

Point de Laplace
Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats
en Géodésie Tridimensionnelle

Mémoire de Fin d'Etudes pour l'Obtention du Diplôme
d'Ingénieur de l'Ecole Nationale des Sciences
Géographiques, France

Abdelmajid Ben Hadj Salem¹

Octobre, 1981

1. abenhadsalem@gmail.com

Institut Géographique National Ecole Nationale des Sciences Géographiques

Point de Laplace Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Rapport de Stage I.T.3./ Mars - Octobre 1981
au Département du Traitement de
l'Information Géodésique
S.G.N.M. I.G.N.**

Table des matières

I	LE POINT DE LAPLACE	4
1	Le Point de Laplace	5
1.1	Introduction	5
1.2	Définitions et Rappels	5
1.2.1	Ellipse et ellipsoïde	5
1.3	Le Potentiel W du champ réel de la pesanteur	7
1.4	Le Géoïde	8
1.5	Rappels d'astronomie	8
1.5.1	Le Repère local géodésique	9
1.5.2	La Trigonométrie Sphérique	9
1.6	Le Point de Laplace	9
1.7	L'Equation de Laplace	10
1.8	Station de Laplace	11
2	La Relation d'Observation d'un Azimut de Laplace en Géodésie 3D	12
2.1	Repères et Rotations	12
2.2	Applications	14
2.2.1	Matrice de passage du repère local géodésique au repère de référence (ω, X, Y, Z)	14
2.2.2	Comparaison des composantes d'un vecteur dans les repères géodésiques et "physiques"	15
2.2.3	Comparaison des repères ($M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0$) et ($M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$)	16
2.2.4	Les inconnues de la compensation par moindres carrés	16
2.2.5	Relations différentielles	17
2.2.6	Calcul de dAz	18
2.3	La relation d'observation correspondant à la détermination d'un azimut de Laplace	20
2.4	Corrections à Apporter à L'Azimut Astronomique Observé	21
2.5	Réduction au pôle moyen C.I.O. des déterminations d'azimut, de longitude et de latitude astronomiques	21
2.6	Coordonnées du pôle instantané	22
II	EXEMPLE DE CALCUL GEODESIQUE ANALYSE DE STRUCTURE DES	

RESULTATS EN GEODESIE TRIDIMENSIONNELLE	23
3 Introduction	24
3.1 Fonction Ecart	24
3.2 Notion de la Fonction Ecart en Géodésie Tridimensionnelle	26
4 Partie Théorique	30
4.1 Calculs Préliminaires	30
4.1.1 Schéma	30
4.1.2 Unités	30
4.1.3 Calculs des coordonnées approchées tridimensionnelles X, Y, Z	30
4.1.4 Calculs des coefficients des relations d'observations correspondant aux lectures des tours d'horizon, à la détermination d'un azimut de Laplace et à la mesure d'une base	31
4.1.5 Ecart- type des observations - Poids	33
4.1.6 Tours d'horizon : calculs avant la compensation par moindres carrés	33
4.1.7 Point de Laplace : Calculs avant compensation	34
4.1.8 Distance : Calcul avant compensation	34
4.1.9 La matrice A des relations d'observations	34
4.1.10 Matrice $N = A^T A$ et son inverse N^{-1}	35
4.1.11 Calculs de $\varphi, \lambda, X, Y, Z$ définitifs	35
4.2 Analyse de Structure d'un Segment	35
4.2.1 Analyse de la précision relative	35
4.2.2 Matrice de propagation des variances	36
4.2.3 Calcul de la matrice $C(A, B)$ des variances des inconnues	37
4.2.4 Formation de la matrice T des variances des inconnues	37
4.2.5 Erreurs d'orientations dV_{0A}, dV_{0B}	37
4.2.6 Ellipses d'erreurs aux points A et B	38
4.2.7 Orientation relative	39
4.2.8 Ellipse d'erreurs au sommet B Quand $(dV_{0A}, dx(A), dy(A))$ sont fixés	39
4.2.9 Etude de l'ellipse d'erreurs en M milieu du segment AB et les erreurs d'échelle et d'orientation	40
4.3 Analyse de Structure d'un Segment	41
4.3.1 Précisions absolues d'un segment	41
4.3.2 Matrice de variances des fonctions auxiliaires	41
4.3.3 Analyse des orientations des tours d'horizon	41
4.3.4 Ellipse d'erreurs au sommet A ou (B)	42
4.3.5 Ellipse d'erreurs en M milieu de AB	42
4.3.6 Erreurs d'échelle et d'orientation	42
4.4 Analyse de Structure d'un Triangle	42
4.4.1 Calcul de φ_G, λ_G et h_G	43
4.4.2 Etablissement de la matrice de propagation des variances	44
4.4.3 Calcul de la matrice du système (4.4.13)	46
4.4.4 Calcul de la matrice \mathcal{U} donnée par (4.4.14)	46
4.4.5 Calcul de la matrice \mathcal{R} (4.4.15)	46
4.4.6 Calcul du produit $\mathcal{U} \cdot \mathcal{R}$ (4.4.16)	46
4.4.7 Calcul de la matrice W de la loi de propagation des variances	46

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	4
4.4.8 Matrice des variance-covariance de $dx(G), dy(G), H, G, P$ et Q	46
4.4.9 Ellipse d'erreurs au centre de gravité G	46
4.4.10 Echelle/Orientation au point G	46
4.4.11 Déformation pure ou ovalisation	46
4.4.12 Ellipse au sommet A	47
4.4.13 Echelle/Orientation du côté AC	47
5 Exemple Numérique	48
5.0.1 Schéma	48
5.0.2 Calculs des coordonnées tridimensionnelles approchées	49
5.0.3 Calculs des coefficients des relations d'observation correspondant aux lectures des tours d'horizon, à la détermination d'un azimut de Laplace et à la mesure d'une base	49
6 Conclusions	51

Préface

Résumé

Dans la première partie de ce rapport, on présente l'intérêt du point de Laplace dans un réseau géodésique terrestre. En deuxième partie, nous traitons en géodésie tridimensionnelle, le calcul des éléments de structure d'un échantillon extrait du réseau géodésique terrestre tunisien et nous donnons en conclusion les qualités de ce réseau.

L'un des thèmes proposés pour le stage de fin de cycle était le problème d'orientation et de la mise à l'échelle d'un réseau géodésique primordial. Ainsi, nous avons étudié en première partie une méthode d'orientation d'un réseau géodésique : le point de Laplace, en donnant sa définition et en établissant la relation d'observation d'un point de Laplace en géodésie tridimensionnelle pour la compensation par la méthode des moindres carrés.

L'étude de la mise à l'échelle et l'orientation d'un réseau est restreinte à un bloc de quelques points géodésiques comportant des tours d'horizon, un point de Laplace et une base. La méthode suivie est de M. Dufour H.M. ([1], 1975), mais développée en géodésie tridimensionnelle. Elle est basée surtout sur l'utilisation des matrices variance-covariance et des ellipses d'erreurs, mais non applicable pour les grands réseaux.

Par ailleurs, nous avons tenu à développer certaines formules, ce qui facilitera la tâche du lecteur.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à M. Dufour H.M. pour son aide constante et les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui.

Je remercie également mon maître de stage Mme Le Cocq C. et tout le personnel du Département de Traitement de l'Information Géodésique qui m'ont aidé à suivre le stage dans de bonnes conditions.

Première partie

LE POINT DE LAPLACE

Chapitre 1

Le Point de Laplace

1.1 Introduction

"Le nombre des points de Laplace étant appelé à croître sensiblement dans les années à venir, étant donné qu'ils réalisent pour les orientations ce que les mesures au telluromètre réalisent pour les distances : des mesures absolues au lieu où l'on se trouve". Cette réflexion de H.M. Dufour aux années 60 montre bien la place et l'intérêt des points de Laplace dans l'orientation des réseaux géodésiques. Avec le développement de la géodésie spatiale et les techniques d'observations, les points de Laplace sont toujours présents dans les opérations d'orientations des réseaux géodésiques.

Notre étude comporte essentiellement l'établissement de l'équation de Laplace et la pose de la relation d'observation d'un azimut de Laplace en géodésie tridimensionnelle pour la compensation par la méthode des moindres carrés. Nous ne décrivons pas le mode opératoire et le calcul astronomique.

Nous commençons par donner des rappels et des définitions concernant les ellipses et les ellipsoïdes, le champs de potentiel, le géoïde et l'astronomie. Au troisième chapitre, nous définissons le point de Laplace et nous établissons l'équation de Laplace.

Dans le quatrième chapitre, nous comparons au début les repères locaux géodésiques et nous calculons la variation de l'azimut ; par suite, nous obtenons l'équation d'observation d'un azimut de Laplace dans la compensation par les moindres carrés. Nous terminons dans le chapitre cinq par l'étude des corrections à apporter à l'azimut astronomique observé.

1.2 Définitions et Rappels

1.2.1 Ellipse et ellipsoïde

Soit (Γ) l'ellipse dans le système orthonormé $X'OY'$ (Fig.1.1) :

- $OA = a$ demi-grand axe,

- $OB = b$ demi-petit axe.

$\widehat{m_1Im} = \varphi$ latitude géodésique ou ellipsoïdique, angle de la normale en m à (Γ) avec l'axe OX' ;

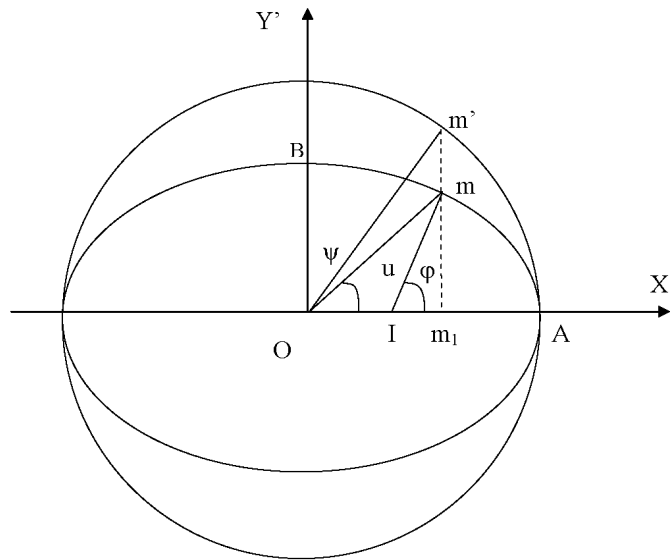


Figure 1.1 L'Ellipse

$\widehat{m_1Om'} = \psi$ latitude paramétrique ou réduite;
 $\widehat{m_1Om} = u$ latitude géocentrique.

Entre φ, ψ et u on a les relations suivantes :

$$tg\psi = \frac{b}{a}tg\varphi \tag{1.2.1}$$

$$tgu = \frac{b}{a}tg\psi \tag{1.2.2}$$

Les équations (1.2.1) et (1.2.2) donnent :

$$tgu = \frac{b^2}{a^2}tg\varphi \tag{1.2.3}$$

La première excentricité e est définie par :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{1.2.4}$$

et l'aplatissement f par :

$$f = \frac{a - b}{a} \tag{1.2.5}$$

En posant :

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2\varphi \tag{1.2.6}$$

l'expression du rayon de courbure en un point M de (Γ) est donnée par ρ tel que :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \quad (1.2.7)$$

L'élément infinitésimal de longueur de la méridienne de l'ellipse est :

$$ds = \rho d\varphi \Rightarrow s = \int_0^\varphi \rho(u) du \quad (1.2.8)$$

On considère maintenant l'ellipsoïde (Δ) engendré par la rotation de l'ellipse (Γ) autour de l'axe OY' . On définit le repère orthonormé $OXYZ$ tel que OX est perpendiculaire à OY' et OX, OY sont respectivement OY' et OZ' .

Un point m de l'ellipsoïde (Δ) a pour coordonnées rectangulaires dans le repère orthonormé $OXYZ$:

$$m \begin{cases} X = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases} \quad (1.2.9)$$

où N est le rayon de courbure de la deuxième section normale au point m de (Δ) :

$$N = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.2.10)$$

Le point $M / mM = h$ a ses coordonnées dans $OXYZ$:

$$M \begin{cases} X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases} \quad (1.2.11)$$

1.3 Le Potentiel W du champ réel de la pesanteur

Soit le repère orthonormé $OXYZ$ tel que O est le centre de gravité de la Terre et OZ son axe de rotation. Le plan OXZ contient le méridien de Greenwich.

Un point $P(X, Y, Z)$ est soumis au potentiel de gravitation V et au potentiel de la force centrifuge F et un potentiel négligeable en première approximation v dû aux astres, on a alors :

$$V(X, Y, Z) = Gm_P \int \int \int_{Terre} \frac{dm}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}} \quad (1.3.1)$$

où m_P est la masse de $P(X, Y, Z)$, G la constante universelle de gravitation et dm la masse élémentaire d'un point $T(x, y, z)$ de la Terre, et :

$$F(X, Y, Z) = \frac{1}{2} \Omega^2 (X^2 + Y^2) \quad (1.3.2)$$

où Ω est la vitesse de la rotation de la terre. Le potentiel total est :

$$W = V + F + v = W(X, Y, Z) \quad (1.3.3)$$

en général inconnu car on ne connaît pas la distribution des masses à l'intérieur de la Terre.

Par définition :

$$\vec{g} = \text{grad}W \quad (1.3.4)$$

est le champ réel ou "force de pesanteur", ses composantes dans $OXYZ$ sont :

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial X} \\ \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

L'ensemble des points $P(x, y, z)$ tel que $W = W_0 = \text{constante}$ est dit surface équipotentielle, de $W = W_0 \Rightarrow dW = \text{grad}W \cdot d\vec{P} = \vec{g} \cdot d\vec{P} = dW_0 = 0$ donc en tout point de la surface équipotentielle, le vecteur $\vec{g} = \text{grad}W$ est orthogonal. Une verticale est une courbe telle que en chaque point le vecteur \vec{g} est tangent à cette courbe en ce point. Les équations différentielles de cette courbe dans le repère orthonormé $OXYZ$ sont :

$$\frac{dX}{\frac{\partial W}{\partial X}} = \frac{dY}{\frac{\partial W}{\partial Y}} = \frac{dZ}{\frac{\partial W}{\partial Z}} \quad (1.3.6)$$

C'est en général une courbe gauche.

