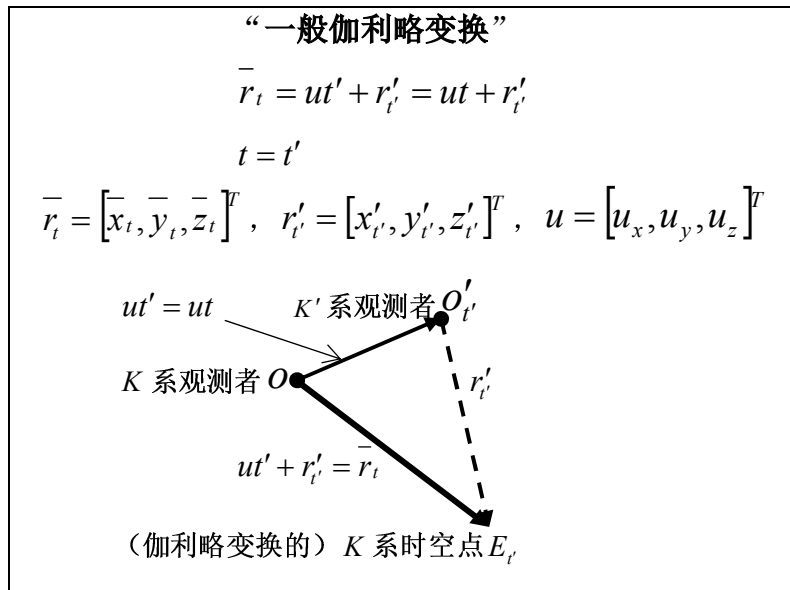


图3 “一般伽利略变换”的观测矢量合成图

“一般伽利略变换”的矢量图列于表1。

表1 “一般伽利略变换”的矢量图



“一般伽利略变换”可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_t + ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

式中： $\bar{r}_t = [\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{z}_t]^T$ ， $r'_t = [x'_t, y'_t, z'_t]^T$ ， $u = [u_x, u_y, u_z]^T$ ， $|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

将矩阵形式的“一般伽利略变换”写成代数形式，我们就得到“一般伽利略变换”的

“正变换”方程组及“逆变换”方程组：

$$\begin{cases} \bar{x} = x' + u_x t' \\ \bar{y} = y' + u_y t' \\ \bar{z} = z' + u_z t' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \bar{x} - u_x t \\ y' = \bar{y} - u_y t \\ z' = \bar{z} - u_z t \\ t' = t \end{cases}$$

令 $u = [u_x, u_y, u_z]^T = [u \ 0 \ 0]^T$ ，我们就得到“特殊伽利略变换”：

$$\begin{cases} \bar{x} = x' + ut' \\ \bar{y} = y' \\ \bar{z} = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \bar{x} - ut \\ y' = \bar{y} \\ z' = \bar{z} \\ t' = t \end{cases}$$

必须强调指出，伽利略变换只在‘真空中光速为无穷大’假定条件下才能够成立。

(二) 周方变换 (“一般 Z 变换”)