1.4 Le Géoïde

On définit le géoïde comme étant la surface équipotentielle $W = W_0$ qui correspond au niveau moyen des océans. L'un des buts de la géodésie est de déterminer la position de cette surface par rapport à la surface topographique. Le géoïde est une surface physique. Pour faciliter les calculs, il nous faut une surface mathématique très proche de la forme du géoïde. Cette surface est un ellipsoïde de révolution dont les dimensions seront choisies de façon à approximer le mieux, pour une région donnée, le géoïde (Fig.1.2).

1.5 Rappels d'astronomie

- La verticale du lieu est la direction donnée par un fil à plomb, la verticale ascendante est le zénith.
- L'horizon est le grand cercle rencontrant la verticale perpendiculairement.
- Le plan méridien du lieu est le plan défini par la verticale et l'axe du monde PP' (axe autour duquel la sphère céleste effectue son mouvement, appelé mouvement diurne).

Le plan méridien rencontre l'horizon en un point n , c'est le Nord géographique : le Nord. Le point opposé à n est le Sud, dans la direction perpendiculaire au plan méridien on a l'Est et l'Ouest. L'Est se trouve à droite de la ligne Sud-Nord.

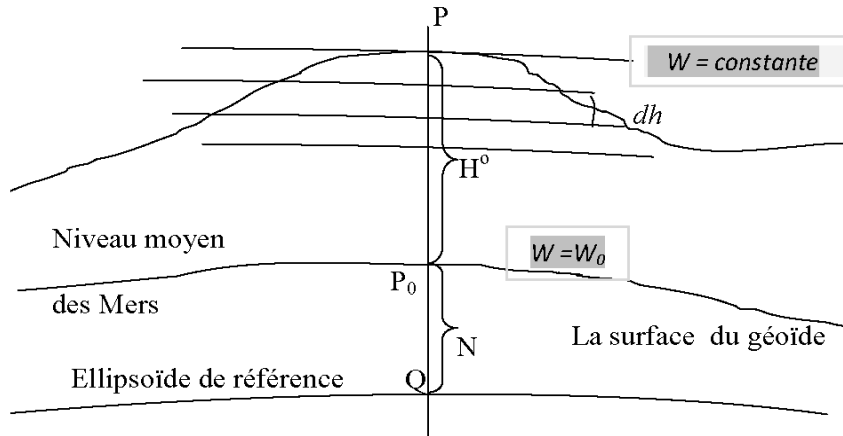


Figure 1.2 Le Géoïde

1.5.1 Le Repère local géodésique

On reprend le même ellipsoïde (Δ). Au point M on définit le repère local géodésique $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ tel que :

- \vec{p} est porté par la tangente au parallèle $\varphi = Cte$ et dirigé vers l'Est,
- \vec{q} est porté par la tangente au méridien $\lambda = Cte$ passant par m et dirigé vers le Nord,
- \vec{r} est porté par la normale en M à l'ellipsoïde et tel que $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ soit direct.

1.5.2 La Trigonométrie Sphérique

Formule fondamentale :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (1.5.1)$$

Formule en sinus-cosinus :

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (1.5.2)$$

Relation des sinus :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (1.5.3)$$

Pour les appliquer aux angles, remplacer A, B, C par $\pi - a, \pi - b, \pi - c$ et les côtés a, b, c par $\pi - A, \pi - B, \pi - C$.

1.6 Le Point de Laplace

En un point M de la surface terrestre, les mesures astronomiques déterminent la direction du zénith astronomique (ou la direction de la verticale du lieu) par φ_a latitude astronomique et λ_a longitude astronomique.

Au point M , on considère une sphère unité centrée en M , un axe parallèle à l'axe de rotation de la Terre, le plan équatorial le plan perpendiculaire en M à cet axe. On suppose avoir choisi un ellipsoïde de référence, la verticale du lieu perce la sphère en v , la normale à l'ellipsoïde passant par M perce la sphère en n . Soient $\xi = nv'$ et $\eta = nn'$, on a alors :

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g \quad (1.6.1)$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g)\cos\varphi \quad (1.6.2)$$

où φ_g latitude géodésique et λ_g longitude géodésique. ξ et η sont appelés les composantes de la déviation de la verticale au point M , dans le repère local géodésique $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ tel que (M, \vec{q}, \vec{r}) est le plan méridien géodésique passant par M et contenant l'axe ωz_1 de l'ellipsoïde, \vec{p} est tangent au parallèle passant par M , \vec{r} porté par la normale à l'ellipsoïde en M et \vec{q} tangent au méridien géodésique en M dirigé vers le Nord.

1.7 L'Equation de Laplace

On considère le plan horizontal en M , l'angle $\widehat{A_1 M A_2}$ est la différence des azimuts, dans le triangle rectangle $PA_1 A_2$ la formule de Neper donne :

$$\sin\varphi = \cotg(\lambda_a - \lambda_g)tg(Az_a - Az_g)$$

comme $\lambda_a - \lambda_g$ et $Az_a - Az_g$ sont petits, on a :

$$Az_a - Az_g = (\lambda_a - \lambda_g)\sin\varphi_a = \eta tg\varphi \quad (1.7.1)$$

(1.7.1) est dite équation de Laplace.

Les résultats du calcul d'une triangulation donnée se rapportent à l'ellipsoïde de référence utilisé. On peut définir la position de cet ellipsoïde par la donnée des éléments (a, f, ξ, η, N) en donnant sa position par rapport à un point fondamental P .

(ξ, η) définit la verticale au point P . N est la hauteur du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde en P ,

$$N = h - H \quad (1.7.2)$$

et H l'altitude de la surface topographique au-dessus du géoïde.

Les valeurs (ξ, η, N) sont indéterminées, en pratique on prendra au point fondamental P :

$$\xi = \eta = N = 0 \quad (1.7.3)$$

ce qui donne en P :

$$\varphi_g = \varphi_a \quad (1.7.4)$$

$$\lambda_g = \lambda_a \quad (1.7.5)$$

$$H = h \quad (1.7.6)$$

En utilisant (1.7.5) et l'équation de Laplace (1.7.1) on obtient :

$$Az_g = Az_a \quad (1.7.7)$$

Des relations (1.7.4), (1.7.5) et (1.7.7), on peut énoncer que :

- la verticale en P est confondue avec la normale au point $P(\varphi_g, \lambda_g)$ de l'ellipsoïde ;
- les plans méridiens astronomique et géodésique passant par P sont confondus ;
- l'axe ωz_1 est parallèle à l'axe de rotation de la Terre.

1.8 Station de Laplace

Dans un réseau géodésique, une station est dite station de **Laplace** chaque fois qu'on y observe un azimut astronomique qu'on ramène au méridien géodésique du lieu. Cet azimut est appelé azimut de Laplace. Ceci permet de préciser l'azimut géodésique sur l'ellipsoïde de référence, c'est-à-dire d'orienter sur l'ellipsoïde le réseau géodésique. De l'équation (1.7.1), en même station et pour deux ellipsoïdes différents on a l'égalité :

$$Az_g + (\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi_a = Az'_g + (\lambda_a - \lambda'_g) \sin \varphi_a = Az_a = \text{constante} \quad (1.8.1)$$

donc (1.8.1) est un invariant en un point.

Chapitre 2

La Relation d'Observation d'un Azimut de Laplace en Géodésie 3D

L'observation d'un azimut de Laplace s'effectue généralement aux points de premier et deuxième ordre d'un réseau géodésique afin d'orienter le réseau et de vérifier l'orientation en divers points du réseau séparés par des distances allant de 100 à 300 km suivant l'étendue du réseau. La relation d'observation d'un azimut de Laplace est insérée avec les relations d'observations des tours d'horizons, des mesures de bases du réseau primordial et s'il y a lieu avec les relations d'observations des points Doppler, pour calculer la compensation des coordonnées. Les calculs se font en géodésie tridimensionnelle.

2.1 Repères et Rotations

On considère le référentiel terrestre particulier : le système CIO-BIH. C'est un repère orthonormé (G, X, Y, Z) tel que :

- G est le centre de la masse de la Terre ;
- l'axe GZ prend la position CIO (Conventional International Origine) position moyenne du pôle instantané Nord entre les dates 1900.0 et 1905.0 qui était adoptée par l'Union Géodésique et Géodésique internationale (UGGI) en 1967 et reprise aussi lors de la l'adoption du nouveau système de référence 1980 (au lieu du système de référence de 1967) par la même organisation en 1979.
- le plan GZX défini comme le méridien origine du système du Bureau International de l'Heure (B.I.H).

On fait le choix d'un ellipsoïde (E, a, f) et on définit un système géodésique de référence (ω, X_1, Y_1, Z_1) :

- ω le centre de l'ellipsoïde (E) ,
- l'axe ωZ_1 est sensiblement parallèle à l'axe GZ de façon que (G, X, Y, Z) et (ω, X_1, Y_1, Z_1) soient sensiblement parallèles.

Soit M un point de la surface terrestre :

$$M_{GXYZ} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} ; \quad \omega_{GXYZ} = \begin{vmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{vmatrix} ; \quad M_{\omega X_1 Y_1 Z_1} = \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix} \quad (2.1.1)$$

Du fait des erreurs dans les mesures astronomiques au point fondamental, le passage de (ω, X_1, Y_1, Z_1) à (G, X, Y, Z) se fait par :

- une translation amenant ω le centre de l'ellipsoïde (E) au centre des masses G ,
- une rotation de matrice R qui fait coïncider les axes des deux repères,
- enfin, une homothétie pour tenir compte des erreurs de mise à l'échelle du réseau géodésique et du système d'altitude adopté.

On a donc l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{pmatrix} + (1+k) \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & \tau \\ +\epsilon & 1 & \varpi \\ -\tau & -\varpi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

où k facteur d'échelle et (ϵ, τ, ϖ) les angles des petites rotations.

Les méthodes classiques de la géodésie ne permettent pas de déterminer les inconnues $(X_t, Y_t, Z_t, k, \epsilon, \tau, \varpi)$. Seules les méthodes dynamiques et spatiales pourront un jour les déterminer avec une grande précision pour chaque référence géodésique. Dans la suite des calculs, on travaille dans le système géodésique de référence (ω, X_1, Y_1, Z_1) qu'on suppose parallèle au référentiel (CIO-BIM) et qu'on notera (ω, X, Y, Z) .

Soit $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ le repère orthonormé géodésique local au point $M(\varphi, \lambda, h)$ de l'ellipsoïde (E).

On passe de $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ à (ω, X, Y, Z) par deux rotations R_1 et R_2 :

- $R_1, \varphi, +$ autour de \vec{p} ,

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

- $R_2, \lambda, -$ autour de ωZ ,

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

D'où $R(\varphi, \lambda) = R_2 R_1$:

$$R(\varphi, \lambda) = R_2 R_1 = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \sin\varphi & \cos\lambda \cos\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \sin\varphi & \sin\lambda \cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

$R(\varphi, \lambda)$ est une matrice de rotation donc orthogonale :

$$R^{-1}(\varphi, \lambda) = R^T(\varphi, \lambda) \quad (2.1.6)$$

Soit M' un deuxième point tel que :

$$MM'_{(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; \quad MM'_{(\omega, X, Y, Z)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

d'où la relation :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

On utilisera souvent les relations (2.1.5),(2.1.6) et (2.1.7).

Les observations astro-géodésiques se font dans le repère local " physique" $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ où $\vec{\nu}$ est le vecteur unitaire porté par la verticale et $(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ sensiblement parallèles à (\vec{p}, \vec{q}) . Le vecteur $\vec{\nu}$ a pour composantes $(\eta, \xi, 1)^T$ dans le repère local géodésique $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$.

Le passage du repère $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ à $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ se fait à l'aide de :

$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \\ \vec{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\eta tg\varphi & \eta \\ \eta tg\varphi & 1 & \xi \\ -\eta & -\xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \\ \vec{\nu} \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

avec $\xi = \varphi_a - \varphi_g$; $\eta = (\lambda_a - \lambda_g)\cos\varphi$ et $\varphi = \widehat{\mu M Z}$ la latitude vraie et :

$$V = I + \partial R \Rightarrow V^{-1} = I - \partial R$$

avec :

$$\partial R = \begin{pmatrix} 0 & -\eta tg\varphi & \eta \\ \eta tg\varphi & 0 & \xi \\ -\eta & -\xi & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

avec I la matrice unité d'ordre 3.

2.2 Applications

2.2.1 Matrice de passage du repère local géodésique au repère de référence (ω, X, Y, Z)

D'un point M dont la position approchée est M_0 , on vise un point M' dont M'_0 est la position approchée. On peut écrire que :

$$\begin{aligned} dM &= M_0 M \\ dM' &= M'_0 M' \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

d'où :

$$dM_{\omega, X, Y, Z} = \begin{pmatrix} x = X - X_0 \\ y = Y - Y_0 \\ z = Z - Z_0 \end{pmatrix}; \quad dM'_{\omega, X, Y, Z} = \begin{pmatrix} x' = X' - X'_0 \\ y' = Y' - Y'_0 \\ z' = Z' - Z'_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

Dans le repère local géodésique approché $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$, dM a les composantes suivantes :

$$\begin{aligned} p_0 &= (N(\varphi_0) + h_0)(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi \\ q_0 &= (\rho(\varphi_0) + h_0)(\varphi - \varphi_0) \\ r_0 &= h - h_0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

où (φ, λ, h) correspondent au point M . En utilisant (2.1.7), on a entre les composantes de dM dans $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$ et dans (ω, X, Y, Z) la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(\varphi_0, \lambda_0) \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

Le problème est de déterminer (p_0, q_0, r_0) et par suite x, y, z ce qui donne

$$X = X_0 + x \quad ; Y = Y_0 + y \quad ; Z = Z_0 + z$$

et en utilisant (1.2.11) on calculera (φ, λ, h) qui peuvent servir pour une représentation plane conforme de la région.

2.2.2 Comparaison des composantes d'un vecteur dans les repères géodésiques et "physiques"

Les observations sont mesurées dans le repère "physique" $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$. On vise le point M' . On mesure sa distance zénithale vraie $z_v = \widehat{M\nu, MM'}$, l'azimut vrai Az_v de la direction MM' et éventuellement la distance $S = MM'$.

On a :

$$MM'_{(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})} = \begin{pmatrix} L_v = S \sin z_v \sin Az_v \\ M_v = S \sin z_v \cos Az_v \\ N_v = S \cos z_v \end{pmatrix} \text{ et } MM'_{(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

avec d'après (2.1.8) :

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

En posant :

$$MM'_{(\omega, X, Y, Z)} = \begin{pmatrix} \Delta X = X' - X \\ \Delta Y = Y' - Y \\ \Delta Z = Z' - Z \end{pmatrix}$$

et d'après (2.1.7) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = R(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{pmatrix} = V^{-1} R^T(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

or $V^{-1} = I - \partial R$, la relation (2.2.8) devient :

$$\begin{pmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{pmatrix} = R^T(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} - \partial R \cdot R^T(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

Le second terme (2.2.9) peut être calculé aux points où on peut mesurer la déviation de la verticale, d'où la différence entre les composantes dans le repère géodésique local et dans le repère "physique" local :

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{pmatrix} = \partial R \cdot R^T(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

quantité nulle au point fondamental.

Dans le repère local approché $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$, MM' a les composantes :

$$MM'_{(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)} = \begin{pmatrix} L' = S \sin z \sin Az \\ M' = S \sin z \cos Az \\ N' = S \cos z \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

2.2.3 Comparaison des repères $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$ et $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$

On a $M_0(\varphi_0, \lambda_0)$ et $M(\varphi_0 + d\varphi, \lambda_0 + d\lambda)$, la matrice de rotation du passage de $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ à $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$ est :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\varphi d\lambda & \cos\varphi d\lambda \\ \sin\varphi d\lambda & 1 & d\varphi \\ -\cos\varphi d\lambda & -d\varphi & 1 \end{pmatrix} = I + \partial\mathcal{M} \quad (2.2.12)$$

Entre $MM' = (L, M, N)^T$ dans $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ et $MM' = (L', M', N')^T$ dans $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$; on a la relation :

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + \partial\mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

2.2.4 Les inconnues de la compensation par moindres carrés

M_0 et M étant voisins, les valeurs $d\lambda = \lambda - \lambda_0$ et $d\varphi = \varphi - \varphi_0$ sont infiniment petits, par suite la matrice \mathcal{M} se réduit à la matrice unité I et on peut dire que le repère $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$ et $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ sont parallèles. Par conséquent, d'après (2.2.13) on a :

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \sin z \sin Az \\ S \sin z \cos Az \\ S \cos z \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

et en utilisant (2.2.6) on obtient :

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S \sin z \sin Az \\ S \sin z \cos Az \\ S \cos z \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} S \sin z_v \sin Az_v \\ S \sin z_v \cos Az_v \\ S \cos z_v \end{pmatrix} \quad (2.2.15)$$

Les inconnues de la compensation sont la distance zénithale z , l'azimut Az et S puisqu'ils sont la distance zénithale, l'azimut et la distance dans le repère local $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ rapporté à l'ellipsoïde de référence (E) .

2.2.5 Relations différentielles

Le vecteur approché $M_0M'_0$ a les composantes suivantes dans $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$ ou $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$:

$$M_0M'_0 = \begin{pmatrix} L_0 = S_0 \sin z_0 \sin Az_0 \\ M_0 = S_0 \sin z_0 \cos Az_0 \\ N_0 = S_0 \cos z_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

Si on pose :

$$\Delta X_0 = X'_0 - X_0; \quad \Delta Y_0 = Y'_0 - Y_0; \quad \Delta Z_0 = Z'_0 - Z_0$$

On a en utilisant (2.2.7) :

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = R^T(\varphi_0, \lambda_0) \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

Soient :

$$\begin{aligned} dAz &= Az - Az_0 \\ dz &= z - z_0 \\ dS &= S - S_0 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

et :

$$\begin{aligned} \delta Az &= Az - Az_v \\ \delta z &= z - z_v \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Les relations (2.2.18) expriment une variation de MM' dans $(M_0, \vec{p}_0, \vec{q}_0, \vec{r}_0)$ ou $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, par contre les relations (2.2.19) s'obtiennent en différenciant (2.2.15).

Calculons d'abord δz et δAz , les équations (2.2.15) peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$F(z, Az) = (I + \partial \mathfrak{R}).F(z_v, Az_v) \quad (2.2.20)$$

où :

$$F(z, Az) = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}$$

et :

$$F(z_v, Az_v) = \begin{pmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{pmatrix}$$

et ∂R définie par (2.1.9). Or (2.2.20) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} F(z, Az) - F(z_v, Az_v) &= (z - z_v) \frac{\partial F}{\partial z}(z_v, Az_v) + (Az - Az_v) \frac{\partial F}{\partial Az}(z_v, Az_v) \\ &= \delta z \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(z_v, Az_v) + \delta Az \cdot \frac{\partial F}{\partial Az}(z_v, Az_v) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

On obtient δz en utilisant la troisième composante de l'équation (2.2.21) d'où :

$$- \sin z_v (\eta \sin Az + \xi \cos Az) = -\delta z \sin z_v \Rightarrow \delta z = \eta \sin Az + \xi \cos Az \quad (2.2.22)$$

Pour δAz on utilise une combinaison linéaire de la première et la deuxième composante de (2.2.21), on obtient :

$$\delta Az = \cot g z (\eta \cos Az - \xi \sin Az) - \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (2.2.23)$$

L'équation (2.2.23) peut donner l'équation de Laplace dans le cas d'une observation d'un azimut de Laplace. En effet, on a $z \approx 100$ gr, d'où :

$$\delta Az = -\eta \operatorname{tg} \varphi = -(\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi = -(\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi$$

$\delta Az = Az - Az_v$ de la définition de Az et Az_v , on a : $Az = Az_g$ et $Az_v = Az_a$ et par suite :

$$Az_a - Az_g = (\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi$$

C'est bien l'équation de Laplace (1.7.1).

Dans les observations des tours d'horizon aux points ayant (φ_a, λ_a) connues, on ajoute δAz au Az observé. Car $Az = \delta Az + Az_v$ et $Az_v = V_{om} + l$ où $l =$ lecture du tour d'horizon.

2.2.6 Calcul de dAz

Soit le repère orthonormé direct (M, i, j, k) tel que :

$$i = \frac{MM'}{\|MM'\|}$$

j dans le plan MM', \vec{r} et orthogonal à i, k dans le plan horizontal M, \vec{p}, \vec{q} .

Dans $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, les vecteurs i, j, k ont les composantes suivantes :

$$i = \begin{pmatrix} \sin z \sin Az \\ \sin z \cos Az \\ \cos z \end{pmatrix}; \quad j = \begin{pmatrix} -\cos z \sin Az \\ -\cos z \cos Az \\ \sin z \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} \cos Az \\ -\sin Az \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient dAz par :

$$dAz = \frac{k \cdot dMM'}{MM' \sin z} = \frac{k \cdot (dM' - dM)}{S \cdot \sin z} \quad (2.2.24)$$

Soit :

$$dM_{(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

d'où :

$$k \cdot dM = p \cdot \cos Az - q \cdot \sin Az \quad (2.2.25)$$

Exprimons maintenant les composantes (p'', q'', r'') ^T de dM' dans $(M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ en fonction de (p', q', r') ^T de dM' dans $(M', \vec{p}', \vec{q}', \vec{r}')$. D'après (2.1.7), on a :

$$dM'_{\omega_{XYZ}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix} \quad (2.2.26)$$

Et :

$$dM'_{\omega XYZ} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\varphi', \lambda') \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} \quad (2.2.27)$$

Les équations (2.2.26) et (2.2.27) sont égales, d'où :

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix} = R(\varphi, \lambda)^T . R(\varphi', \lambda') \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

En posant $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\lambda & -\sin\varphi' \sin\Delta\lambda & \cos\varphi' \sin\Delta\lambda \\ \sin\varphi \sin\Delta\lambda & \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos\Delta\lambda & \cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi' \cos\Delta\lambda \\ -\cos\varphi \sin\Delta\lambda & \sin\varphi \cos\varphi' - \cos\varphi \sin\varphi' \cos\Delta\lambda & \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos\Delta\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} \quad (2.2.28)$$

Par suite :

$$k.dM' = p'' . \cos Az - q'' . \sin Az$$

Soit :

$$k.dM' = p' (\cos\Delta\lambda . \cos Az - \sin\varphi . \sin\Delta\lambda \sin Az) + q' (-\cos Az \sin\varphi' \sin\Delta\lambda - \sin Az . \sin\varphi \sin\varphi' \cos\Delta\lambda - \sin Az \cos\varphi \cos\varphi') + r' [\cos\varphi' (\cos Az \sin\Delta\lambda + \sin Az \sin\varphi \cos\Delta\lambda) - \sin Az \cos\varphi \sin\varphi'] \quad (2.2.29)$$

Exprimons les coefficients de p' , q' et r' de (2.2.29) en fonction de Az' azimut de la visée inverse et φ' , λ' . Pour cela, on utilise les formules de la trigonométrie sphérique en première approximation.

Calcul du coefficient de p'

$$C_{p'} = -(-\cos Az \cos\Delta\lambda - \sin Az \sin\varphi \sin\Delta\lambda)$$

La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique appliquée aux angles donne :

$$C_{p'} = -\cos Az' \quad (2.2.30)$$

Calcul du coefficient de q'

$$C_{q'} = -\sin\varphi' (\cos Az \sin\Delta\lambda + \sin Az \sin\varphi \cos\Delta\lambda) - \sin Az \cos\varphi \cos\varphi'$$

En utilisant la formule en sinus cosinus appliquée aux angles , on a :

$$\cos Az \sin\Delta\lambda + \sin Az . \sin\varphi . \cos\Delta\lambda = \sin\varphi' . \sin(2\pi - Az') = -\sin\varphi' . \sin Az' \quad (2.2.31)$$

d'où :

$$C_{q'} = \sin^2 \varphi' \sin Az' - \sin Az \cos\varphi \cos\varphi' = \sin Az' - \cos\varphi' (\sin Az' \cos\varphi' + \cos\varphi \sin Az)$$

En appliquant la formule des sinus, l'expression entre parenthèses est nulle et on a alors :

$$C_{q'} = \sin Az' \quad (2.2.32)$$

Calcul du coefficient de r'

$$\begin{aligned} C_{r'} &= \cos\varphi'(\cos Az \sin\Delta\lambda + \sin Az \sin\varphi \cos\Delta\lambda) - \sin\varphi' \sin Az \cos\varphi \\ &= \cos\varphi' \sin\varphi' \sin(2\pi - Az') - \sin Az \cos\varphi \sin\varphi' \end{aligned}$$

en utilisant (2.2.31), on obtient :

$$C_{r'} = -\sin\varphi'(\sin Az' \cos\varphi' + \cos\varphi \sin Az) = -\sin\varphi'.0 = 0$$

d'où :

$$C_{r'} = 0 \quad (2.2.33)$$

On obtient alors

$$k.dM' = p'C_{p'} + q'C_{q'} + r'C_{r'} = -p'\cos Az' + q'\sin Az'$$

d'où l'expression de dAz :

$$dAz = \frac{k.dMM'}{S \sin z} = \frac{1}{S \sin z}(-p'\cos Az' + q'\sin Az') \quad (2.2.34)$$

Si on pose :

$$dx(M) = p, \quad dy(M) = q, \quad dx'(M') = p', \quad dy'(M') = q'$$

(2.2.34) s'écrit :

$$dAz = -\frac{\cos Az}{S \sin z} dx(M) + \frac{\sin Az}{S \sin z} dy(M) - \frac{\cos Az'}{S \sin z} dx'(M') + \frac{\sin Az'}{S \sin z} dy'(M') \quad (2.2.35)$$

$dx(M), dy(M)$ les inconnues de la station, et $dx'(M'), dy'(M')$ les inconnues du point visé.

2.3 La relation d'observation correspondant à la détermination d'un azimut de Laplace

Soit σ l'écart-type de l'observation d'un azimut de Laplace, la relation d'observation s'écrit :

$$\frac{1}{\sigma}(dAz + Az_{\text{calculé}} - Az_{\text{observé}}) = v = \text{résidu} \quad (2.3.1)$$

Soit en utilisant (2.2.35) :

$$\frac{1}{\sigma} \left(-\frac{\cos Az}{S \sin z} dx(M) + \frac{\sin Az}{S \sin z} dy(M) - \frac{\cos Az'}{S \sin z} dx'(M') + \frac{\sin Az'}{S \sin z} dy'(M') + Az_c - Az_0 \right) = v \quad (2.3.2)$$

Dans (2.3.2), on prendra Az l'azimut de la visée au point de station M , Az' l'azimut inverse calculé, z la distance zénithale calculée et S la distance corde MM' .

Dans la détermination de l'azimut de Laplace d'une direction MM' on tachera d'avoir z proche de 100 gr.

2.4 Corrections à Apporter à L'Azimut Astronomique Observé

Les observations astronomiques pour déterminer φ_a , λ_a et Az_a utilisent la position instantanée du pôle qui varie en fonction du temps. Comme on opère en géodésie tridimensionnelle et on utilise la position moyenne du pôle dite C.I.O., on doit alors apporter aux valeurs observées des corrections dues au mouvement du pôle et ceci en utilisant les coordonnées du pôle instantané par rapport à la position C.I.O., diffusées par le S.I.M.P. (Service International du Mouvement du Pôle) et le Bureau International de l'Heure (B.I.H.).