下面，我们推导出“两观测者有相对运动且真空中光速为有限值”条件下唯一客观存在的时空变换——周方变换 (Z 变换)。

$t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ 时的观测矢量合成图示于图 4。

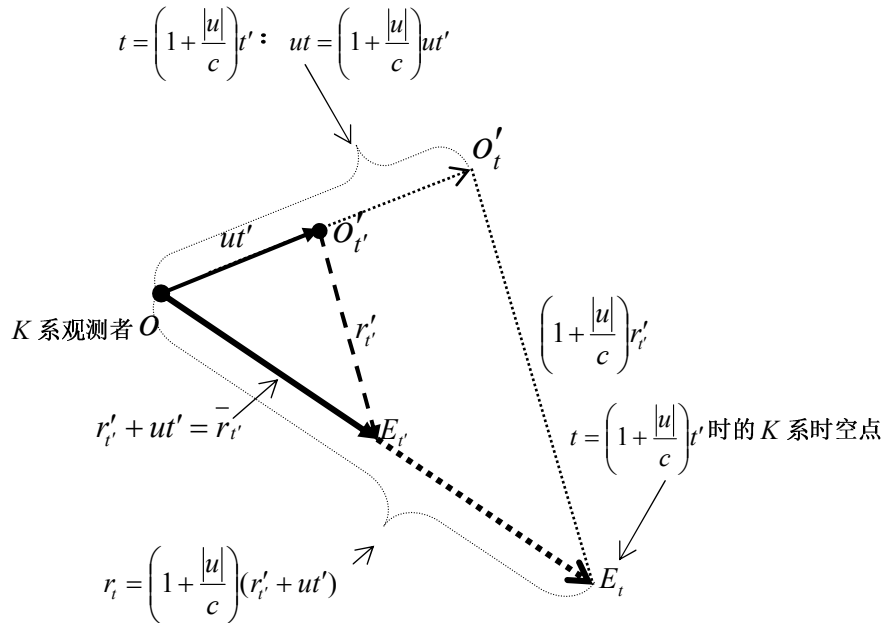


图 4 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ 时的观测矢量合成图

参看图 4。

(1) 在时刻 t' ， K' 系观测者 O'_t 对 K 系观测者 O 的位置矢量为 $\overline{OO'_t} = ut'$ 。此时 K' 系观测者 O'_t 观测到运动质点 E'_t ，若‘真空中光速为无穷大’，则 K 系观测者 O 与 K' 系观测者 O'_t 应同时（在时刻 t' ）观测到运动质点 E'_t ，形成观测矢量合成关系： $\overline{r'_t} = ut' + r'_t$ 。可是，由于真空中光速为有限值（ c ），故在时刻 t' ， K 系观测者 O 尚不能在时刻 t' 观测到运动质点 E'_t 。

(2) 直到时刻 $t = t' + \frac{|u|t'}{c} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t' > t'$ [式中 $|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$]， K' 系观测者 O'_t 对 K 系观测者 O 的位置矢量为 $\overline{OO'_t}$ 。此时， K 系观测者 O 在矢量 $\overline{OE'_t}$ 方向上才观测到点 E_t 。图 4 中的点 E_t 乃是 K 系观测者 O 在时刻 t 时观测到运动质点 E'_t 之“视在点”，它就是“ K 系观测者 O 在时刻 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ 的 K 系时空点”。在 K 系观测者 O 看来， K' 系观测者 O'_t 在矢量 $\overline{O'_tE'_t}$ 方向（即矢量 $\overline{O'_tE_t}$ 方向）上也将在时刻 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ 观测到点 E_t 。也就是说，在 K 系观测者 O 看来，在时刻 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ ， K 系观测者 O 与 K' 系观测者 O'_t 同时观测到点 E_t 。

如图 4 所示，在时刻 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ ， K' 系观测者 O'_t 对 K 系观测者 O 的位置矢量为 $\overline{OO'_t}$ ：

$$\overline{OO'_t} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)\overline{OO'_t}, \text{ 即 } \overline{OO'_t} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)ut' = ut. \text{ 在此时刻，} K' \text{ 系观测者 } O'_t \text{ 对 } K \text{ 系观测者 } O$$

的位置矢量 $\overline{OO'_t}$ 、 K' 系观测者 O'_t 的观测矢量 $\overline{O'_tE_t}$ 、 K 系观测者 O 的观测矢量 $\overline{OE_t}$ 三个矢量构成观测矢量合成三角形 OO'_tE_t 。这个三角形 OO'_tE_t 与伽利略变换的观测矢量合成三角形 $OO'_tE'_t$ 成为‘相似三角形’： $\Delta OO'_tE_t \cong \Delta OO'_tE'_t$ 。

于是，从图 4 可得：

a. K' 系观测者 O'_t 对 K 系观测者 O 的位置矢量 $\overline{OO'_t}$: $\overline{OO'_t} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) ut' = ut$;

b. K' 系观测者 O'_t 的 K' 系时空点矢量 $\overline{O'_t E'_t}$: $\overline{O'_t E'_t} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) r'_t$;

c. K 系观测者 O 的 K 系时空点矢量 $\overline{OE_t}$: $\overline{OE_t} = r_t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) (r'_t + ut')$ 。

这样，我们从 **c.** 项就得到方程组：

$$\begin{cases} r_t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) (r'_t + ut') = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) ut' + \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) r'_t = ut + \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) r'_t \\ t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) t' \end{cases}$$

式中： $r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$, $r'_t = [x'_t, y'_t, z'_t]^T$, $u = [u_x, u_y, u_z]^T$, $|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

(c 为真空中光速)

此方程组就是周方变换（一般 Z 变换）。

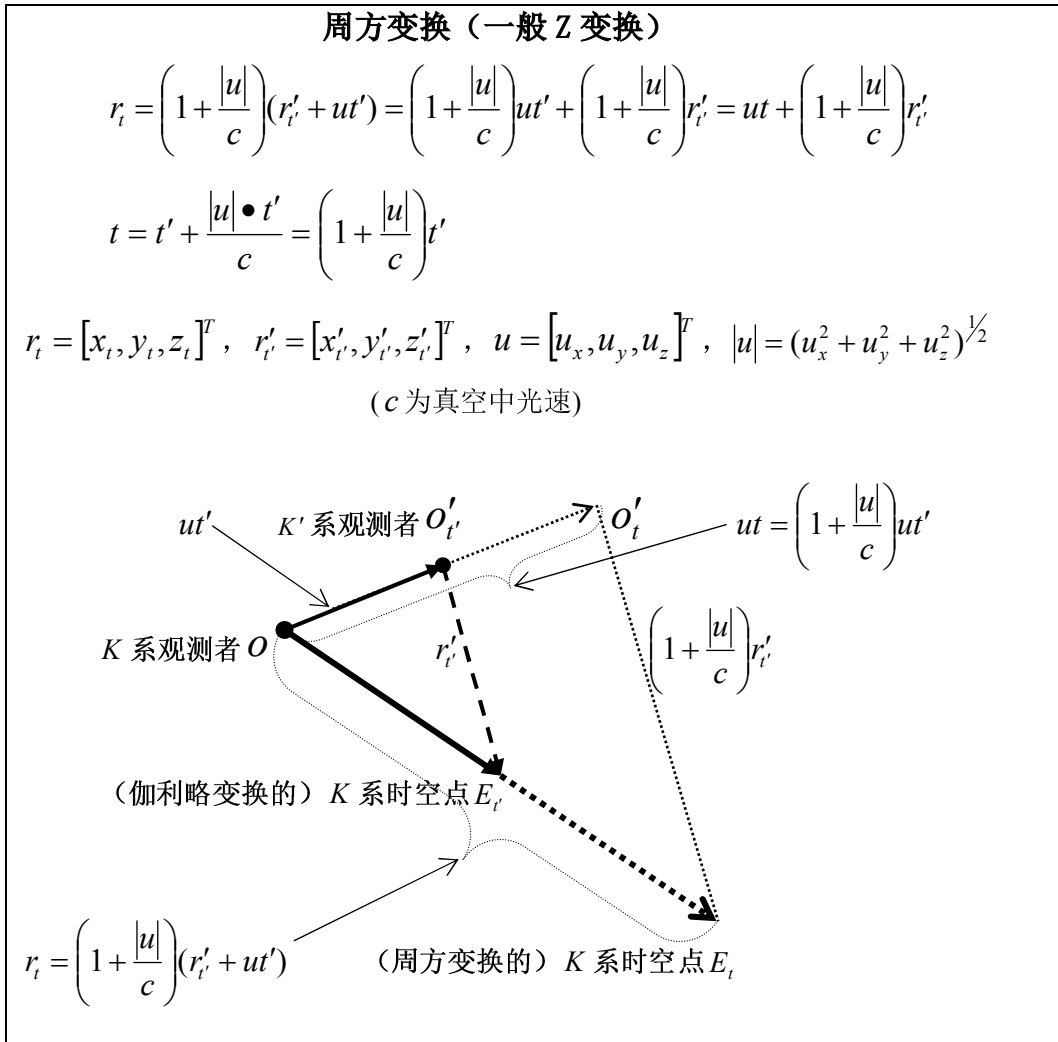
一般 Z 变换可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_t \\ t \end{bmatrix} = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right) \begin{bmatrix} r'_t + ut' \\ t' \end{bmatrix} \quad (c \text{ 为真空中光速})$$