On admet que le méridien Origine de Greenwich reste fixe.

2.5 Réduction au pôle moyen C.I.O. des déterminations d'azimut, de longitude et de latitude astronomiques

On se place au point A où on observe φ_a , λ_a et l'azimut d'une direction AM . Soit P_m le pôle moyen C.I.O. et P_i le pôle instantané.

P_mxy est un repère orthonormé tel que P_mx est tangent au méridien origine de Greenwich au pôle P_m .

P_my est dans le plan tangent à la terre au P_m et dirigé vers l'Ouest du méridien origine de Greenwich.

Soit δAz la correction de l'azimut astronomique on a :

$$Az_a \text{ observé CIO} = Az_a \text{ observé} - \delta Az \quad (2.5.1)$$

où δAz est l'angle dièdre $\widehat{P_mAP_i}$. Le pôle P_i a ses coordonnées polaires (p, μ) , $x = p \cos \mu$, $y = p \sin \mu$ dans P_mxy . Dans le triangle AP_iP_m , la relation des sinus donne :

$$\frac{\sin \delta Az}{\sin p} = \frac{\sin(\mu + \lambda_a)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_a)}$$

Comme $\sin \delta Az = \delta Az + o(\delta Az)$ et $\sin p = p + o(p)$ (P_i reste dans un cercle de rayon 15 m environ et de centre p_m) d'où :

$$\delta Az = \frac{p \sin(\mu + \lambda_a)}{\cos \varphi_a} = \frac{p \sin \mu \cos \lambda_a + p \cos \mu \sin \lambda_a}{\cos \varphi_a} = \frac{x \cos \lambda_a + y \sin \lambda_a}{\cos \varphi_a}$$

soit :

$$\delta Az = \frac{x \cos \lambda_a + y \sin \lambda_a}{\cos \varphi_a} \quad (2.5.2)$$

De même, on démontre que les corrections $\delta \varphi$ et $\delta \lambda$ sont :

$$\delta \varphi = x \cos \lambda_a - y \sin \lambda_a \quad (2.5.3)$$

$$\delta \lambda = \operatorname{tg} \varphi_a (x \sin \lambda_a + y \cos \lambda_a)$$

2.6 Coordonnées du pôle instantané

Le calcul des coordonnées du pôle P_i est fait à la suite d'observations faites dans plusieurs observatoires dispersés dans le monde. Les techniques utilisées sont soit les mesures astronomiques sur les étoiles, soit les observations des satellites artificiels. De nouvelles méthodes sont en cours d'application comme l'utilisation des satellites Doppler.

Les coordonnées sont données tous les cinq jours à une même heure ($OhTU$), exprimées en secondes sexagésimales. Les coordonnées sont fournies sous deux formes : valeurs brutes et valeurs déterminées par un lissage. La publication des coordonnées x, y du pôle P_i se fait à raison de deux à trois mois.

Deuxième partie

**EXEMPLE DE CALCUL GEODESIQUE
ANALYSE DE STRUCTURE DES
RESULTATS EN GEODESIE
TRIDIMENSIONNELLE**

Chapitre 3

Introduction

A partir de " Exemple de calcul géodésique, analyse de structure des résultats " de H.M. Dufour [1] concernant l'analyse de structure d'un réseau géodésique, on présente dans cette note une étude similaire mais dans l'option de la géodésie tridimensionnelle. Ceci a pour base l'utilisation en un point du repère géodésique local $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ dans la compensation par les moindres carrés. Les relations d'observations sont celles de la géodésie tridimensionnelle.

Cette étude permettra d'analyser les fondements d'un réseau géodésique de base ou primordial et de comparer les déformations que subit le réseau en des points séparés par de longues distances.

Dans notre exemple on traitera les diverses déformations qui altèrent les éléments (angles, côtés, orientation) d'un bloc de quelques points d'un réseau géodésique et les précisions relatives et absolues de ces éléments. On utilisera la notion d'ellipse d'erreurs en un point donné.

3.1 Fonction Ecart

Le réseau réel (RR) inconnu est approché de façon aléatoire par un réseau calculé (RC). le point M d'un point approché M_0 dans le repère (RC) ne coïncide pas avec sa position dans (RR).

Soit (x, y) les coordonnées de M avec origine M_0 dans le repère (RC) et (dx_M, dy_M) les vraies coordonnées de compensation dans le réseau (RR) et (dx_0, dy_0) les inconnues de compensation dans le (RC) obtenues par les moindres carrés, on peut écrire :

$$dx_M = dx_0 + ax + by \quad (3.1.1)$$

$$dy_M = dy_0 + a'x + b'y \quad (3.1.2)$$

ou encore sous la forme :

$$dx_M = r_0 + x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} \quad (3.1.3)$$

$$dy_M = s_0 + x \frac{\partial s}{\partial x} + y \frac{\partial s}{\partial y} \quad (3.1.4)$$

Les fonctions $r(x, y)$ et $s(x, y)$ sont appelées **fonctions écarts**.

On définit les coefficients H, G, P et Q par :

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \right) \quad (3.1.5)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (3.1.6)$$

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} \right) \quad (3.1.7)$$

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (3.1.8)$$

Ce qui donne :

$$dx_M = dx_0 + Hx + Gy + Px + Qy \quad (3.1.9)$$

$$dy_M = dy_0 - Gx + Hy + Qx - Py \quad (3.1.10)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dx_M - dx_0 \\ dy_M - dy_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & G \\ -G & H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

Soit :

$$\Delta = A.X + B.X \quad (3.1.12)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} H & G \\ -G & H \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} \quad (3.1.13)$$

On note que les matrices A et B sont linéairement indépendantes si A et B ne sont pas nulles simultanément. Soit :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

avec :

$$X' = A.X \quad (3.1.14)$$

En écrivant (3.1.14) en notation complexe avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient :

$$z' = (H - iG)z \quad (3.1.15)$$

En posant :

$$\alpha = H - iG \quad (3.1.16)$$

l'équation (3.1.15) s'écrit :

$$z' = \alpha z \quad (3.1.17)$$

La fonction $f : z \mapsto \alpha z$ est une fonction holomorphe donc analytique et par suite l'application à X associée AX est une transformation conforme c'est-à-dire conserve les angles.

Dans l'espace des vecteurs propres de A , on peut écrire la matrice A sous la forme :

$$A = H.I + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

avec I la matrice unité d'ordre 2.

L'application $X \rightarrow X' = A.X$ donne :

$$X' = H.X + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} .X \quad (3.1.19)$$

Si dans (3.1.19) $G = 0$, l'application se réduit à une homothétie vectorielle de rapport H . Le facteur H est appelé **erreur relative d'échelle** et G **erreur relative d'orientation**.

Revenons à la matrice B , le deuxième terme de (3.1.12) s'écrit en notation complexe :

$$z' = \beta \bar{z} \quad (3.1.20)$$

où $\bar{z} = x - iy$ le conjugué de z avec :

$$\beta = P + iQ \quad (3.1.21)$$

La fonction $z' = \beta \bar{z}$ n'est pas une fonction holomorphe (car $\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = \beta \neq 0$) donc non analytique, et par suite elle ne représente pas une transformation conforme. Cette transformation donne une déformation appelée **ovalisation** (H.M. Dufour, [2]).

La matrice B a une trace nulle, propriété invariante par rotation, il existe une base de vecteurs où B s'écrit :

$$B' = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \quad (3.1.22)$$

avec :

$$v^2 = P^2 + Q^2 \quad (3.1.23)$$

v est dit **le coefficient d'ovalisation**. P et Q définissent **l'erreur relative d'ovalisation**.

3.2 Notion de la Fonction Ecart en Géodésie Tridimensionnelle

Nous allons essayer d'introduire la notion de fonctions écarts en géodésie tridimensionnelle. Partant de la même idée que celle pour définir le système d'équations (3.1.1) et (3.1.2), on peut écrire dans le repère orthonormé (O, X_1, Y_1, Z_1) :

$$dX_M = dX_0 + aX + bY + cZ \quad (3.2.1)$$

$$dY_M = dY_0 + a'X + b'Y + c'Z \quad (3.2.2)$$

$$dZ_M = dZ_0 + a''X + b''Y + c''Z \quad (3.2.3)$$

où dX_M, dY_M et dZ_M sont les inconnues de compensation dans le réseau réel (RR) et dX_0, dY_0 et dZ_0 les inconnues de compensation dans le réseau calculé (RC) et X, Y, Z les coordonnées de M dans le repère (M_0, X, Y, Z) parallèle à (O, X_1, Y_1, Z_1) et a, b, c, \dots, c'' sont

des constantes.

Le système (3.2.1-3.2.2-3.2.3) s'écrit aussi :

$$dX_M = U_1(M_0) + X \frac{\partial U_1}{\partial X} + Y \frac{\partial U_1}{\partial Y} + Z \frac{\partial U_1}{\partial Z} \quad (3.2.4)$$

$$dY_M = U_2(M_0) + X \frac{\partial U_2}{\partial X} + Y \frac{\partial U_2}{\partial Y} + Z \frac{\partial U_2}{\partial Z} \quad (3.2.5)$$

$$dZ_M = U_3(M_0) + X \frac{\partial U_3}{\partial X} + Y \frac{\partial U_3}{\partial Y} + Z \frac{\partial U_3}{\partial Z} \quad (3.2.6)$$

Les fonctions U_1, U_2, U_3 sont appelées **Fonctions Ecarts**. On écrit le système précédent sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & \frac{\partial U_1}{\partial Y} & \frac{\partial U_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_2}{\partial X} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & \frac{\partial U_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_3}{\partial X} & \frac{\partial U_3}{\partial Y} & \frac{\partial U_3}{\partial Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

Soit :

$$U = \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \quad (3.2.8)$$

la matrice de terme général $\frac{\partial U_i}{\partial X_j}$, on peut écrire :

$$U = S + A \quad (3.2.9)$$

$$\text{avec } S = \frac{1}{2}(U + U^T); \quad A = \frac{1}{2}(U - U^T) \quad (3.2.10)$$

T désigne la transposée. Alors les matrices S et A sont respectivement symétrique et anti-symétrique.

Par analogie avec la théorie de l'élasticité (Landau L. et Lifchitz E. [3], Sanso F. [4],1982), on appelle :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.2.11)$$

le **tenseur de déformation** du réseau.

La matrice S étant symétrique, elle peut être réduite en chaque point à ses axes principaux directions des vecteurs propres. Cela signifie qu'on peut choisir en chaque point donné un système de vecteurs orthogonaux telle que la matrice S soit diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} U^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & U^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & U^{(3)} \end{pmatrix} \quad (3.2.12)$$

L'effet de S se traduit par :

$$d\mathcal{X} = U^{(1)}\mathcal{X} \quad (3.2.13)$$

$$d\mathcal{Y} = U^{(2)}\mathcal{Y} \quad (3.2.14)$$

$$d\mathcal{Z} = U^{(3)}\mathcal{Z} \quad (3.2.15)$$

Le système (3.2.13-3.2.14-3.2.15) nous donne un ensemble de trois déformations indépendantes dans trois directions orthogonales. Chacune de ces déformations est une homothétie de rapport $U^{(i)}$.

Etudions maintenant la matrice antisymétrique $A = (a_{ij})$. On sait qu'il existe un vecteur Ω tel que :

$$A.X = \Omega \wedge X \quad (3.2.16)$$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

Alors l'équation (3.2.7) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

Soit l'élément S_{12} , on a par définition :

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right)$$

or $X_1 = X$, $X_2 = Y$ donc :

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X} \right) = Q_{XY} \quad (3.2.19)$$

C'est-à-dire le coefficient défini par (3.1.8) dans le plan OXY . En utilisant les équations (3.1.3) à (3.1.8), on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & Q_{XY} & Q_{ZX} \\ Q_{XX} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & Q_{ZX} \\ Q_{ZX} & Q_{YZ} & \frac{\partial U_3}{\partial Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & G_{XY} & -G_{ZX} \\ -G_{XY} & 0 & G_{YZ} \\ G_{ZX} & -G_{YZ} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Le résultat remarquable est la forme de la matrice antisymétrique A . En effet, on obtient :

$$\Omega = - \begin{pmatrix} G_{YZ} \\ G_{ZX} \\ G_{XY} \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

La première composante de Ω représente la correction relative d'orientation de la projection de M sur le plan OY_1Z_1 . La matrice A représente la rotation infinitésimale du repère $MXYZ$ parallèle à $OX_1Y_1Z_1$. Ainsi, la définition du facteur G dans l'introduction est justifiée.

Dans (3.2.20), on peut introduire les termes H_{XY}, P_{XY}, \dots grâce aux éléments diagonaux de S . En effet, soit par exemple $\left(\frac{\partial U_1}{\partial X}\right)$, il peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial X}\right) = H_{XY} + P_{XY} \text{ ou } \left(\frac{\partial U_1}{\partial X}\right) = H_{ZX} - P_{ZX} \quad (3.2.21)$$

Notons que l'équation (3.2.21) nécessite pour déterminer les neuf inconnues au moins trois points.

Chapitre 4

Partie Théorique

Dans cette partie, on traitera d'abord des calculs préliminaires qui comportent les calculs des coordonnées rectangulaires des points géodésiques du réseau étudié, de la compensation par moindres carrés, de la matrice normale et son inverse et des coordonnées définitives des points. Pour l'analyse du réseau choisi, on étudiera l'analyse de structure et la précision absolue d'un segment du réseau.

4.1 Calculs Préliminaires

4.1.1 Schéma

Il s'agit d'étudier un bloc fermé de cinq points géodésiques de premier ordre du réseau géodésique tunisien. Le schéma comporte une mesure de base, une détermination d'un azimut de Laplace et des observations de tours d'horizon. Un seul point a les coordonnées définitives et à V_0 libre. On donne les coordonnées géodésiques approchées des quatre points.