式中： $r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$, $r'_t = [x'_t, y'_t, z'_t]^T$, $u = [u_x, u_y, u_z]^T$, $|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

周方变换（一般 Z 变换）的矢量图示于表 2。

表 2 周方变换（一般 Z 变换）的矢量图



将矩阵形式的周方变换（一般 Z 变换）

$$\begin{bmatrix} r_t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{|u|}{c} \\ \frac{|u|}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_t + ut' \\ t' \end{bmatrix} \quad (c \text{ 为真空中光速})$$

式中: $r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$, $r'_t = [x'_t, y'_t, z'_t]^T$, $u = [u_x, u_y, u_z]^T$, $|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

写成代数形式, 我们就得到周方变换（一般 Z 变换）的“正变换”及“逆变换”:

$$\begin{cases} x = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)(x' + u_x t') \\ y = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)(y' + u_y t') \\ z = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)(z' + u_z t') \\ t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{1 + \frac{|u|}{c}}(x - u_x t) \\ y' = \frac{1}{1 + \frac{|u|}{c}}(y - u_y t) \\ z' = \frac{1}{1 + \frac{|u|}{c}}(z - u_z t) \\ t' = \frac{1}{1 + \frac{|u|}{c}}t \end{cases}$$

式中： $u = [u_x, u_y, u_z]^T$ ， $|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$ ， c 为真空中光速。

(三) 周方变换 (“特殊 Z 变换”)

设： K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速直线平移运动，相对速度为 u ，且保持 x' 轴与 x 轴重合； y' 轴与 y 轴平行及 z' 轴与 z 轴平行。在这种场合下，有： $u_x = u$ ， $u_y = 0$ ， $u_z = 0$ 。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 5。

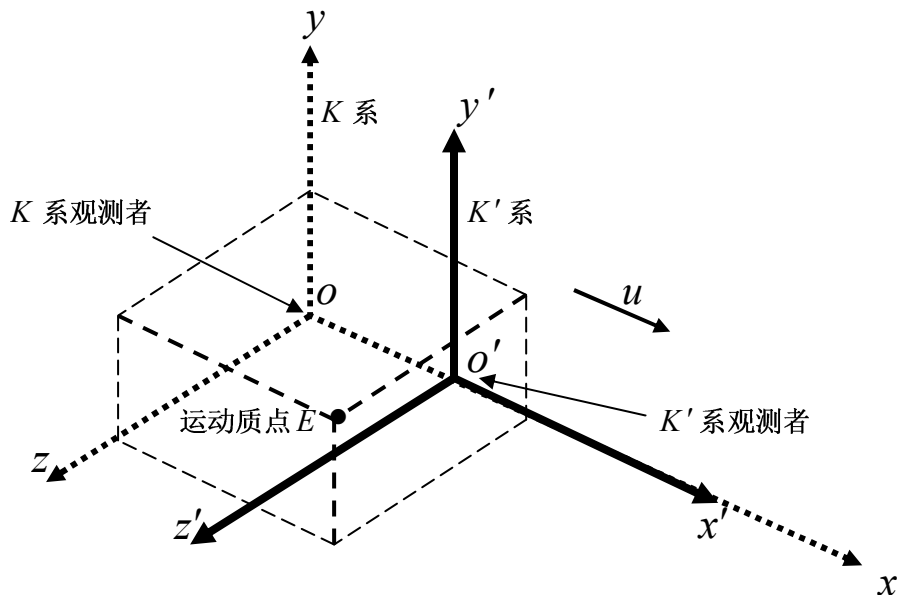


图 5 K' 系与 K 系之间的关系

在一般 Z 变换中，令 $u = [u_x, u_y, u_z]^T = [u \ 0 \ 0]^T$ ，即得到变换方程组：

$$\begin{cases} x = \left(1 + \frac{u}{c}\right)(x' + ut') \\ y = \left(1 + \frac{u}{c}\right)y' \\ z = \left(1 + \frac{u}{c}\right)z' \\ t = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}(x - ut) \\ y' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}y \\ z' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}z \\ t' = \frac{1}{1 + \frac{u}{c}}t \end{cases}$$