4.1.2 Unités

On utilise le grade dans les calculs des tours d'horizon. φ et λ sont exprimées en gr. Dans la compensation par moindres carrés X, Y, Z sont en km et les distances aussi. Les inconnues de compensation dx, dy sont en m, les dV_0 en $mrd = 10^{-3} = 632.620 dmgr = 632.620''$

4.1.3 Calculs des coordonnées approchées tridimensionnelles X, Y, Z

On part de φ_0 et λ_0 géodésiques approchées et de h_0 l'altitude approchée ellipsoïdique. L'ellipsoïde de référence est celui de Clarke Français 1880 avec : $a = 6378,249\,200$ km et l'aplatissement $f = 0,003\,407\,54952$

Les coordonnées approchées (X_0, Y_0, Z_0) sont données par :

$$\begin{aligned} X_0 &= (N(\varphi_0) + h_0)\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ Y_0 &= (N(\varphi_0) + h_0)\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ Z_0 &= (N(\varphi_0)(1 - e^2) + h_0)\sin\varphi_0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

où e est la première excentricité et :

$$N(\varphi_0) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \quad (4.1.2)$$

4.1.4 Calculs des coefficients des relations d'observations correspondant aux lectures des tours d'horizon, à la détermination d'un azimut de Laplace et à la mesure d'une base

On utilise les relations d'observations de la géodésie tridimensionnelle (H.M. Dufour [5],1963 ; J. Le Menestrel [6],1969 ; A. Ben Hadj Salem [7],1981).

Soient A et A' respectivement le point de station et le point visé, la relation d'observation correspondant à une lecture de tours d'horizon est :

$$\frac{1}{\sigma} \left(-dV_{0A} - \frac{\cos Az}{SC \sin Dz} dx_A + \frac{\sin Az}{SC \sin Dz} dy_A - \frac{\cos Az'}{SC \sin Dz} dx'_{A'} + \frac{\sin Az'}{SC \sin Dz} dy'_{A'} + Az - l - V_{0A} \right) = v \quad (4.1.3)$$

où :

- dV_{0A}, dx_A, dy_A les inconnues de compensation du point A ,
- $dx'_{A'}, dy'_{A'}$ les inconnues de compensation du point A' ,
- Az l'azimut calculé,
- Az' l'azimut inverse calculé,
- Dz la distance zénithale calculée,
- SC distance corde AA' calculée,
- l la lecture du tour d'horizon,
- V_{0A} le V_0 calculé en A ,
- σ l'écart type de l'observation.

Calculons ces différents éléments. On a $A(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$ et $A'(\varphi'_0, \lambda'_0, h'_0)$, de (1.2.9), on obtient les coordonnées rectangulaires (X_0, Y_0, Z_0) de A et (X'_0, Y'_0, Z'_0) de A' d'où :

$$AA'_{OXYZ} \begin{pmatrix} \Delta X_0 = X'_0 - X_0 \\ \Delta Y_0 = Y'_0 - Y_0 \\ \Delta Z_0 = Z'_0 - Z_0 \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

Entre les composantes de AA' dans (O, X, Y, Z) et ses composantes $(L_0, M_0, N_0)^T$ dans le repère géodésique approché $(A, \vec{\lambda}_0, \vec{\mu}_0, \vec{\nu}_0)$ de A , on a la relation vectorielle :

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = R^T(\varphi_0, \lambda_0) \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

où :

$$\begin{aligned} L_0 &= SC \sin Dz \sin Az \\ M_0 &= SC \sin Dz \cos Az \\ N_0 &= SC \cos Az \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

et :

$$R^T(\varphi_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ -\sin\varphi_0\cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0\cos\lambda_0 & \cos\varphi_0\sin\lambda_0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} L_0 &= -\Delta X_0 \sin\lambda_0 + \Delta Y_0 \cos\lambda_0 \\ M_0 &= -\Delta X_0 \sin\varphi_0 \cos\lambda_0 - \Delta Y_0 \sin\lambda_0 \sin\varphi_0 + \Delta Z_0 \cos\varphi_0 \\ N_0 &= \Delta X_0 \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 + \Delta Y_0 \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 + \Delta Z_0 \sin\varphi_0 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

d'où :

$$tgAz = \frac{L_0}{M_0} \Rightarrow Az = Arctg(L_0/M_0) \quad (4.1.9)$$

$$tgDz = \frac{L_0 \sin Az + M_0 \cos Az}{N_0} = \frac{M_0}{N_0 \cos Az} \Rightarrow Dz = Arctg\left(\frac{M_0}{N_0 \cos Az}\right) \quad (4.1.10)$$

$$SC = \sqrt{L_0^2 + M_0^2 + N_0^2} = \sqrt{\Delta X_0^2 + \Delta Y_0^2 + \Delta Z_0^2} \quad (4.1.11)$$

De même :

$$A'A_{OXYZ} \begin{pmatrix} \Delta X'_0 = X_0 - X'_0 \\ \Delta Y'_0 = Y_0 - Y'_0 \\ \Delta Z'_0 = Z_0 - Z'_0 \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

On a :

$$\begin{aligned} L'_0 &= -\Delta X'_0 \sin\lambda'_0 + \Delta Y'_0 \cos\lambda'_0 \\ M'_0 &= -\Delta X'_0 \sin\varphi'_0 \cos\lambda'_0 - \Delta Y'_0 \sin\lambda'_0 \sin\varphi'_0 + \Delta Z'_0 \cos\varphi'_0 \\ N'_0 &= \Delta X'_0 \cos\varphi'_0 \cos\lambda'_0 + \Delta Y'_0 \cos\varphi'_0 \sin\lambda'_0 + \Delta Z'_0 \sin\varphi'_0 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

d'où :

$$tgAz' = \frac{L'_0}{M'_0} \Rightarrow Az' = Arctg(L'_0/M'_0) \quad (4.1.14)$$

$$tgDz' = \frac{M'_0}{N'_0 \cos Az'} \Rightarrow Dz' = Arctg\left(\frac{M'_0}{N'_0 \cos Az'}\right) \quad (4.1.15)$$

$$SC' = SC = \sqrt{L_0'^2 + M_0'^2 + N_0'^2} = \sqrt{\Delta X_0'^2 + \Delta Y_0'^2 + \Delta Z_0'^2} \quad (4.1.16)$$

On a établi deux imprimés qui contiennent pour la station et le point visé (et réciproquement) les éléments suivants : $\varphi_0, \lambda_0, h_0, X_0, Y_0, Z_0, \Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0, SC, L_0, M_0, N_0, tgAz, tgDz, \varphi'_0, \lambda'_0, h'_0, X'_0, Y'_0, Z'_0, \Delta X'_0, \Delta Y'_0, \Delta Z'_0, SC', L'_0, M'_0, N'_0, tgAz', tgDz', Az', Dz'$ et les coefficients des inconnues dx_A, dy_A pour les visées A vers A' et A' vers A . On a ajouté les coefficients de l'observation d'un azimut de Laplace et la mesure d'une base.

La relation d'observation correspondant à une détermination d'un azimut de Laplace est :

$$\sigma^{-1} \left(-\frac{\cos Az}{SC \sin Dz} dx_A + \frac{\sin Az}{SC \sin Dz} dy_A - \frac{\cos Az'}{SC \sin Dz} dx'_{A'} + \frac{\sin Az'}{SC \sin Dz} dy'_{A'} + Az - Az_0 \right) = v \quad (4.1.17)$$

où Az_0 l'azimut géodésique observé, v le résidu et $\sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma}$ le poids de l'observation.

Enfin, la relation d'observation correspondant à une mesure de base entre A et le point A' est :

$$\frac{1}{\sigma} (-\sin Az \sin Dz dx_A - \cos Az \sin Dz dy_A - \sin Az' \sin Dz' dx_{A'} - \cos Az' \sin Dz' dy_{A'} + SC - SO) = v \quad (4.1.18)$$

où SO est la distance corde mesurée et σ l'écart type de l'observation.

4.1.5 Ecart- type des observations - Poids

Soit σ l'écart d'une observation, si on suppose que les observations sont indépendantes, le poids p correspondant à l'observation est donné par $p = 1/\sigma^2$. Nous avons choisi les valeurs de p adoptées lors de la compensation totale du réseau géodésique. Pour l'observation correspondant à une mesure de base $p = 5 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1^m}{\sqrt{5}} = 0.447214m$.

Pour les observations d'un tour d'horizon ou d'un azimut de Laplace on a $p = 1 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{1mrd}{1} = 636.620 dmgr$.

σ_1 et σ_2 doivent être multipliés par un facteur commun η déterminé après la compensation définie par $\eta^2 = \sigma_0^2 =$ variance estimée (mrd^2). η est de l'ordre de 6.0633×10^{-3} d'où les valeurs de σ'_1 et σ'_2 :

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 \times \eta = 0.0027 m \text{ pour la mesure de la distance,} \\ \sigma'_2 &= \sigma_2 \times \eta = 3.86 dmgr \text{ pour les mesures angulaires.} \end{aligned}$$

4.1.6 Tours d'horizon : calculs avant la compensation par moindres carrés

En chaque station, on calcule le V_{om} moyen approché par la formule :

$$V_{om} = \frac{\sum^n (Az - l)}{\text{nombre des points visés}}$$

et on forme :

$$\Delta = Az - l - V_{om} \quad (4.1.19)$$

On exprimera Δ en mrd :

$$\Delta_{mrd} = 0.0015708 \times \Delta_{dmgr} \quad (4.1.20)$$

Cependant, pour les points où on connaît les coordonnées astronomiques et géodésiques (ici c'est la station B. MEDNINE T.E., point fixe) on introduit le terme $-\cot g Dz (\epsilon_x \cos Az - \epsilon_y \sin Az)$ dans (4.1.19), d'où :

$$\epsilon_x = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_g \epsilon_y = \varphi_a - \varphi_g$$

sont les composantes de la déviation de la verticale à la station (φ_g, λ_g) .

4.1.7 Point de Laplace : Calculs avant compensation

Comme données on a (φ_0, λ_0) géodésiques et (φ_a, λ_a) astronomiques. On calcule (ϵ_x, ϵ_y) . On obtient l'azimut géodésique observé Az_0 à partir de l'équation de Laplace :

$$Az_0 = Az_a + (\lambda_0 - \lambda_a) \sin \varphi_0 \quad (4.1.21)$$

On formera

$$\Delta = Az - Az_0$$

en mrd.

4.1.8 Distance : Calcul avant compensation

On formera

$$\Delta = SC - SO$$

en m.

4.1.9 La matrice A des relations d'observations

On compense le bloc par la méthode des moindres carrés (H.M. Dufour, [8]). Soit \sqrt{P} la matrice diagonale des poids :

$$\sqrt{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \dots & \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (4.1.22)$$

et V le vecteur résidu. En utilisant les relations (4.1.3), (4.1.17) et (4.1.18) on obtient le système :

$$\sqrt{P}.A.X + \sqrt{P}.\Delta = V \quad (4.1.23)$$

où X est le vecteur des inconnues dV_{0i}, dx_i, dy_i de compensation et Δ le vecteur des termes constants Δ_i .

Dans la suite, on appellera A la matrice $\sqrt{P}.A$ et Δ le vecteur $\sqrt{P}.\Delta$. Le système (4.1.23) devient :

$$A.X + \Delta = V \quad (4.1.24)$$

La solution par moindres carrés de (4.1.23) est donnée par (J. Le Menestrel, [9]1980)

$$X = -(A^T A)^{-1} A^T . \Delta \quad (4.1.25)$$

La solution X est acceptable quand le vecteur V vérifie :

$$A^T . V = 0 \quad (4.1.26)$$

Le calcul de $A^T . V$ s'appelle renormalisation. On déterminera V on calculera une estimation de la variance unitaire σ_0^2 (P. Hottier, [10] Théorie des erreurs) par :

$$\sigma_0^2 = \eta^2 = \frac{V^T . V}{n - r} \quad (4.1.27)$$

où n est le nombre d'observations et r celui des inconnues. η^2 s'exprime en mrd^2 .

4.1.10 Matrice $N = A^T A$ et son inverse N^{-1}

La matrice N est symétrique de même pour N^{-1} . Le calcul de N et de N^{-1} a été effectué sur ordinateur à l'aide de programmes. Le calcul de la compensation a été fait premièrement à l'aide des programmes de compensation du département de Traitement de l'Information Géodésique au S.G.N.M. à l'I.G.N.. Les résultats sont donnés avec trois décimales ce qui nous a amené à faire un deuxième calcul de compensation à partir de l'équation (4.1.25) et avoir des résultats avec six décimales.

4.1.11 Calculs de $\varphi, \lambda, X, Y, Z$ définitifs

Le programme du Département de Traitement de l'Information Géodésique nous a fourni les coordonnées géodésiques et rectangulaires définitives.

Les formules utilisées sont :

$$d\varphi = \frac{dy}{\rho_0 + h_0} \implies \varphi = \varphi_0 + d\varphi \quad (4.1.28)$$

$$d\lambda = \frac{dx}{(N_0 + h_0)\cos\varphi_0} \implies \lambda = \lambda_0 + d\lambda$$

D'où les coordonnées (X, Y, Z) définitives.

4.2 Analyse de Structure d'un Segment

4.2.1 Analyse de la précision relative

On choisit dans le schéma étudié un segment AB . On sait que la matrice des variances correspondante à l'ensemble du schéma est donnée par :

$$C = \eta^2 N^{-1} \quad (4.2.1)$$

où η^2 est un estimateur de σ_0^2 la variance unitaire et N la matrice normale. Nous nous proposons l'étude de la précision relative du segment AB et par suite on suppose que le reste du schéma est figé. Soit L la matrice (6,6) relative aux points A et B tirée de la matrice N . La matrice des variances du segment AB est

$$C(A, B) = \eta^2 L^{-1} \quad (4.2.2)$$

A partir de (4.2.2) on étudiera :

- les erreurs d'orientation dV_{0A}, dV_{0B} ,
- les ellipses d'erreurs aux points A et B ,
- l'ellipse d'erreurs au point M milieu du segment AB ,
- les erreurs d'échelle et d'orientation H, G ,
- l'ellipse d'erreurs de A si B est fixé,
- l'ellipse d'erreurs de B si A est fixé,
- l'orientation relative :
 - * calcul de $\sigma(dV_{0A})$ quand on fixe dV_{0B} ,
 - * calcul de $\sigma(dV_{0B})$ quand on fixe dV_{0A} .