此变换方程组称为“周方变换（特殊 Z 变换）”，简称“特殊 Z 变换”。

(四) “参考系平权”定律

为了参考，现将表 2 中的图形移到这里，示于图 6。

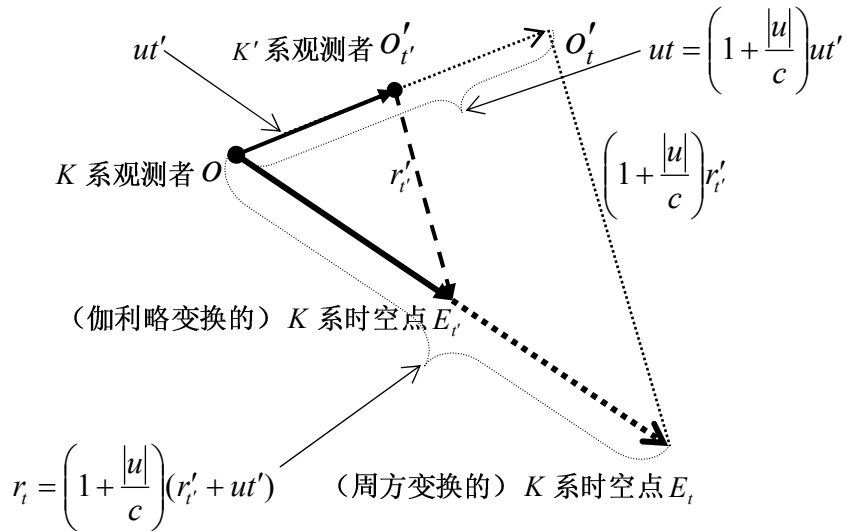


图 6 观测矢量合成图

将“ K 系， K' 系”组的观测矢量合成图与“ K_1 系， K' 系”组的观测矢量合成图画在同一个图上，示于图 7。

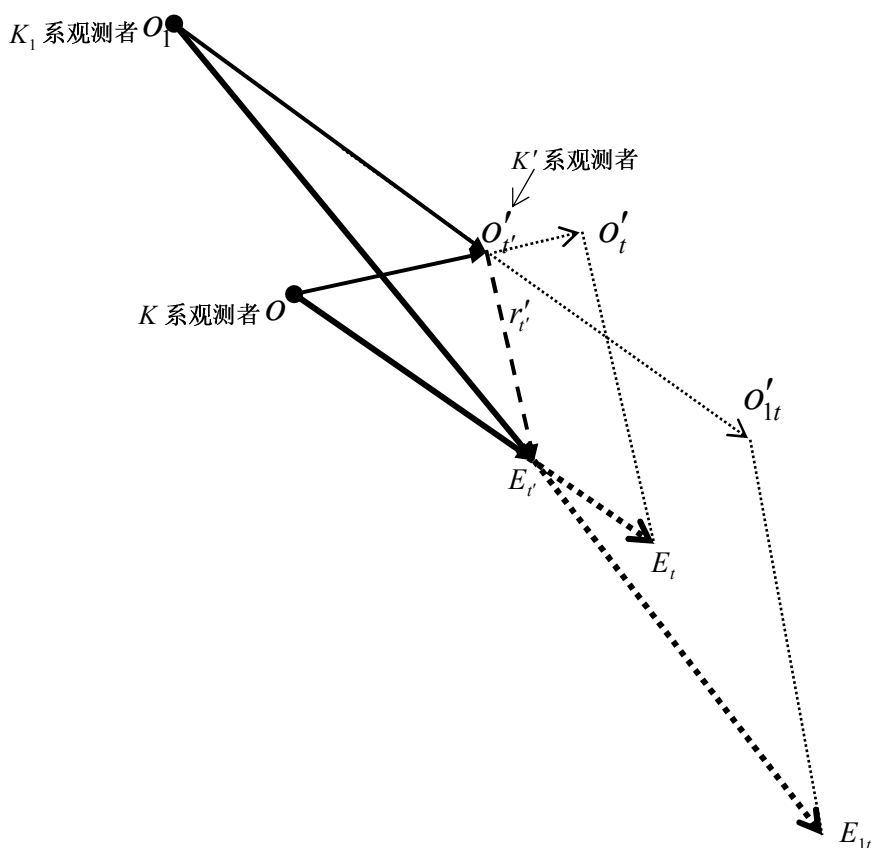


图7 “K系，K'系”组与“ K_1 系，K'系”组的观测矢量合成图

参看图7。 K 系、 K_1 系各自相对于 K' 系作匀速直线平移运动（相对速度分别为 u 、 u_1 ），故 K 系与 K_1 系相互之间也作匀速直线平移运动[相对速度为 $(u_1 - u)$]。在“真空中光速为有限值”条件下， K 系观测者 O 在时刻 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ 才观测到 E_t （即： K 系观测者 O 在时刻 t 的 K 系时空点为 E_t ）， K_1 系观测者 O_1 在时刻 $t_1 = \left(1 + \frac{|u_1|}{c}\right)t'$ 才观测到 E_{1t} （即： K_1 系观测者 O_1 在时刻 t_1 的 K_1 系时空点为 E_{1t} ）。在图7中可以看到， K 系观测者 O 在时刻 $t = \left(1 + \frac{|u|}{c}\right)t'$ 的 K 系时空点 E_t 与 K_1 系观测者 O_1 在时刻 $t_1 = \left(1 + \frac{|u_1|}{c}\right)t'$ 的 K_1 系时空点 E_{1t} 均为 K' 系观测者 O'_t 在时刻 t' 的 K' 系时空点 $E_{t'}$ 之“视在点”，这说明相互间作匀速直线运动的 K 系观测者与 K_1 系观测者都能观测到同一个点 $E_{t'}$ ，不过，两观测者不在同一时刻观测到点 $E_{t'}$ 的“视在点”，而且他们所观测到点 $E_{t'}$ 的“视在点”也是不相同的（图7中的点 E_t ，

点 E_{1t}), 然而, 通过分别对 K 系观测者及 K_1 系观测者进行“对钟”及“对尺”(周方, 2014 年版, 2016 年版), 即通过周方变换 (Z 变换), 便可使两观测者同时观测到点 E_t 的实时真实位置 (矢量 $\overline{O'_t E_t} = r'_{t'}$)。