4.2.2 Matrice de propagation des variances

Soit M le milieu de AB . On a :

$$OM = \frac{OA + OB}{2} \Rightarrow dM = \frac{dOA + dOB}{2} \quad (4.2.3)$$

Si on projette (4.2.2) dans le plan local géodésique de M (M, λ, μ), on aura :

$$dx(M) = \frac{1}{2}(dx_M(A) + dx_M(B)) \quad (4.2.4)$$

$$dy(M) = \frac{1}{2}(dy_M(A) + dy_M(B))$$

où $dx_M(A), dy_M(A)$ sont liés à $dx(A), dy(A)$ par :

$$\begin{pmatrix} dx_M(A) \\ dy_M(A) \\ - \end{pmatrix} = R^T(\varphi_M, \lambda_M) \cdot R(\varphi_A, \lambda_A) \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ - \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

où (φ_M, λ_M) sont les coordonnées géodésiques de M et $R^T(\varphi, \lambda)$ donnée par (4.1.7). Même relation vectorielle pour le point B . On obtient alors dans le plan local $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$:

$$\begin{pmatrix} dx_M(A) \\ dy_M(A) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(A) \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad (4.2.6)$$

$$\mathcal{R}(A) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_A - \lambda_M) & -\sin\varphi_A \sin(\lambda_A - \lambda_M) \\ \sin\varphi_M \sin(\lambda_A - \lambda_M) & \cos\varphi_A \cos\varphi_M + \sin\varphi_A \sin\varphi_M \cos(\lambda_A - \lambda_M) \end{pmatrix}$$

de même :

$$\begin{pmatrix} dx_M(B) \\ dy_M(B) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(B) \cdot \begin{pmatrix} dx(B) \\ dy(B) \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

La détermination de (φ_M, λ_M) par le calcul et la comparaison à (φ'_M, λ'_M) données par :

$$\varphi'_M = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} \quad ; \quad \lambda'_M = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}$$

donnent les coefficients des matrices $R^T(\varphi_M, \lambda_M) \cdot R(\varphi_A, \lambda_A)$ égaux à ceux de $R^T(\varphi'_M, \lambda'_M) \cdot R(\varphi_A, \lambda_A)$ à 10^{-5} près. Par suite, on posera $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_M = \lambda_M - \lambda_B$ et $F(A) = \cos\varphi_A \cos\varphi_M + \sin\varphi_A \sin\varphi_M \cos\Delta\lambda$.

En utilisant (4.2.4), (4.2.6) et (4.2.7), on obtient les relations :

$$dx(M) = \frac{1}{2} \cos\Delta\lambda (dx(A) + dx(B)) + \frac{\sin\Delta\lambda}{2} (-\sin\varphi_A dy(A) + \sin\varphi_B dy(B)) \quad (4.2.8)$$

$$dy(M) = \frac{1}{2} \sin\varphi_M \sin\Delta\lambda (dx(A) - dx(B)) + \frac{1}{2} (F(A) dy(A) + F(B) dy(B)) \quad (4.2.9)$$

On adopte aussi les fonctions suivantes :

$$dV_{0M} = \frac{dV_{0A} + dV_{0B}}{2} \quad (4.2.10)$$

$$\delta dV_{0M} = \frac{dV_{0A} - dV_{0B}}{2} \quad (4.2.11)$$

$$h = dS_{AB} = -\sin Dz \sin Az dx(A) - \sin Dz \cos Az dy(A) \\ - \sin Dz' \sin Az' dx(B) - \sin Dz' \cos Az' dy(B) \quad (4.2.12)$$

$$g = dAz_{AB} \\ = \frac{1}{S_{AB} \sin Dz} (-\cos Az dx(A) + \sin Az dy(A) - \cos Az' dx(B) + \sin Az' dy(B)) \quad (4.2.13)$$

En écrivant les relations (4.2.10) à (4.2.13) sous forme matricielle, on obtient la matrice de propagation des variances Ψ :

$$\begin{pmatrix} dV_{0M} \\ \delta V_0 \\ dx(M) \\ dy(M) \\ h \\ g \end{pmatrix} = \Psi \cdot \begin{pmatrix} dV_{0A} \\ dx(A) \\ dy(A) \\ dv_{0B} \\ dx(B) \\ dy(B) \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

4.2.3 Calcul de la matrice $C(A, B)$ des variances des inconnues

On considère la sous-matrice (6,6) tirée de N relative aux inconnues de A et B . On calcule son inverse et on la calibre en la multipliant par η^2 (ou plutôt par $10^6 \times \eta^2$), on obtient ;

$$C(A, B) = L' \quad (4.2.15)$$

4.2.4 Formation de la matrice T des variances des inconnues

D'après (4.2.14) et en utilisant la loi de propagation des variances (P. Hottier [10], H.M. Dufour [8], 1971) on obtient la matrice T des variances des inconnues $dV_{0M}, \delta V_0, dx(M), dy(M), h$ et g par :

$$T = \Psi \cdot L' \cdot \Psi^T = (t_{ij}) \quad (4.2.16)$$

Les unités :

$dV_{0A}, \delta V_0$ en μrd ,

$dx(M), dy(M)$ en mm ,

h, g en $mm, \mu rd$.

4.2.5 Erreurs d'orientations dV_{0A}, dV_{0B}

A partir de (4.2.16), on tire le sous-tableau (2x2) qu'on note $Var(dV_{0M}, \delta V_0)$:

$$Var(dV_{0M}, \delta V_0) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2.17)$$

On obtient :

$\sigma(dV_{0M}) = \sqrt{t_{11}}$: écart-type de l'orientation moyenne relative.

$\sigma(dV_0) = \sqrt{t_{22}}$: écart-type de la transmission d'orientation relative.

et $r = \frac{t_{12}}{\sqrt{t_{11}t_{22}}}$ corrélation entre ces deux grandeurs.

On passera aux variables dV_{0A}, dV_{0B} par la transformation :

$$\begin{pmatrix} dV_{0A} \\ dV_{0B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dV_{0M} \\ \delta V_0 \end{pmatrix} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} dV_{0M} \\ \delta V_0 \end{pmatrix} \quad (4.2.18)$$

où Φ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$Var(dV_{0A}, dV_{0B}) = \Phi \cdot var(dV_{0M}, \delta V_0) \cdot \Phi^T = \begin{pmatrix} v'_{11} & v'_{12} \\ v'_{21} & v'_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2.19)$$

avec : $\sigma(dV_{0A}) = \sqrt{v'_{11}}$: écart-type de l'orientation relative en A ,
 $\sigma(dV_{0B}) = \sqrt{v'_{22}}$: écart-type de l'orientation relative en B ,
 et $r = \frac{v'_{12}}{\sqrt{v'_{11}v'_{22}}}$: la corrélation entre les deux grandeurs.

4.2.6 Ellipses d'erreurs aux points A et B

A partir des équations (4.2.10) à (4.2.13) on exprime $dx(A), dy(A), dx(B)$ et $dy(B)$ en fonction de $dx(M), dy(M), h$ et g par :

$$\begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \end{pmatrix} = \Xi \cdot \begin{pmatrix} dx(M) \\ dy(M) \\ h \\ g \end{pmatrix} \quad (4.2.20)$$

où Ξ est une matrice (4x4). En appliquant la loi de propagation des variances et en utilisant (4.2.16), on obtient $T_1 = Var(dx(M), dy(M), h, g)$:

$$Var(dx(M), dy(M), h, g) = \Xi \cdot T_1 \cdot \Xi^T \quad (4.2.21)$$

Ellipse d'erreurs au sommet A

De la matrice (4.2.21) on tire :

$$Var(dx(A), dy(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2.22)$$

On calculera :

- $\sigma_{X_A} = \sqrt{a_{11}}$: erreur moyenne quadratique dans la direction A , λ ,
- $\sigma_{Y_A} = \sqrt{a_{22}}$: erreur moyenne quadratique dans la direction A , μ ,
- et $r = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$: coefficient de corrélation.

$A, \vec{\lambda}, \vec{\mu}$ est le plan horizontal local en A .

***Détermination des éléments (a, b) de l'ellipse d'erreurs et son orientation (H.M. Dufour [8], 1971)**

On calcule θ :

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}$$

d'où θ comptée à partir du Nord dans le sens des gisements.

$$\begin{cases} a^2 = a_{11}\cos^2\theta + a_{22}\sin^2\theta - 2a_{12}\sin\theta\cos\theta \\ b^2 = a_{11}\sin^2\theta + a_{22}\cos^2\theta + 2a_{12}\sin\theta\cos\theta \end{cases} \Rightarrow a, b \quad (4.2.23)$$

Choix de θ :

- si $a_{12} < 0$: $a_{22} - a_{11} < 0 \Rightarrow 0 < 2\theta < \pi/2$
 $a_{22} - a_{11} > 0 \Rightarrow \pi/2 < 2\theta < \pi$
- si $a_{12} > 0$: $a_{22} - a_{11} < 0 \Rightarrow \pi < 2\theta < 3\pi/2$
 $a_{22} - a_{11} > 0 \Rightarrow 3\pi/2 < 2\theta < 2\pi$

Ellipse d'erreurs au sommet B

Mêmes calculs qu'au paragraphe ci-dessus.

4.2.7 Orientation relative

- On veut calculer $\sigma(dV_{0A})$ quand on fixe dV_{0B} . A partir de (4.2.19) on a :

$$\operatorname{Var}(dV_{0A}, dV_{0B}) = \begin{pmatrix} v'_{11} & v'_{12} \\ v'_{21} & v'_{22} \end{pmatrix}$$

comme on a fixé dV_{0B} alors $\sigma(dV_{0A}) = \sqrt{v''_{11}}$ avec : $v''_{11} = v'_{11} - \frac{v'^2_{12}}{v'^2_{22}} > 0$ car déterminant $(\operatorname{Var}(dV_{0A}, dV_{0B})) > 0$.

- Même méthode pour calculer $\sigma(dV_{0B})$. quand on fixe dV_{0A} . $\sigma(dV_{0B}) = \sqrt{v''_{22}}$ avec :

$$v''_{22} = v'_{22} - \frac{v'^2_{12}}{v'^2_{11}}$$

Ellipse d'erreurs au sommet A quand $(dV_{0B}, dx(B), dy(B))$ sont fixés

A partir de la matrice N des équations normales, on tire la sous-matrice (3x3) relative au point A . Soit $N(A)$ cette matrice, la matrice des variances des éléments dV_{0A} , $dx(A)$ et $dy(A)$ est donnée par :

$$\operatorname{Var}(dV_{0A}, dx(A), dy(A)) = \eta^2 N^{-1}(A) \quad (4.2.24)$$

De (4.2.24), on déduit $\operatorname{Var}(dx(A), dy(A))$ qui nous permet de calculer l'ellipse d'erreurs au sommet A en utilisant les formules (4.2.23) et de déterminer $\sigma(dV_{0A})$ quand tous les autres points sont fixes.

4.2.8 Ellipse d'erreurs au sommet B Quand $(dV_{0A}, dx(A), dy(A))$ sont fixés

Même méthode qu'au paragraphe précédent.

4.2.9 Etude de l'ellipse d'erreurs en M milieu du segment AB et les erreurs d'échelle et d'orientation

En géodésie tridimensionnelle, on ramène les calculs à un seul repère à savoir le repère géodésique local (M, λ, μ, ν) au point M où on va étudier l'ellipse d'erreurs et les erreurs d'échelle et d'orientation c'est-à-dire les coefficients H et G . On néglige les coefficients P et Q .

En partant de (3.1.1), (3.1.2) et de (3.1.11); on peut écrire dans le plan horizontal local (M, λ, μ) que :

$$\begin{cases} dx(M) = dx^M(A) + H(AM.\vec{\lambda}) + G(AM.\vec{\mu}) \\ dy(M) = dy^M(A) - G(AM.\vec{\lambda}) + H(AM.\vec{\mu}) \\ dx(M) = dx^M(B) + H(BM.\vec{\lambda}) + G(BM.\vec{\mu}) \\ dy(M) = dx^M(B) - G(BM.\vec{\lambda}) + H(BM.\vec{\mu}) \end{cases} \quad (4.2.25)$$

$dx^M(A), dy^M(B)$ représentent les composantes de la projection de dA dans le plan $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$. Les relations entre $dx^M(A), dy^M(A)$ et $dx(A), dy(A)$ sont données par (4.2.5) et (4.2.6). Les relations (4.2.25) donnent en posant : $\Delta X_M = AB.\vec{\lambda}$, $\Delta Y_M = AB.\vec{\mu}$ et $D_M^2 = \Delta X_M^2 + \Delta Y_M^2$ les valeurs de H et G :

$$\begin{cases} H = \frac{\Delta X_M}{D_M^2}(dx^M(B) - dx^M(A)) + \frac{\Delta Y_M}{D_M^2}(dy^M(B) - dy^M(A)) \\ G = \frac{\Delta Y_M}{D_M^2}(dx^M(B) - dx^M(A)) - \frac{\Delta X_M}{D_M^2}(dy^M(B) - dy^M(A)) \end{cases} \quad (4.2.26)$$

En écrivant (4.2.2) et (4.2.26) sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} dx(M) \\ dy(M) \\ H \\ G \end{pmatrix} = \mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} dx^M(A) \\ dy^M(A) \\ dx^M(B) \\ dy^M(B) \end{pmatrix} \quad (4.2.27)$$

où \mathcal{P} est une matrice (4x4). En utilisant (4.2.5) et (4.2.6), (4.2.27) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dx(M) \\ dy(M) \\ H \\ G \end{pmatrix} = \mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}(B) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \end{pmatrix} \quad (4.2.28)$$

Dans la matrice \mathcal{N} on considère la sous-matrice (4x4) relative aux inconnues $dx(A), dy(A), dx(B), dy(B)$. Soit \mathcal{N} cette matrice, on calcule $\eta^2 \mathcal{N}^{-1}$, ce qui donne en utilisant la loi de propagation et (4.2.28) la matrice des variances de $(dx(M), dy(M), H, G)$:

$$Var(dx(M), dy(M), H, G) = \mathcal{M} \eta^2 \mathcal{N}^{-1} \mathcal{M}^T \quad (4.2.29)$$

Ellipse d'erreurs au milieu M de AB

De (4.2.29) on obtient :

$$Var(dx(M), dy(M)) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2.30)$$

d'où les caractéristiques de l'ellipse d'erreurs en appliquant les formules (4.2.24).

Erreurs d'échelle et d'orientation H, G

De (4.2.29) on obtient la matrice :

$$Var(H, G) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad (4.2.31)$$

d'où :

- $\sigma(H) = \sqrt{k_{11}}$: erreur d'échelle relative le long de AB ,
 - $\sigma(G) = \sqrt{k_{22}}$: erreur d'orientation le long de AB ,
 - et $r = \frac{k_{12}}{\sigma(H) \cdot \sigma(G)}$: la corrélation entre les deux grandeurs.
- $\sigma(H)$ s'exprime en $10^{-6} m$ et $\sigma(G)$ en $\mu rd = 10^{-6} rd$.

4.3 Analyse de Structure d'un Segment**4.3.1 Précisions absolues d'un segment**

On choisit le même segment AB étudié dans [4.2], les inconnues sont $dV_{0A}, dx(A), dy(A), dV_{0B}, dx(B), dy(B)$. On étudiera les précisions absolues de ces éléments.

Les précisions absolues se déduisent de sous-matrices extraites de la matrice de variance-covariance MV donnée par (4.1.27). On extrait donc de (4.1.27) la sous-matrice (6x6) correspondante aux inconnues citées plus haut. Soit V' cette matrice. Pour notre étude, on adopte les mêmes fonctions auxiliaires définies en [4.2.1]. On utilise La matrice de propagation de variance Ψ déterminée par (4.2.2).

4.3.2 Matrice de variances des fonctions auxiliaires

On obtient :

$$Var(dV_{0M}, \delta V_0, dx(M), dy(M), h, g) = \Psi \cdot V' \cdot \Psi^T \quad (4.3.1)$$

4.3.3 Analyse des orientations des tours d'horizon

On obtient $Var(dV_{0A}, dV_{0B})$ à partir de $Var(dV_{0M}, \delta V_0)$ par :

$$Var(dV_{0A}, dV_{0B}) = \Phi \cdot Var(dV_{0M}, \delta V_0) \cdot \Phi^T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

où

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on calculera :

- $\sigma(dV_{0M})$: écart type de l'orientation moyenne,
- $\sigma(dV_0)$: écart type de la transmission d'orientation,
- $\sigma(dV_{0A}) = \sqrt{r_{11}}$: écart type de l'orientation en A ,
- $\sigma(dV_{0B}) = \sqrt{r_{22}}$: écart type de l'orientation en B ,
- $r = \frac{r_{12}}{\sqrt{r_{11}r_{22}}}$: corrélation entre les deux grandeurs.

4.3.4 Ellipse d'erreurs au sommet A ou (B)

A partir de (4.2.20) et du tableau de variance de $(dx(M), dy(M), h, g)$ tiré de (4.2.29) et en appliquant la loi de propagation des variances on obtient :

$$Var(dx(A), dy(A), dx(B), dy(B)) = \Xi \cdot Var(dx(M), dy(M), h, g) \cdot \Xi^T \quad (4.3.3)$$

De (4.3.3), on déduit $Var(dx(A), dy(A))$ et on calculera $\sigma_{X_A}, \sigma_{X_B}$ et les caractéristiques de l'ellipse d'erreurs au sommet A en utilisant les formules (4.2.12).

Même méthode pour le sommet B .

4.3.5 Ellipse d'erreurs en M milieu de AB

De (4.2.31) on tire la sous-matrice (2x2) $Var(dx(M), dy(M))$ d'où l'étude de l'ellipse au point M .

4.3.6 Erreurs d'échelle et d'orientation

On cherche $Var(H, G)$. On utilise la sous-matrice $\mathcal{M}'(2, 4)$ tirée de la matrice \mathcal{M} donnée par (4.2.28).

$$\begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix} = \mathcal{M}' \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \end{pmatrix} \quad (4.3.4)$$

En utilisant (4.3.3) et la loi de propagation des variances on obtient $Var(H, G)$ d'où σ_H, σ_G .

4.4 Analyse de Structure d'un Triangle

L'étude des précisions des sommets d'un triangle en géodésie tridimensionnelle diffère de l'étude faite en bidimensionnelle. En effet, dans le plan, le triangle déformé reste toujours dans le plan de la représentation, mais en géodésie tridimensionnelle le triangle déformé à partir d'une position ne reste plus parallèle au triangle d'origine.

En première approximation, on a un mouvement d'une plaque indéformable dans l'espace d'où les six degrés de liberté (analogie avec le mouvement d'un solide indéformable) qui se traduisent par les deux éléments de position dx, dy et les quatre coefficients H, G, P et Q .

L'analyse de structure d'un triangle choisi ABC se fait à partir des équations (3.1.9) et (3.1.10) :

$$dx_M = dx_0 + Hx + Gy + Px + Qy$$

$$dy_M = dy_0 - Gx + Hy + Qx - Py$$

Le plan horizontal où on utilisera 3.1.9) et (3.1.10) est celui de G le centre de gravité du triangle ABC , soit $(G, \vec{\lambda}_G, \vec{\mu}_G)$ qu'on notera $(G, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$.

4.4.1 Calcul de φ_G, λ_G et h_G

Le centre G est déterminé par $OG = (OA + OB + OC)/3$ si on accorde à tous les points un poids égal à 1, d'où :

$$OG = \frac{OA + OB + OC}{3} \quad (4.4.1)$$

et :

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{3}(X_A + X_B + X_C) \\ Y_G = \frac{1}{3}(Y_A + Y_B + Y_C) \\ Z_G = \frac{1}{3}(Z_A + Z_B + Z_C) \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Comme :

$$\begin{cases} X_G = (N + g_G)\cos\varphi_G\cos\lambda_G \\ Y_G = (N + h_G)\cos\varphi_G\sin\lambda_G \\ Z_G = (N(1 - e^2) + h_G)\sin\varphi_G \end{cases} \quad (4.4.3)$$

de (4.4.3), on a :

$$\lambda_G = \arctg\left(\frac{Y_G}{X_G}\right) \quad (4.4.4)$$

Soit :

$$p = \sqrt{X_G^2 + Y_G^2} = (N + h_G)\cos\varphi_G \Rightarrow h_G = \frac{p}{\cos\varphi_G - N(\varphi_G)} \quad (4.4.5)$$

et :

$$Z_G = (N + h_G)\left(1 - \frac{e^2 N}{N + h_G}\right)\sin\varphi_G$$

d'où :

$$tg\varphi_G = ds \frac{Z_G}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^2 \frac{N}{N+h_G}} \quad (4.4.6)$$

Soit

$$\varphi_{Gquad}/tg\varphi_G = \frac{z_G}{p(1 - e^2)} \Rightarrow \varphi_G$$

On calcule $N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}}$, d'où h_1 par(4.4.5), on calcule φ_2 par (4.4.6) et on déduit h_2 par (4.4.5). On itère le processus jusqu'à avoir φ_i et h_i constants.

4.4.2 Etablissement de la matrice de propagation des variances

De (4.4.1) on obtient en différenciant :

$$dG = \frac{dA + dB + dC}{3} \quad (4.4.7)$$

On projette l'équation vectorielle (4.4.7) dans le plan local géodésique $(G, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$, d'où :

$$\begin{cases} dx(G) = \frac{dx^G(A) + dx^G(B) + dx^G(C)}{3} \\ dy(G) = \frac{dy^G(A) + dy^G(B) + dy^G(C)}{3} \end{cases} \quad (4.4.8)$$

où $dx^G(A), dy^G(A)$ sont les transformés des inconnues de compensation $(dx(A), dy(A), 0)$ dans le repère (G, λ, μ, ν) .

Ayant les variations dA, dB et dC , on peut étudier les six paramètres $dx(G), dy(G), H, G, P$ et Q pour tout point M du plan $(G, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$ par :

$$dGM = \begin{pmatrix} H + P & Q + G \\ Q - G & H - P \end{pmatrix} \cdot GM \quad (4.4.9)$$

Pour le point A , on a $GA = (BA + CA)/3$ et les équations (4.4.9) deviennent :

$$\begin{pmatrix} dx^G(A) \\ dy^G(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} H + P & Q + G \\ Q - G & H - P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cdot (BA + CA) \\ \mu \cdot (BA + CA) \end{pmatrix} \quad (4.4.10)$$

En posant :

$$x = \vec{\lambda} \cdot (BA + CA); \quad y = \vec{\mu} \cdot (BA + CA) \quad (4.4.11)$$

$$a = H + P, \quad a' = Q - G, \quad b = Q + G, \quad b' = H - P \quad (4.4.12)$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix}^G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & x_A & y_A & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & x_A & y_A \\ 3 & 0 & x_B & y_B & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & x_B & y_B \\ 3 & 0 & x_C & y_C & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & x_C & y_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ a \\ b \\ a' \\ b' \end{pmatrix} \quad (4.4.13)$$

On inverse le système (4.4.13) ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ a \\ b \\ a' \\ b' \end{pmatrix} = \mathcal{U} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix}^G \quad (4.4.14)$$

Il reste maintenant à exprimer :

$$\begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix}^G$$

en fonction de

$$\begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix}$$

Soient $A(\varphi_A, \lambda_A)$ et $G(\varphi_G, \lambda_G)$. On a en utilisant (4.2.5) :

$$\begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \end{pmatrix}^G = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_A - \lambda_G) & -\sin\varphi_A \sin(\lambda_A - \lambda_G) \\ \sin\varphi_G \sin(\lambda_A - \lambda_G) & \cos\varphi_A \cos\varphi_G + \sin\varphi_A \sin\varphi_G \cos(\lambda_A - \lambda_G) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \end{pmatrix} \quad (4.4.15)$$

ou en adoptant la notation $\mathcal{R}(A)$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ a \\ b \\ a' \\ b' \end{pmatrix} = \mathcal{U} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathcal{R}(B) & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{R}(C) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix} \quad (4.4.16)$$

or :

$$\begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ H \\ G \\ P \\ Q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ a \\ b \\ a' \\ b' \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ a \\ b \\ a' \\ b' \end{pmatrix} \quad (4.4.17)$$

Soit finalement W la matrice de propagation des variances des inconnues $(dx(A), dy(A), dx(B), dy(B), dx(C), dy(C))$ aux inconnues auxiliaires $(dx(G), dy(G), H, G, P, Q)$:

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{U} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathcal{R}(B) & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{R}(C) \end{pmatrix} \quad (4.4.18)$$

soit sous forme condensée :

$$W = K \mathcal{U} \mathcal{R}$$

4.4.3 Calcul de la matrice du système (4.4.13)

Dans le repère orthonormé O, X, Y, Z , on a :

$$\lambda \begin{vmatrix} -\sin\lambda_G \\ \cos\lambda_G \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mu \begin{vmatrix} -\sin\varphi_G \cos\lambda_G \\ -\sin\varphi_G \sin\lambda_G \\ \cos\varphi_G \end{vmatrix} \quad \nu \begin{vmatrix} \cos\varphi_G \cos\lambda_G \\ \cos\varphi_G \sin\lambda_G \\ \sin\varphi_G \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} x_A &= \vec{\lambda} \cdot (BA + CA), & x_B &= \vec{\lambda} \cdot (AB + CB), & x_C &= \vec{\lambda} \cdot (AC + BC) \\ y_A &= \vec{\mu} \cdot (BA + CA), & y_B &= \vec{\mu} \cdot (AB + CB), & y_C &= \vec{\mu} \cdot (AC + BC) \end{aligned}$$

4.4.4 Calcul de la matrice U donnée par (4.4.14)

4.4.5 Calcul de la matrice \mathcal{R} (4.4.15)

4.4.6 Calcul du produit $U \cdot \mathcal{R}$ (4.4.16)

4.4.7 Calcul de la matrice W de la loi de propagation des variances

4.4.8 Matrice des variance-covariance de $dx(G), dy(G), H, G, P$ et Q

A partir de la matrice N des équations normales, on déduit la sous-matrice (6x6) relative aux points A, B, C des inconnues de déplacement. Soit TR cette matrice, la matrice des variances relatives aux sommets du triangle est :

$$Var(dx(A), dy(A), dx(B), dy(B), dx(C), dy(C)) = \eta^2 TR^{-1} \quad (4.4.19)$$

d'où en appliquant la loi de propagation des variances, on obtient la matrice des variances des inconnues auxiliaires ($dx(G), dy(G), H, G, P, Q$) :

$$Var(dx(G), dy(G), H, G, P, Q) = W \cdot Var(A, B, C) \cdot W^T \quad (4.4.20)$$

4.4.9 Ellipse d'erreurs au centre de gravité G

On extrait de (4.4.20) le sous-tableau (2x2) $Var(dx(G), dy(G))$ et on calcule $\sigma_{X_G}, \sigma_{Y_G}$ et le coefficient de corrélation et on détermine l'ellipse d'erreurs en G ce qui donne l'erreur absolue du réseau au centre de gravité.

4.4.10 Echelle/Orientation au point G

On tire $Var(H, G)$ de (4.4.20) et on calcule σ_H et σ_G .