以上所得结论可以被推广至互作匀速直线平移相对运动的 K 系、 K_1 系、 K_2 系、…… 等任意多个参考系之情况, 示于图 8。

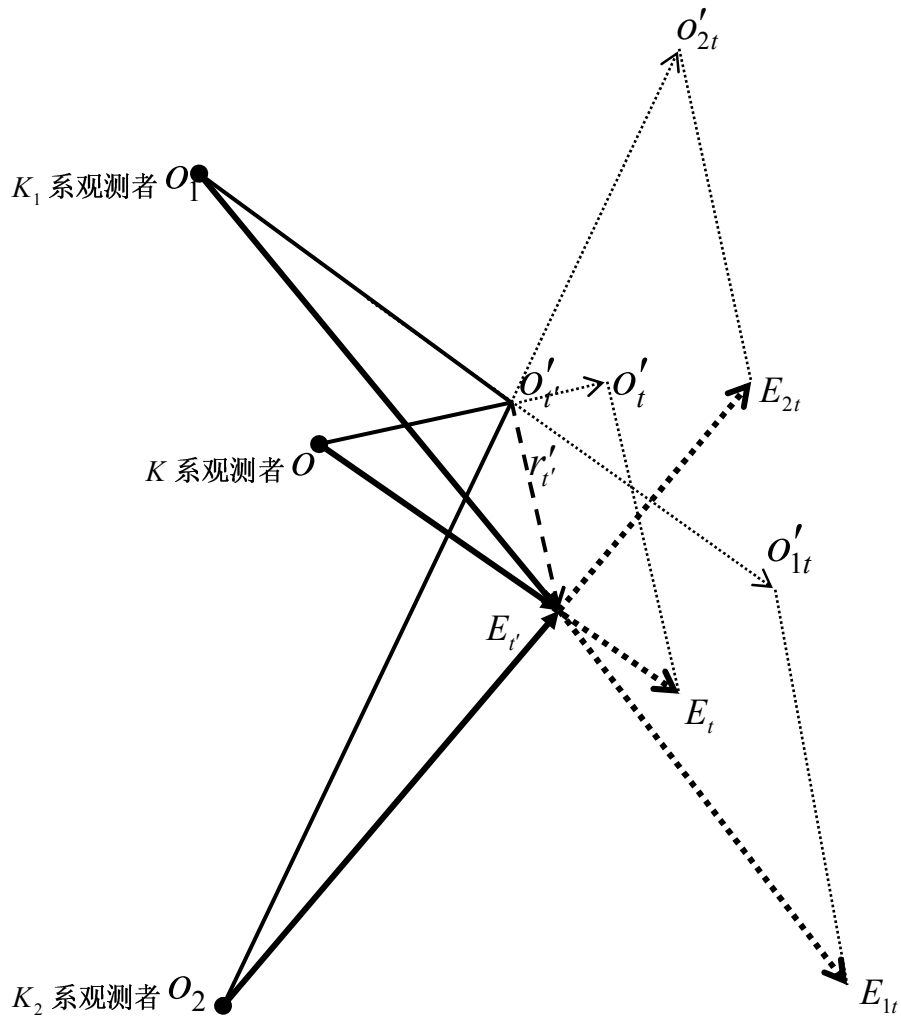


图 8 观测矢量合成图

以上所述称为“参考系平权”定律, 是一条极重要的自然定律。

参 考 文 献

- [1] 《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》，周方/著 经济科学出版社 2014年版
- [2] 《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》，(第二版)，周方/著 经济科学出版社 2016年版
- [3] 周方：《新牛顿力学时空变换—周方变换（广义的伽利略变换）》
(The Transformation of Space-time for the Neo-Newtonian Mechanics)
<http://www.vixra.org/pdf/1209.0089v1.pdf>

The Simplest Deduction for Space-Time Transformation and ‘Law of Equi-Status for Reference Systems’

Zhoufang

(Chinese Academy of Social Sciences)

Abstract The Galilean Transformation is, strictly speaking, applicable only in assumed case of unlimited light velocity. The Galilean Transformation describes the composition of observers’ observation vectors. The author of the article, utilizing this inherent property of Galilean Transformation, presents the simplest deduction for space-time transformation objectively existing in motion observation under the circumstances of limited light velocity, and revealed the ‘Law of Equi-Status for Reference Systems’ as well.