4.4.11 Déformation pure ou ovalisation

On considère $Var(H, G)$ extraite de (4.4.20), d'où σ_P et σ_Q . D'après (4.4.18) :

$$\begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ H \\ G \\ P \\ Q \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix}$$

d'où le calcul de P et Q en fonction de $dx(A_i)$, $dy(A_i)$ et on déduit le coefficient d'ovalisation $v = \sqrt{P^2 + Q^2}$ et :

$$\text{le coefficient d'ovalisation} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4.4.21)$$

4.4.12 Ellipse au sommet A

De la matrice (4.4.19), on extrait $Var(dx(A), dy(A))$, d'où σ_{X_A} , σ_{Y_A} et l'ellipse d'erreurs en A .

Même méthode aux sommets B et C .

On n'étudie pas les ellipses d'erreurs au milieu des cotés AB , BC et CA .

4.4.13 Echelle/Orientation du côté AC

D'après (4.4.18) :

$$\begin{pmatrix} dx(G) \\ dy(G) \\ H \\ G \\ P \\ Q \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(B) \\ dy(B) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix} = \mathcal{L} \cdot \begin{pmatrix} dx(A) \\ dy(A) \\ dx(C) \\ dy(C) \end{pmatrix} \quad (4.4.22)$$

\mathcal{L} est une sous-matrice (2x4) extraite de W . De (4.4.19), on extrait $Var(dx(A), dy(A), dx(C), dy(C))$ et en appliquant la loi de propagation des variances on obtient :

$$Var(H, G) = \mathcal{L} \cdot Var(dx(A), dy(A), dx(C), dy(C)) \cdot \mathcal{L}^T \quad (4.4.23)$$

d'où :

- σ_H : erreur d'échelle du côté AC ,
- σ_G : erreur d'orientation du côté AC .

Chapitre 5

Exemple Numérique

5.0.1 Schéma

Bloc de quatre points nouveaux :

Observations :

-Un azimut de Laplace : B Mednine T.E. - Smoumnia

-Une base : B Mednine T.E. - Mednine T.O.

-Cinq tours d'horizon

Point ancien : B Mednine T.E.

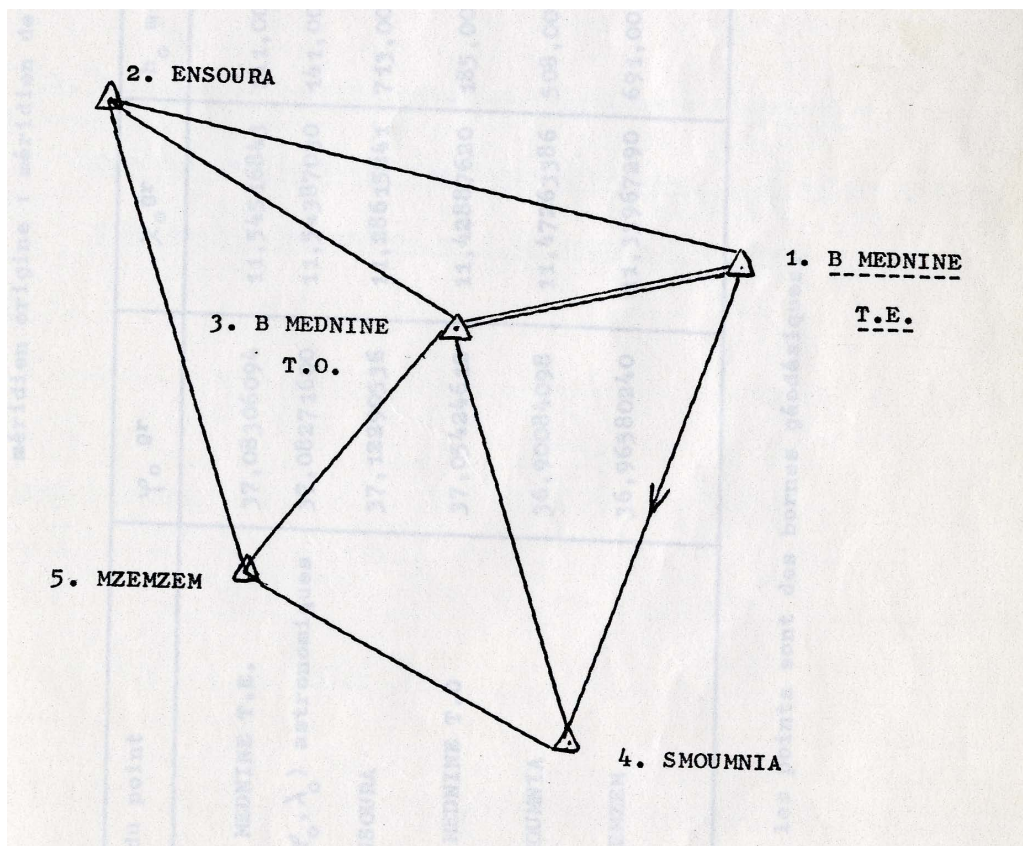


Figure 5.1 Schema

5.0.2 Calculs des coordonnées tridimensionnelles approchées

5.0.3 Calculs des coefficients des relations d'observation correspondant aux lectures des tours d'horizon, à la détermination d'un azimut de Laplace et à la mesure d'une base

Les résultats numériques se trouvent dans le document original.

I.3. Calculs des coordonnées tridimensionnelles approchées

Ellipsoïde de Clarke Français 1880 ($a = 6378249,200$ m, $f = 0,003007549520$)

méridien origine : méridien de Greenwich

Nom du point	φ_0 gr	λ_0 gr	h_0 m	X_0 km	Y_0 km	Z_0 km
1. B MEDNINE T.E. (φ_0, λ_0) astronomiques	37,08306094	11,54516843	141,00	5244,583405	961,676671	3488,555650
2. ENSOURA	37,08271600	11,54387030	141,00	5246,768028	940,028756	3492,191251
3. B MEDNINE T.O	37,05424612	11,42887620	185,00	5247,923815	952,383713	3486,177567
4. SMOUNNIA	36,90084098	11,47263386	508,00	5255,800129	957,545076	3473,553252
5. MZEMZEM	36,96580240	11,33967290	691,00	5254,440879	945,963332	3479,077201

Tous les points sont des bornes géodésiques.

Figure 5.2 Tableau des coordonnées tridimensionnelles approchées

Chapitre 6

Conclusions

Tout d'abord, l'ordre de grandeur des résultats obtenus montre que les formules utilisées trouvent leur justification. La compensation par moindres carrés donne respectivement aux points géodésiques **3. B. MEDNINE T.O**, **4. SMOUMNIA** et **5. MZEMZEM** les valeurs de dV_0 égales à $-2,5 \text{ dmgr}$ et $-3,2 \text{ dmgr}$. Or dans le calcul du facteur G d'orientation nous trouvons au point fictif M milieu du segment **3-4**, la valeur $G = -1,88 \text{ dmgr}$ qui augmente en valeur absolue pour devenir $-G = 3,01 \text{ dmgr}$ au centre de gravité du triangle étudié **3-4-5**, ainsi nous avons une vérification de la désorientation du réseau qui augmente en s'éloignant du point fixe **1. B. MEDNINE T.E.**

L'étude des précisions relatives du segment **3-4** révèle que le point **4. SMOUMNIA**, bien qu'il soit voisin du point fixe **1.**, a une ellipse d'erreurs plus grande par rapport à celles des points **3.** et M milieu du segment **3-4**.

En effet, sa position est surtout déterminée par la mesure de l'azimut de Laplace faite au point **1.** Nous pouvons déduire que l'azimut de Laplace dans la direction **1.-4.** doit être plus amélioré. Le facteur d'échelle $H = -7.92 \times 10^{-6} \text{ m}$ (-8 m pour 1000 km) donne sur la distance **3. B. MEDNINE T.O. -4. SMOUMNIA** une variation $dD = -7.92 \times 15.7 = -12.5 \text{ cm}$, quantité pouvant être détectée par les distances-mètres.

Le demi-grand axe des ellipses d'erreurs au point **3.** prend toujours sensiblement la direction **3-4** et l'écart-type de position dans la direction **3-1** est faible, ce qui montre que la base de **MEDNINE 1-3** a une bonne valeur relative.

L'étude des ellipses d'erreurs absolues montre une meilleure position du point **3.** par rapport à celle du point **4.**, mais nous constatons que les écarts type des orientations $\sigma(dV_{03})$ et $\sigma(dV_{04})$ sont de l'ordre de 5 dmgr soit le double des (dV_0) , donc l'orientation absolue aux points **3.** et **4.** est dégradée.

Nous terminons avec l'analyse de la structure du triangle **3-4-5**, nous trouvons comme il a été mentionné à l'étude des erreurs relatives du segment **3-4**, une désorientation en s'éloignant du point fixe, le facteur d'ovalisation $v = 1.76 \times 10^{-6} \text{ m} \approx 1/500\,000$ ème, ceci entraîne une déformation du réseau géodésique indétectable par l'utilisateur.

Enfin, nous remarquons que nous avons trouvé le même ordre de grandeur des coefficients

H, G, P et Q déterminés par d'autres méthodes (Fezzani C. [11] 1979).

En conclusion, la méthode est utilisable à l'étude de la matrice variance-covariance d'un réseau limité et elle donnera des renseignements utiles sur sa structure. Par ailleurs, notre méthode permet de déterminer les facteurs d'échelle H , de l'orientation G , de l'ovalisation v , pour un réseau ayant de grands cotés (déterminés par des observations spatiales). Cette étude ne sera achevée qu'après une comparaison avec la méthode bidimensionnelle pour en tirer les conclusions finales.

Bibliographie

- [1] H.M.Dufour. Exemple de calcul géodésique. Analyse des structures des résultats. I.G.N. n°26771. 1975.
- [2] H.M. Dufour. Résolution des grands systèmes d'équations linéaires Presented at the International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks. 4-10 July. 1977. Sopron - Hungary.
- [3] L. Landau et E. Lifschitz. La théorie de l'élasticité. Cours de Physique Théorique. Tome VII. Edition MIR. 1970.
- [4] F. Sanso. Three lectures on mathematical theory of elasticity. *Geodesy and Global Geodynamics*. Editeurs H. Moritz et H. Sünkel. Publication n°41 de l'Institut de Géodésie de l'Université Technique de Graz- Autriche. pp 461-530. 1982.
- [5] H.M. Dufour. Etude de la compensation du réseau européen dans l'option de la géodésie tridimensionnelle. 1963. 2ème Direction n°27002.
- [6] J. Le Menestrel. Compensation du réseau géodésique français de premier ordre. Bulletin géodésique n°94. Déc 1969.
- [7] A. Ben Hadj Salem. Point de Laplace. 1ère partie du rapport de stage. D.T.I.G. - S.G.N.M. Mars-Octobre. 1981.
- [8] H.M.Dufour. Théorie des erreurs accidentelles. Méthode des moindres carrés. IGN. n°26836. 1971.
- [9] J. Le Menestrel. Cours de géodésie. ENSG. 1980.
- [10] P. Hottier. Théorie des erreurs. IGN.
- [11] C. Fezzani. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur-Ingénieur. IGN. ENSG. 1979.

- [12] H.M. Dufour. Calcul matriciel. Révolution des systèmes linéaires par élimination. IGN. n°26933. 1964.
- [13] C.Boucher. Systèmes géodésiques de références et autres problèmes géodésiques liés à la localisation en Mer. Symposium sur la localisation en Mer. Brest 1979.
- [14] D.Mc Carthy and J. Pilkington. Time and the Earth's Rotation. Symposium n°82 de l'Association Internationale d'Astronomie tenu à San Fernando. Espagne. 8-12 mai 1978. R. REIDEL PUBLISHING Company.
- [15] H.M. Dufour. Le Symposium sur la géodésie à trois dimensions. Vénise, Juillet 1959. 2ème Direction n°26935.
- [16] H.M. Dufour. Point de Laplace. 1960. 2ème Direction n°26869A.
- [17] H.M. Dufour. A propos de la détermination de l'azimut de Laplace par mesures méridiennes. 1958. 2ème Direction. n°26869B.
- [18] H.M. Dufour. Toute la géodésie sans ellipsoïde - Les repères Laplaciens - Application particulière aux travaux à latitude élevée. XIVème assemblée générale de l'A.I.G. Lucerne 1967. IGN/2. n°26927.
- [19] H.M. Dufour. Géodésie tridimensionnelle et systèmes Laplaciens de références. RETRIG 1981. Londres.
- [20] M. Duhamel. Déterminations astronomiques en campagne. IGN. ENSG. 1963.
- [21] A. Fontaine. Azimut de Laplace sur étoiles basses. 1964. IGN/2. n°26818.
- [22] A. Gougenheim. Théorie et pratique de la méthode des droites d'azimut. Bulletin géodésique n°32. Juin 1954.
- [23] B. Guinot, M. Feissel et F. Laglare. Bureau International de l'Heure. Rapport annuel pour 1969.
- [24] W. Heiskanen, H. Moritz. Physical Geodesy. FREEMAN et COMPAGNY. San Francisco 1967 (Reprint Institute of Physical Geodesy, Graz, Austria - 1979).
- [25] H. Moritz. La géodynamique spatiale. Ecole d'été. Lannion septembre 1974. CNES.
- [26] H. Moritz. Définition du système de référence 1980. Bulletin géodésique n°3. 1980.
- [27] M. Ollikainen. Astronomical azimuth determinations. Finnish geodetic Publication n°84.

[28] V. Ashkenazi. Criteria for strength analysis and optimisation terrestrial triangulation networks. International Symposium. Satellite and Terrestrial Triangulation. June 1-2, 1979. Austria.

[29] C. Boucher. The general theory of deformation and its applications in geodesy. Presented at 7th sym. on Mathematical geodesy. 4th HOTINE sym. June 8- 10-1978. Assisi. Italy.

[30] H.M. Dufour. Eléments et probabilité et de statistique. Application à la théorie des erreurs de mesure. I.G.N. n°26835. 1971.

[31] H.M. Dufour. Evolution des méthodes géodésiques. Bulletin d'Information de l'I.G.N. n°34. 1977.

Table des figures

1.1	L'Ellipse	6
1.2	Le Géoïde	9
5.1	Schema	48
5.2	Tableau des coordonnées tridimensionnelles approchées	50